Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 278, 2001 г.

Н. М. Халфина

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА ШОВЕНЭ ДЛЯ ОБНАРУЖЕНИЯ ГРУБЫХ ОШИБОК В НАБЛЮДЕНИЯХ, СВЯЗАННЫХ В ОДНОРОДНУЮ ЦЕПЬ МАРКОВА

Пусть дана последовательность случайных величин

$$\dots, X_{-2}, X_{-1}, X_0, X_1, \dots, X_n, \dots,$$

связанных в простую однородную цепь Маркова, причем любая пара соседей X_{m-1}, X_m имеет невырожденное двумерное нормальное распределение с параметрами

$$\begin{aligned} &E(X_{m-1}) = E(X_m) = a, \\ &D(X_{m-1}) = D(X_m) = \sigma^2, \\ &R(X_{m-1}, X_m) = \rho, \quad |\rho| \neq 1. \end{aligned}$$

Пусть над случайными величинами $X_1, \dots, X_{n+1}$ произведено $n+1$ последовательных наблюдений $x_1, \dots, x_{n+1}$, при этом параметры a, σ^2, ρ – неизвестны. В предыдущих работах автора [1–3] были рассмотрены случаи с неизвестными одним или двумя параметрами. Как и в указанных выше работах, будем находить вероятность того, что число выброшенных наблюдений, т.е. наблюдений, содержащих грубые ошибки, будет равно m, когда $n \to \infty$.

При этом выбрасывание наблюдений будет производиться по методу Шовенэ. Этот метод был введен для случая независимых наблюдений, поэтому дадим подробное объяснение, как использовать этот метод для случая наблюдений, связанных в цепь Маркова. Для этого определим плотность условного распределения X_i при заданном X_{i-1}

$$f\big(x_i \mid X_{i-1=x_{i-1}}\big) \in N\left[a + \rho(x_{i-1} - a), \sigma\sqrt{1-\rho^2}\right], \quad i = 2, \dots, n+1.$$

Зафиксируем число $\alpha > 0$ и обозначим k_i решение уравнения

$$\int_{k_i}^{\infty} f(x_i \mid X_{i-1=x_{i-1}})dx_i = \frac{\alpha}{n}, \quad i = 2, \ldots, n+1.$$

При заданном $\alpha > 0$ будем отбрасывать, т.е. считать содержащими грубые ошибки, те наблюдения x_i, $i \geqslant 2$, которые превышают k_i с вероятностью α/n при условии, что на предыдущем шаге было x_{i-1}.

Итак, для каждого x_i находится своя граница k_i и, если $x_i > k_i$, то x_i – отбрасывается.

Определим случайные величины N_i равенствами

$$N_i = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad x_i > k_i, \\ 0, & \text{если} \quad x_i \leqslant k_i, \end{cases}$$

и общее число выбросов $N = \sum_{i=2}^{n+1} N_i$.

Найдем $P\{N = m\}$, вероятность того, что число выброшенных таким образом наблюдений будет равно m, когда $n \to \infty$. Для этого воспользуемся свойствами случайной величины

$$Z_i = \frac{(X_i - a) - \rho(X_{i-1} - a)}{\sigma\sqrt{1-\rho^2}}, \quad i = 2, \ldots, n+1.$$

Известно, что Z_i независимы и нормально распределены с параметрами 0 и 1, и Z_i не зависит от X_{i-1}. Обозначим t решение уравнения

$$1 - \Phi(z) = \frac{\alpha}{n}. \tag{1}$$

Тогда

$$P(Z_i > t) = P\left(X_{i>k_i} \mid X_{i-1=x_{i-1}}\right),$$

где

$$k_i = a + \rho(x_{i-1-a}) + t\sigma\sqrt{1-\rho^2}, \quad i = 2, \ldots, n+1 \tag{2}$$

и

$$N_i = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad Z_i > t, \quad \text{т.е.} \quad x_i > k_i, \\ 0, & \text{если} \quad Z_i \leqslant t, \quad \text{т.е.} \quad x_i \leqslant k_i, \end{cases}$$

а число выбросов N можно определить, используя величины z_i и границу t. Так как Z_i независимы, то

$$P\{N = m\} = C_n^m \left(\frac{\alpha}{n}\right)^m \left(1 - \frac{\alpha}{n}\right)^{n-m} \simeq \frac{\alpha^m}{m!}e^{-\alpha} + O\left(\frac{\alpha^2}{n}\right). \tag{3}$$

Итак, в случае всех известных параметров α, σ и ρ вероятность того, что число выбросов равно m, определяется формулой (3), при этом граница k_i для определения выбросов пересчитывается на каждом шагу по формуле (2). По условиям задачи, рассматриваемой в этой работе, все 3 параметра α, σ и ρ неизвестны. Заменим неизвестные параметры их оценками, построим новую границу $\widetilde{k}_i$ для выбросов, заменяя в формуле (2) неизвестный параметр его оценкой, и, соответственно, считаем

$$\widetilde{N}_i = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad x_i > \widetilde{k}_i, \\ 0, & \text{если} \quad x_i \leqslant \widetilde{k}_i, \end{cases}$$

и $\widetilde{N} = \sum_{i=2}^{n+1} \widetilde{N}_i$ – общее число выбросов при такой замене. Будем исследовать асимптотическое поведение при $n \to \infty$ распределения случайной величины $\widetilde{N}$, т.е. находить $P\{\widetilde{N} = m\}$ при $n \to \infty$.

В качестве оценок для a, σ и ρ возьмем следующие оценки

$$a^* = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i; \quad {\sigma^*}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - a^*)^2;$$

$$\rho^* = \frac{n}{n-1} \cdot \frac{\sum\limits_{i=2}^{n}(x_i - a^*)(x_{i-1} - a^*)}{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i - a^*)^2}.$$

Из §3.5.4 в [4] известно, что при $\varkappa = (1-\rho^2)n \to \infty$ эти оценки эквивалентны оценкам максимального правдоподобия, а величины

$$\frac{(a^* - a)}{\sqrt{(1+\rho)}}\,\frac{\sqrt{(1-\rho)n}}{\sigma}, \quad \frac{{\sigma^*}^2 - \sigma^2}{\sigma^2}\sqrt{\frac{n}{2}}, \quad \frac{(\rho^* - \rho)\sqrt{n}}{\sqrt{1-\rho^2}}$$

имеют асимптотически нормальное распределение с параметрами 0, 1; отметим обязательное выполнение условия $\varkappa \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$.

С помощью этих оценок строим границу $\widetilde{k}_i$ для выбросов

$$\widetilde{k}_i = t\sigma^*\sqrt{1 - {\rho^*}^2} + a^* + \rho^*(x_{i-1} - a^*), \quad i = 2, \ldots .$$

Определим

$$Y_i = \frac{(X_i - a^*) - \rho^*(X_{i-1} - a^*)}{\sigma^*\sqrt{1 - {\rho^*}^2}}, \quad i = 2, \ldots .$$

Напомним, что $\widetilde{N}_i = 1$, когда $x_i > \widetilde{k}_i$, что соответствует $Y_i > t$. Так как Y_i зависимы, то найти $P\{\widetilde{N} = m\}$ непосредственно нельзя. Как и в предыдущих работах [1–3], будем оценивать $P\{\widetilde{N} = m\}$ с помощью очевидного неравенства

$$\Big|P\{N = m\} - P\{\widetilde{N} = m\}\Big| \leqslant P\{N \neq \widetilde{N}\} \leqslant \sum_{i=2}^{n+1} P\{N_i \neq \widetilde{N}_i\}. \qquad (4)$$

Запишем Y_i в виде

$$Y_i = Z_i + Z_i\left(\frac{\sigma\sqrt{1-\rho^2}}{\sigma^*\sqrt{1-\rho^{*2}}} - 1\right) + \frac{(X_{i-1}-a)(\rho-\rho^*)}{\sigma^*\sqrt{1-\rho^{*2}}} +$$

$$+\frac{(a-a^*)(1-\rho^*)}{\sigma^*\sqrt{1-\rho^{*2}}} = Z_i + Q_z = Z_i + I_1 + I_2 + I_3, \quad i = 2, \ldots .$$

Напомним, что $N_i = 1$, когда $Z_i > t$, а $\widetilde{N}_i = 1$, когда $Y_i > t$, где t – решение уравнения (1). Тогда для любого $h > 0$ выполняется неравенство

$$P\big\{N_i \neq \widetilde{N}_i\big\} \leqslant P\big\{|Z_i - t| \leqslant h\big\} + P\big\{|Q_z| > h\big\}. \qquad (5)$$

Из (1) видно, что $t = O(\sqrt{\ln n/\alpha})$, поэтому, если выбрать h так, чтобы $h \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, то получим

$$P\{|Z_i - t| \leqslant h\} = \Phi(t+h) - \Phi(t-h) = O(h\Phi'(t)) = O\left(\frac{h\sqrt{\ln n}}{n}\right). \quad (6)$$

Теперь оценим

$$P\big\{|Q_z| > h\big\} = P\big\{|I_1 + I_2 + I_3| > h\big\} \leqslant \sum_{i=1}^{3}\left\{P|I_i| > \frac{h}{3}\right\}.$$

Для первого слагаемого в Q_z имеем

$$P\left\{|I_1| > \frac{h}{3}\right\} \leqslant P\big\{Z_i| > H\big\} + P\left\{\left|\frac{\sigma\sqrt{1-\rho^2}}{\sigma^*\sqrt{1-\rho^{*2}}} - 1\right| > \frac{h}{3H}\right\}$$

для любого $H > 0$.

Так как $Z_i \in N(0,1)$, то

$$P\{|Z_i| > H\} = O\left(\frac{1}{H}e^{-H^2/2}\right) \qquad (7)$$

при $H \to \infty$.

Далее,

$$P\left\{\left|\frac{\sigma\sqrt{1-\rho^2}}{\sigma^*\sqrt{1-\rho^{*2}}}-1\right|>\frac{h}{3H}\right\}\leqslant$$

$$\leqslant P\left\{\frac{\sigma\sqrt{1-\rho^2}}{\sigma^*\sqrt{1-\rho^{*2}}}<1-\frac{h}{3H}\right\}+P\left\{\frac{\sigma\sqrt{1-\rho^2}}{\sigma^*\sqrt{1-\rho^{*2}}}>1+\frac{h}{3H}\right\}.$$

Рассмотрим

$$P\left\{\frac{\sigma\sqrt{1-\rho^2}}{\sigma^*\sqrt{1-\rho^{*2}}}>1+\frac{h}{3H}\right\}\leqslant P\left\{\frac{\sigma^2(1-\rho^2)}{\sigma^{*2}(1-\rho^{*2})}>\left(1+\frac{h}{3H}\right)^2\right\}\leqslant$$

$$\leqslant P\left\{\frac{\sigma^2}{\sigma^{*2}}>1+\varepsilon\right\}+P\left\{\frac{1-\rho^2}{1-\rho^{*2}}>1+\varepsilon\right\},\quad\text{где}\quad \varepsilon=\frac{h}{3H}\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}0. \quad (8)$$

Оценим первое слагаемое в правой части (8)

$$P\left\{\frac{\sigma^2}{\sigma^{*2}}>1+\varepsilon\right\}=P\left\{\frac{\sigma^{*2}}{\sigma^2}<\frac{1}{1+\varepsilon}\right\}=P\left\{1-\frac{\sigma^{*2}}{\sigma^2}>1-\frac{1}{1+\varepsilon}\right\}=$$

$$=P\left\{\frac{\sigma^2-\sigma^{*2}}{\sigma^2}>\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}\right\}\leqslant P\left\{\frac{|\sigma^2-\sigma^{*2}}{\sigma^2}\sqrt{\frac{n}{2}}>\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}\sqrt{\frac{n}{2}}\right\}=$$

$$=O\left(e^{-\frac{\varepsilon^2 n}{16}}\right)=O\left(e^{-\frac{h^2 n}{144H^2}}\right)\quad\text{при}\quad \frac{h^2 n}{H^2}\to\infty. \quad (9)$$

Теперь оценим второе слагаемое в правой части (8)

$$P\left\{\frac{1-\rho^2}{1-\rho^{*2}}>1+\varepsilon\right\}=P\left\{1-\frac{1-\rho^{*2}}{1-\rho^2}>1-\frac{1}{1+\varepsilon}\right\}=$$

$$=P\left\{\frac{\rho^{*2}-\rho^2}{1-\rho^2}>\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}\right\}=P\left\{\frac{(\rho^*-\rho)(\rho^*+\rho)}{1-\rho^2}>\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}\right\}\leqslant$$

$$\leqslant P\left\{\frac{|\rho^*-\rho|\sqrt{n}}{\sqrt{1-\rho^2}}>\frac{\varepsilon\sqrt{n}\sqrt{1-\rho^2}}{2(1+\varepsilon)}\right\}=O\left(e^{-\frac{\varepsilon^2 n(1-\rho^2)}{8(1+\varepsilon)^2}}\right)$$

$$\text{при}\quad \varepsilon^2 n(1-\rho^2)\to\infty,$$

и т.к. $\varepsilon=\frac{h}{3H}\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}0$, то

$$P\left\{\frac{1-\rho^2}{1-\rho^{*2}}>1+\varepsilon\right\}=O\left(e^{-\frac{h^2 n(1-\rho^2)}{H^2\cdot 288}}\right)\quad\text{при}\quad \frac{h^2 n(1-\rho^2)}{H^2}\to\infty. \quad (10)$$

В результате, подставляя оценки (9) и (10) в (8), получим

$$P\left\{\frac{\sigma\sqrt{1-\rho^2}}{\sigma^*\sqrt{1-\rho^{*2}}} > 1+\frac{h}{3H}\right\} = O\Big(e^{-\frac{h^2n}{144H^2}} + e^{-\frac{h^2n(1-\rho^2)}{H^2\cdot 288}}\Big). \qquad (11)$$

Аналогично находим оценку для

$$P\left\{\frac{\sigma\sqrt{1-\rho^2}}{\sigma^*\sqrt{1-\rho^{*2}}} < 1-\frac{h}{3H}\right\}.$$

$$P\left\{\frac{\sigma^2}{\sigma^{*2}} < 1-\varepsilon\right\} \leqslant P\left\{\frac{|\sigma^{*2}-\sigma^2|\sqrt{n}}{\sigma^2\sqrt{2}} > \frac{\varepsilon\sqrt{n}}{(1-\varepsilon)\sqrt{n}}\right\} =$$

$$= O\Big(e^{-\frac{\varepsilon^2 n}{4}}\Big) = O\Big(e^{-\frac{h^2n}{H^2 4}}\Big)$$

$$P\left\{\frac{1-\rho^2}{1-\rho^{*2}} < 1-\varepsilon\right\} = P\left\{\frac{\rho^2-\rho^{*2}}{1-\rho^2} > \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}\right\} \leqslant$$

$$\leqslant O\Big(e^{-\frac{\varepsilon^2 n(1-\rho^2)}{8}}\Big) = O\Big(e^{-\frac{h^2n(1-\rho^2)}{216H^2}}\Big).$$

Итак,

$$P\left\{\left|\frac{\sigma\sqrt{1-\rho^2}}{\sigma^*\sqrt{1-\rho^{*2}}} - 1\right| > \frac{h}{3H}\right\} = O\Big(e^{-\frac{h^2n}{144H^2}} + e^{-\frac{h^2n(1-\rho^2)}{H^2\cdot 288}}\Big). \qquad (12)$$

Для I_1 получена оценка

$$P\left\{|I_1| > \frac{h}{2}\right\} \leqslant O\Big(\frac{1}{H}e^{-\frac{H^2}{2}} + e^{-\frac{h^2n}{144H^2}} + e^{-\frac{h^2n(1-\rho^2)}{H^2\cdot 288}}\Big). \qquad (13)$$

При этом должны выполняться условия

$$\frac{h^2n}{H^2} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty, \quad \frac{h^2n(1-\rho^2)}{H^2} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty, \quad h \underset{n\to\infty}{\to} 0, \quad H \underset{n\to\infty}{\to} \infty.$$

Теперь найдем оценку для $P\{|I_2| > \frac{h}{3}\}$.

$$P\left\{|I_2| > \frac{h}{3}\right\} = P\left\{\left|\frac{(X_{i-1}-a)(\rho-\rho^*)}{\sigma^*\sqrt{1-\rho^{*2}}}\right| > \frac{h}{3}\right\} \leqslant$$

$$\leqslant P\left\{\frac{|\rho-\rho^*|}{\sqrt{1-\rho^{*2}}} > \frac{h}{3K}\right\} + P\left\{\frac{|X_{i-1}-a|}{\sigma^*} > K\right\}, \quad \text{где} \quad K>0. \qquad (14)$$

В свою очередь,

$$P\left\{\frac{|\rho-\rho^*|}{\sqrt{1-\rho^{*2}}}>\frac{h}{3K}\right\}\leqslant$$

$$\leqslant P\left\{\frac{|\rho-\rho^*|\sqrt{n}}{\sqrt{1-\rho^2}}>\frac{h\sqrt{n}}{3K\sqrt{2}}\right\}+P\left\{\frac{\sqrt{\rho-\rho^2}}{\sqrt{1-\rho^{*2}}}>\sqrt{2}\right\}.$$

Как было отмечено ранее, $\frac{(\rho-\rho^*)\sqrt{n}}{\sqrt{1-\rho^2}}$ имеет асимптотически нормальное распределение с $(0,1)$, поэтому

$$P\left\{\frac{|\rho-\rho^*|\sqrt{n}}{\sqrt{1-\rho^2}}>\frac{h\sqrt{n}}{3K\sqrt{2}}\right\}=O\Big(e^{-\frac{h^2n}{36K^2}}\Big)\quad\text{при}\quad\frac{h\sqrt{n}}{K}\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}\infty.$$

$$P\left\{\frac{\sqrt{1-\rho^2}}{\sqrt{1-\rho^{*2}}}>\sqrt{2}\right\}\leqslant P\left\{1-\rho^{*2}<\frac{1-\rho^2}{2}\right\}=P\left\{\rho^{*2}-\rho^2>\frac{1-\rho^2}{2}\right\}\leqslant$$

$$\leqslant P\left\{|\rho^*-\rho|>\frac{1-\rho^2}{4}\right\}=O\Big(e^{-\frac{(1-\rho^2)n}{32}}\Big)\quad\text{при}\quad(1-\rho^2)n\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}\infty.$$

Итак

$$P\left\{\frac{|\rho-\rho^*|}{\sqrt{1-\rho^{*2}}}>\frac{h}{3K}\right\}=O\Big(e^{-\frac{h^2n}{36K^2}}+e^{-\frac{(1-\rho^2)n}{32}}\Big),\tag{15}$$

при этом должны выполняться условия

$$\frac{h\sqrt{n}}{K}\to\infty,\quad(1-\rho^2)n\to\infty\quad\text{при}\quad n\to\infty.$$

Оценим второе слагаемое в правой части неравенства (14)

$$P\left\{\frac{|X_{i-1}-a|}{\sigma^*}>K\right\}\leqslant P\left\{\frac{|X_{i-1}-a|}{\sigma}>\frac{K}{\sqrt{2}}\right\}+P\left\{\frac{\sigma}{\sigma^*}>\sqrt{2}\right\}\leqslant$$

$$\leqslant O\Big(e^{-\frac{K^2}{4}}\Big)+P\left\{\frac{|\sigma^{*2}-\sigma^2|}{\sigma^2}>\frac{1}{2}\right\}=O\Big(e^{-\frac{K^2}{4}}+e^{-\frac{n}{16}}\Big).\tag{16}$$

Из (14), (15) и (16) получаем оценку для $P\{|I_2|>\frac{h}{3}\}$.

$$P\left\{|I_2|>\frac{h}{3}\right\}=O\Big(e^{-\frac{h^2n}{36K^2}}+e^{-\frac{(1-\rho^2)n}{32}}+e^{-\frac{K^2}{4}}+e^{-\frac{n}{16}}\Big)$$

при условиях

$$K\to\infty,\quad\frac{h\sqrt{n}}{K}\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}\infty,\quad(1-\rho^2)n\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}\infty.\tag{17}$$

Осталось оценить $P\{|I_3| > \frac{h}{3}\}$.

$$P\left\{\left|\frac{(a-a^*)(1-\rho^*)}{\sigma^*\sqrt{1-\rho^{*\,2}}}\right| > \frac{h}{3}\right\} \leqslant$$

$$\leqslant P\left\{\frac{\sigma}{\sigma^*} > \sqrt{2}\right\} + P\left\{\frac{|a-a^*|\sqrt{1-\rho}}{\sigma\sqrt{1+\rho}} > \frac{h}{3\sqrt{2}\cdot 2\sqrt{2}}\right\} +$$

$$+P\left\{\frac{1-\rho^*}{1-\rho} > 2\right\} + P\left\{\frac{\sqrt{1-\rho^2}}{\sqrt{1-\rho^{*\,2}}} > \sqrt{2}\right\}. \tag{18}$$

Оценка первого члена в правой части (18) уже рассматривалась выше (см. (9))

$$P\left\{\frac{\sigma}{\sigma^*} > \sqrt{2}\right\} \leqslant P\left\{\frac{\sigma^2}{\sigma^{*\,2}} > 2\right\} = O\left(e^{-\frac{n}{16}}\right). \tag{19}$$

Так как величина $\frac{(a^*-a)\sqrt{(1-\rho)n}}{\sigma\sqrt{1+\rho}}$ имеет асимптотически нормальное распределение $N(0,1)$, то

$$P\left\{\frac{|a-a^*|\sqrt{1-\rho}}{\sigma\sqrt{1+\rho}} > \frac{h}{12}\right\} = O\left(e^{-\frac{nh^2}{288}}\right) \tag{20}$$

при условии $h\sqrt{n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$.

Оценка третьего члена в правой части (18) тоже рассматривалась выше (см. (10))

$$P\left\{\frac{1-\rho^*}{1-\rho} > 2\right\} = P\left\{\frac{\rho-\rho^*}{1-\rho} > 1\right\} \leqslant$$

$$\leqslant P\left\{\frac{|\rho-\rho^*|\sqrt{n}}{\sqrt{1-\rho^2}} > \frac{\sqrt{n}\sqrt{1-\rho^2}}{2}\right\} = O\left(e^{-\frac{n(1-\rho^2)}{8}}\right),$$

$$\text{т.к.} \quad |1+\rho| < 2 \tag{21}$$

при условии $n(1-\rho^2) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$.

Так же оцениваем и последний член в (18)

$$P\left\{\frac{\sqrt{1-\rho^2}}{\sqrt{1-\rho^{*\,2}}} > \sqrt{2}\right\} < P\left\{\frac{1-\rho^2}{1-\rho^{*\,2}} > 2\right\} = P\left\{\frac{1-\rho^{*\,2}}{1-\rho^2} < \frac{1}{2}\right\} \leqslant$$

$$\leqslant P\left\{\frac{|\rho^*-\rho|}{1-\rho^2} > \frac{1}{2(\rho+\rho^*)}\right\} < P\left\{\frac{|\rho^*-\rho|\sqrt{n}}{\sqrt{1-\rho^2}} > \frac{\sqrt{n}\sqrt{1-\rho^2}}{4}\right\} =$$

$$= O\left(e^{-\frac{n(1-\rho^2)}{32}}\right) \quad \text{при условии} \quad n(1-\rho^2) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty. \tag{22}$$

Итак, суммируя (19), (20), (21) и (22), получаем из (18) оценку $P\{|I_3| > \frac{h}{3}\}$.

$$P\left\{|I_3| > \frac{h}{3}\right\} \leqslant O\left(e^{-\frac{n}{16}} + e^{-\frac{nh^2}{288}} + e^{-\frac{n(1-\rho^2)}{32}}\right) \tag{23}$$

при условиях $h\sqrt{n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$, $n(1-\rho^2) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$.

В результате, суммируя (6), (13), (17) и (23), и, используя (5) и (4), получим

$$\left|P\{N=m\} - P\{\widetilde{N}=m\}\right| \leqslant$$

$$\leqslant O\left(h\sqrt{\ln n}\right) + nO\left(\frac{1}{H}e^{-\frac{H^2}{2}} + e^{-\frac{h^2 n}{144H^2}} + e^{-\frac{h^2 n(1-\rho^2)}{288H^2}} + e^{-\frac{h^2 n}{36K^2}} + \right.$$

$$\left. + e^{-\frac{(1-\rho^2)n}{32}} + e^{-\frac{K^2}{4}} + e^{-\frac{n}{16}} + e^{-\frac{nh^2}{288}}\right). \tag{24}$$

При этом должны выполняться следующие условия при соответствующем выборе h, H, K (см. (13), (17) и (23)):

$$1)\ h \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0, \quad 2)\ H \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty, \quad 7)\ n(1-\rho^2) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty, \quad 4)\ \frac{h\sqrt{n}}{H} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty,$$

$$8)\ \frac{h^2 n(1-\rho^2)}{H^2} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty, \quad 5)\ \frac{h\sqrt{n}}{K} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty, \quad 3)\ K \to \infty \quad 6)\ h\sqrt{n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty.$$

Выберем $h = n^{-\delta}$, $H = K = n^{l}$, где $0 < \delta < \frac{1}{2}$, $0 < l < \frac{1}{2}$, $\delta + l < \frac{1}{2}$. При таком выборе h, H и K условия 1)–6) – выполняются автоматически, а для выполнения условий 7) и 8) требуется, чтобы ρ^2 не было очень близко к 1. Если положить

$$1 - \rho^2 = n^{-s}, \tag{25}$$

то условия 7) и 8) выполняются при $0 < s < 1 - 2(\delta + l)$. В результате при выбранных таким образом h, H и K

$$\left|P\{N=m\} - P\{\widetilde{N}=m\}\right| \leqslant O\left(\frac{\sqrt{\ln n}}{n^{\delta}}\right),$$

где $0 < \delta < \frac{1}{2}$. При этом $|\rho|$ должно быть отделено от 1 условием (25).

Литература

1. Н. М. Халфина, *Обнаружение грубых ошибок методом Шовенэ в наблюдениях, связанных в однородную цепь Маркова.* — Зап. научн. семин. ЛОМИ **177** (1989), 163–169.
2. Н. М. Халфина, *Обнаружение грубых ошибок методом Шовенэ в наблюдениях, связанных в однородную цепь Маркова.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **207** (1993), 137–142.
3. Н. М. Халфина, *Обнаружение грубых ошибок методом Шовенэ в наблюдениях, связанных в однородную цепь Маркова.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **260** (1999), 278–289.
4. М. Арато, *Линейные стохастические системы с постоянными коэффициентами.* Наука, М. (1989).

Halfina N. M. Application of the Chauvenet test to detection of overliers in observations connected in homogeneous Markov chain.

Let $x_1, \dots, x_n$ be random variables, connected in homogeneous Markov chain. Asymptotic behavior of the distribution of random value N: number of overliers is investigated for unknown parameters a, σ, and ρ.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им.В. А. Стеклова РАН

Поступило 1 декабря 2000 г.