Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 278, 2001 г.

Л. В. Розовский

О НЕКОТОРЫХ СВОЙСТВАХ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОЖИДАНИЯ

В [1] было, в частности, отмечено, что для класса $\mathcal{B}_c$ случайных величин, имеющих вероятностные плотности, ограниченные постоянной c, и для неубывающей функция $f(x)$ имеет место соотношение
$$\inf_{X\in\mathcal{B}_c} \mathbf{E}f(|X|) = \mathbf{E}f(|X_c|), \tag{1}$$
где X_c - равномерно распределенная на $[-\frac{1}{2c}, \frac{1}{2c}]$ случайная величина. При этом, если функция $f(x)$ не является постоянной в некоторой окрестности точки $\frac{1}{2c}$ и для некоторой случайной величины $X \in \mathcal{B}_c$ равенство (1) достигается, то $X \overset{p}{=} X_c$.

Мы приведем несколько (столь же элементарно проверяющихся) обобщений этих утверждений.

Лемма 1. *Пусть случайные величины* Y, $\mathbf{E}|Y| < \infty$, *и* Y_0 *имеют функции распределения* F *и* F_0, *такие что при всех* x
$$F(x) \leqslant F_0(x). \tag{2}$$
Тогда
$$\mathbf{E}Y \geqslant \mathbf{E}Y_0 \tag{3}$$
и, если $\mathbf{E}Y = \mathbf{E}Y_0$, *то* $Y \overset{p}{=} Y_0$.

Доказательство. Положим $Y^+ = \max(0, Y)$, $Y_0^+ = \max(0, Y_0)$. В условиях леммы 1
$$\infty > \mathbf{E}|Y| \geqslant \mathbf{E}Y^+ = \int_0^\infty (1 - F(x))dx \geqslant \int_0^\infty (1 - F_0(x))dx = \mathbf{E}Y_0^+,$$
откуда следует, что $-\infty \leqslant \mathbf{E}Y_0 < \infty$. Если $\mathbf{E}Y_0 = -\infty$, то неравенство (3) очевидно выполняется; в противном случае утверждение леммы 1 вытекает из условия (2) и равенства $\mathbf{E}(Y - Y_0) =$

Работа над статьей была поддержана грантом РФФИ No. 99-01-00724 и грантом ведущих научных школ No. 00-15-96019.

$\int\limits_{-\infty}^{\infty}(F_0(x)-F(x))dx$, которое проверяется интегрированием по частям.

Следствие 1. *Пусть $F_0(x)$ – некоторая функция распределения. Обозначим через $\mathcal{B}$ класс случайных величин Y с конечными средними и функциями распределения $F(x)$, удовлетворяющими условию (2). Тогда*

$$\inf_{X\in\mathcal{B}}\mathbf{E}Y=\mathbf{E}Y_0, \tag{4}$$

где случайная величина Y_0 имеет функцию распределения $F_0(x)$. При этом, если для некоторой случайной величины $Y\in\mathcal{B}$ равенство (4) достигается, то $Y\overset{p}{=}Y_0$.

Пусть $f(x)$ – некоторая борелевская функция, заданная на $(-\infty,\infty)$. Положим $\omega_x=\{y:f(y)<x\}$.

Лемма 2. *Пусть случайная величина X с функцией распределения $V(x)$ удовлетворяет условиям*

$$\mathbf{E}|f(X)|<\infty, \tag{5}$$

$$V(dx)\leqslant G(dx), \tag{6}$$

где G – некоторая мера на $(-\infty,\infty)$, для которой

$$a=\sup\{t:G(\omega_t)\leqslant 1\}>-\infty.$$

Тогда

$$\mathbf{E}f(X)\geqslant\mathbf{E}f(X_0), \tag{7}$$

где случайная величина X_0 имеет функцию распределения V_0 такую, что

$$\begin{aligned}&V_0(dx)=G(dx),\ x\in\omega_a,\\&V_0(X:f(X)=a)=1-G(\omega_a).\end{aligned} \tag{8}$$

Кроме того, если в (7) имеет место равенство и

$$G(\omega_a)=1\quad\text{или}\quad G(\omega_{a+})=1, \tag{9}$$

то $X\overset{p}{=}X_0$.

Заметим, что вторая часть соотношения (9) равносильно условию

$$G(\omega_a)+G(x:f(x)=a)=1, \tag{10}$$

а из равенств (8) следует, что

$$V_0(X : f(X) > a) = 0. \tag{11}$$

Доказательство. Обозначим $G(\omega_t)$ через G_t. Если $a = \infty$, то из определения a и (6) следует, что $1 \leqslant G_a \leqslant 1$. Отсюда и из (8)–(10) заключаем, что $X \stackrel{p}{=} X_0$ и, следовательно, лемма 2 справедлива.

Пусть теперь a конечно. Из леммы 1 при $Y = f(X)$, $F(x) = V(\omega_x)$ следует, что $\mathbf{E}f(X) \geqslant \mathbf{E}Y_0$, где случайная величина Y_0 имеет функцию распределения $F_0 = \min(1, G_x)$. Учитывая (см.(8),(11)), что $\omega_x \in \omega_y$, $x < y$, и то, что

$$\mathbf{P}(f(X_0) < x) = \mathbf{P}(X_0 \in \omega_x) = F_0(\omega_x) = G_x, \ x \leqslant a,$$
$$\mathbf{P}(f(X_0) < x) = G_a + V_0(X : f(X) = a) = G_a + 1 - G_a = 1, \ x > a,$$

заключаем, что $Y_0 \stackrel{p}{=} f(X_0)$, и, следовательно, (7) выполняется.

Для проверки при конечном a второго утверждения леммы 2, воспользуемся тождеством (см. (11))

$$\mathbf{E}f(X) - \mathbf{E}f(X_0) = \\ = \int_{\omega_a} (a - f(x))(V_0 - V)(dx) + \int_{R\setminus\omega_a} (f(x) - a)\, V(dx). \tag{12}$$

Если левая сторона в (12) равна нулю, то (см. (6), (8)) $V(dx) = V_0(dx)$, $x \in \omega_a$, и $V(dx) = 0$, если $f(x) > a$, или

$$V(dx) = V_0(dx) \text{ при всех } \{x : f(x) \neq a\}. \tag{13}$$

Если $G_a = 1$, отсюда и из (8) следует, что $V(dx) = V_0(dx)\ \forall x$, и лемма 2 в этом случае доказана.

Если же выполняется вторая часть условия (9), то по (8)–(10)

$$0 = (V_0 - V)(x : f(x) = a) = (G - V)(x : f(x) = a).$$

Привлекая условие (6), отсюда и из (13) находим, что снова $V(dx) = V_0(dx)\ \forall x$. Лемма 2 полностью доказана.

Следствие 2. *Пусть мера G и функция f такие, как в лемме 2. Обозначим через $\mathcal{B}_G$ класс случайных величин X с функциями распределения V, удовлетворяющими условиям* (5) *и* (7). *Тогда*

$$\inf_{X \in \mathcal{B}_G} \mathbf{E}f(X) = \mathbf{E}f(X_0), \tag{14}$$

где случайная величина X_0 *имеет функцию распределения* $V_0(x)$(*см.* (8)). *При этом, если для некоторой случайной величины* $X \in \mathcal{B}_G$ *равенство* (14) *достигается и выполняется условие* (9), *то* $X \stackrel{\mathcal{D}}{=} X_0$.

Соотношение (1) вытекает из следствия 2 при $G(dx) = c\,dx$. Заметим, что в этом случае $G_t = c\,\mu_t$, где μ_t – лебеговская мера борелевского множества ω_t, а условие (9) означает, что либо μ_a, либо μ_{a+} равны $1/c$.

Литература

1. Л. В. Розовский, *Одно экстремальное свойство равномерного распределения и некоторые его следствия.* — Теория вероятн. и ее примен. **44**, № 3 (1999), 646–650.

Rozovskii L. V. On some properties of a mean value.

In the note the best possible estimates from below are obtained for the mean value of a random variable with a distribution function which satisfies to some restrictions on a growth.

Санкт-Петербургская
Химико-Фармацевтическая Академия,
кафедра высшей математики

Поступило 15 декабря 2000 г.