Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 278, 2001 г.

Б. П. Харламов

УСЛОВИЯ ЭРГОДИЧНОСТИ И СТАЦИОНАРНЫЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ НЕПРЕРЫВНОГО ПОЛУМАРКОВСКОГО ПРОЦЕССА

1. Введение

В настоящей работе мы продолжаем исследование класса полумарковских процессов общего вида (см. [4] и др). Класс ступенчатых полумарковских процессов сравнительно прост и достаточно хорошо изучен (см., например, [3]). Класс полумарковских процессов общего вида обладает целым рядом интересных свойств, которые до сих пор не исследованы. В данной статье мы изучаем эргодические свойства и стационарные распределения процессов этого класса.

Полумарковский процесс общего вида (который мы в дальнейшем называем *полумарковским процессом*, добавляя определения *непрерывный* или *ступенчатый* в необходимых случаях) может быть определен как процесс, для которого все вложенные потоки первых выходов (для фиксированной последовательности открытых подмножеств пространства состояний) являются ступенчатыми полумарковскими процессами. Отсюда вытекает принципиальная возможность доказывать эргодичность и вычислять стационарные вероятности в общем случае на основании теории ступенчатых полумарковских процессов. В этом последнем случае существенно используется эргодичность вложенной марковской цепи и ее стационарная вероятностная мера. Но для непрерывных полумарковских процессов такая вложенная марковская цепь может быть не единственна. Их может быть бесконечно много со сколь угодно малыми скачками. В этом случае можно попытаться выразить стационарные вероятности полумарковского процесса в терминах так называемого ассоциированного марковского процесса.

Поддержано грантом РФФИ 99-01-00380. Частично поддержано грантом РФФИ "Ведущие научные школы" 00-15-96019.

Простой нетривиальный пример непрерывного полумарковского процесса – это обращенный процесс с независимыми положительными приращениями, который по известному представлению Леви обладает непрерывными траекториями канторовского типа. Этот пример на самом деле играет ключевую роль при анализе полумарковских процессов: при достаточно слабых предположениях такой процесс может быть представлен в виде марковского процесса, преобразованного заменой времени. В этом случае ход времени относительно фиксированной последовательности состояний представляет собой процесс с независимыми положительными приращениями. Благодаря этому свойству траектории типичного полумарковского процесса содержат условно случайные "пуассоновские" интервалы постоянства. В то же время марковский процесс, который является особым частным случаем полумарковского процесса, не имеет интервалов постоянства пуассоновского типа. Исследование стационарного распределения длины пуассоновского интервала постоянства – это специфическая задача теории полумарковских процессов.

В основу исследования положены результаты Шуренкова об эргодических процессах Маркова (см. [10]), а также результаты автора о ходе времени относительно фиксированной последовательности состояний в полумарковском процессе ([8] и др.).

2. Определения и обозначения

Рассматривается полумарковский процесс (общего вида) на полном сепарабельном локально-компактном метрическом пространстве состояний $(\mathbb{X}, \rho)$, задаваемый согласованным семейством вероятностных мер (P_x) $(x \in \mathbb{X})$ на пространстве $\mathcal{D} = \mathcal{D}(\mathbb{R}_+)$ непрерывных справа и имеющих пределы слева функций $\xi : \mathbb{R}_+ \mapsto \mathbb{X}$. Пусть $\pi_t(\xi) = \xi(t)$ – значение процесса в момент t, $\theta_t(\xi)$ – оператор сдвига: $\theta_t(\xi)(s) = (\xi)(t+s)$ $(s, t \in \mathbb{R}_+)$. В дальнейшем нас будут интересовать интервалы постоянства траектории ξ. Пусть $R_t^-(\xi)$ и $R_t^+(\xi)$ – длины левой и правой частей интервала постоянства траектории ξ, накрывающего точку t; если такого интервала не существует, принимаем $R_t^-(\xi) = R_t^+(\xi) = 0$.

Рассмотрим распределение $P_x^t(B) = P_x(\theta_t^{-1}B)$ $(B \in \mathcal{F})$, где $\mathcal{F} = \mathcal{B}(\mathcal{D})$ – борелевская сигма-алгебра подмножеств пространства $\mathcal{D}$ относительно метрики Скорохода. Полумарковский процесс называется *эргодическим*, если для любого $x \in \mathbb{X}$ почти для всех $\xi \in \mathcal{D}$ относительно меры P_x существует не зависящий от траектории предел

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \int\limits_0^t f(\theta_t \xi)\, dt,$$

где f – ограниченная измеримая функция на $\mathcal{D}$. Мы будем рассматривать более простой вариант эргодичности, когда распределение P_x^t слабо сходится к некоторому распределению P^∞ одному и тому же для всех x.

Для марковского процесса мы имеем $P_x^t(B) = P_x(P_{\pi_t}(B))$, и, таким образом, сходимость к пределу меры P_x^t сводится к сходимости к пределу одномерного распределения $H_t(S\,|\,x) \equiv P_x(\pi_t \in S)$ $(S \in \mathcal{B}(\mathbb{X}))$. Очевидно, для слабо непрерывного семейства мер (P_x) марковского процесса из слабой сходимости $H_t(\cdot\,|\,x) \xrightarrow{w} H_\infty$ следует:

$$P_x^t(f) \to \int\limits_{\mathbb{X}} P_y(f)\, H_\infty(dy),$$

где f – непрерывный ограниченный функционал на $\mathcal{D}$. Здесь и далее мы используем обозначение $\mu(\varphi; S)$ для интеграла от функции $\varphi(x)\, I_S(x)$ по мере $\mu(dx)$, опуская первый аргумент, если $\varphi \equiv 1$, и опуская второй аргумент, если S – это все пространство, на котором задана мера.

Для полумарковского процесса фиксированный момент времени не является моментом регенерации (т.е. моментом остановки, относительно которого выполняется марковское свойство), и предыдущие рассуждения не применимы. Однако для любого $t \in \mathbb{R}_+$ можно сконструировать последовательность моментов регенерации этого процесса, которая сходится сверху к функции $t+R_t^+$. Отсюда следует, что, если семейство мер (P_x) полумарковского процесса слабо непрерывно, то $t + R_t^+$ является моментом регенерации для этого процесса. С другой стороны, для некоторых классов полумарковских процессов пара (π_t, R_t^-) является марковским процессом (см., например, Гихман и Скороход [1]). Учитывая особую роль процессов R_t^- и R_t^+, мы будем исследовать трехмерное распределение

$$G_t(S \times A_1 \times A_2\,|\,x) = P_x(\pi_t \in S,\ R_t^- \in A_1,\ R_t^+ \in A_2)$$
$$(A_1, A_2 \in \mathcal{B}(\mathbb{R}_+)).$$

Очевидно, мера P_x^t для полумарковского процесса со слабо непрерывным семейством мер (P_x) слабо сходится к пределу, если для любого $x \in \mathbb{X}$ при $t \to \infty$ трехмерное распределение $G_t(\cdot \,|\, x)$ слабо сходится к некоторому распределению G_∞ одному и тому же для всех x.

Для любого подмножества $G \subset \mathbb{X}$ мы обозначаем $\sigma_G(\xi) = \inf\{t \geq 0 : \xi(t) \notin G\}$ – момент первого выхода из множества G. Мы рассматриваем множество $\mathcal{T}$ моментов остановок относительно натуральной фильтрации $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$, где $\mathcal{F}_t$ – сигма-алгебра подмножеств множества $\mathcal{D}$, порожденная отображениями π_s $(s \leq t)$. Мы используем обозначение $(\forall \tau_1, \tau_2 \in \mathcal{T})$

$$\tau_1 \dot{+} \tau_2 = \begin{cases} \infty, & \tau_1 = \infty, \\ \tau_1 + \tau_2 \circ \theta_{\tau_1}, & \tau_1 < \infty. \end{cases}$$

Пусть $\mathfrak{A}$ – множество открытых подмножеств пространства $\mathbb{X}$. Каждому полумарковскому процессу однозначно соответствует согласованное семейство (F_Δ) $(\Delta \in \mathfrak{A})$ полумарковских переходных функций

$$F_\Delta(A \times S \,|\, x) \equiv P_x(\sigma_\Delta \in A \cap [0, \infty),\, \pi_{\sigma_\Delta} \in S).$$

Пусть $\delta = (\Delta_1, \Delta_2, \dots)$ – последовательность открытых множеств. Она определяет последовательность моментов остановки (σ_δ^n) : $\sigma_\delta^1 = \sigma_{\Delta_1}$,

$$\sigma_\delta^{n+1} = \sigma_\delta^n \dot{+} \sigma_{\Delta_{n+1}} \quad (n \geq 1).$$

Последовательность δ называется выводящей, если для любой функции ξ $\sigma_\delta^n(\xi) \to \infty$.

Определим последовательность итерированных ядер (F_δ^n) $(n \geq 0)$, соответствующих последовательности δ: $F_\delta^1 = F_{\Delta_1}$,

$$F_\delta^{n+1}([0, t) \times S \,|\, x) = \int_{\mathbb{X}} \int_0^t F_{\Delta_{n+1}}([0, t - s) \times S \,|\, y)\, F_\delta^n(ds \times dy \,|\, x) \quad (t > 0),$$

а также $F_\delta^0([0, t) \times S \,|\, x) = I_{[0,t) \times S}(0, x)$, где I_S – индикаторная функция множества S. Примером выводящей последовательности, составленной из элементов счетного открытого покрытия $\mathfrak{A}_1$ пространства $\mathbb{X}$, будет любая последовательность, в которой для любого $\Delta \in \mathfrak{A}_1$ и для любого $n \in \mathbb{N}$ существует $m > n$ такое, что

$\Delta_m = \Delta$. Пусть $\Delta^{-r} = \{x \in \Delta : B(x,r) \subset \Delta\}$, где $B(x,r)$ – открытый шар с центром x и радиусом r.

Условия согласования, достаточные для существования полумарковского процесса, даются следующей теоремой, которая будет использована при построении ассоциированного марковского процесса.

Теорема 1. *Для того, чтобы для априори заданного семейства переходных функций* (F_Δ) *существовал определяющий их полумарковский процесс, достаточно, чтобы выполнялись следующие три условия:*

1. *для любых* $\Delta_1, \Delta_2 \in \mathfrak{A}$ *таких, что* $\Delta_1 \subset \Delta_2$, *справедливо*

$$F_{\Delta_2}([0,t) \times S \,|\, x) = \int_{\mathbb{X}} \int_0^t F_{\Delta_2}([0,t-s) \times S \,|\, y) F_{\Delta_1}(ds \times dy \,|\, x) \ (t > 0),$$

2. *для любой выводящей последовательности* δ *справедливо*

$$F_\delta^n([0,t) \times \mathbb{X} \,|\, x) \to 0 \quad (n \to \infty),$$

3. $(\forall \Delta \in \mathfrak{A})$ $(\forall \varepsilon > 0)$ $(\forall x \in \Delta)$

$$\int_{\mathbb{X}} F_\Delta([\varepsilon,\infty) \times \mathbb{X} \,|\, y) \, F_{\Delta^{-r}}(\mathbb{R}_+ \times dy \,|\, x) \to 0 \quad (r \to 0).$$

Доказательство см. [4].

3. Эргодичность и стационарное

Рассмотрим переходную функцию $F(dt \times dx_1 \,|\, x)$ ступенчатого полумарковского процесса. Пусть $(\forall x \in \mathbb{X})$ $F(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{X} \,|\, x) = 1$, F^n – n-я итерация ядра $F \equiv F^1$. Маргинальное ядро $H(dy \,|\, x) = F(\mathbb{R}_+ \times dy \,|\, x)$ является переходной функцией марковской цепи, которую мы называем *вложенной марковской цепью* данного полумарковского процесса. Марковская цепь называется *эргодической*, если при любом $x \in \mathbb{X}$

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} H^k(\cdot \,|\, x) \xrightarrow{w} H^\infty,$$

где H^k – k-я итерация ядра $H \equiv H^1$, H^∞ – некоторая вероятностная мера на $\mathbb{X}$, для которой выполняется условие стационарности:

$$H^\infty(A) = \int\limits_{\mathbb{X}} H(A \,|\, x_1)\, H^\infty(dx_1) \quad (A \in \mathcal{B}(\mathbb{X})).$$

Пусть

$$U(A \times S \,|\, x) = \sum_{n=1}^{\infty} F^n(A \times S \,|\, x).$$

Обозначим $Q^n(A \,|\, x) = F^n(A \times \mathbb{X} \,|\, x)$ $(n \geq 1,\ A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}_+))$ и $Q \equiv Q^1$. Пусть $q_n(t \,|\, x)$ $(t \geq 0)$ – плотность абсолютно непрерывной составляющей меры $Q^n(\cdot \,|\, x)$. Семейство распределений $(Q^n(\cdot \,|\, x))$ $(x \in \mathbb{X})$ называется *несингулярным* относительно меры ℓ на $\mathbb{X}$, если

$$\int\limits_{\mathbb{X}} \int\limits_0^\infty q_n(t \,|\, x)\, dt\, \ell(dx) > 0.$$

Обозначим $M = \int_{\mathbb{X}} \int_0^\infty t\, Q(dt \,|\, x)\, H^\infty(dx)$. Для ступенчатого полумарковского процесса справедлива следующая теорема.

Теорема 2. *Пусть вложенная марковская цепь данного полумарковского процесса является эргодической со стационарным вероятностным распределением H^∞. Пусть справедливо условие $0 < M < \infty$ и к тому же существует $n \geq 1$ такое, что семейство распределений $(Q^n(\cdot \,|\, x))$ несингулярно относительно меры H^∞. Пусть для измеримой вещественной функции ψ, заданной на $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{X}$, выполняются следующие условия:*

1. $H_*^\infty\{x \in \mathbb{X} : \sup\limits_{t \geq 0} \int\limits_{\mathbb{X}} \int\limits_0^t \psi(t-s, y)\, U(ds \times dy \,|\, x) < \infty\} > 0,$

   где H_*^∞ – внутренняя мера меры H^∞,
2. $\lim\limits_{t \to \infty} \psi(t, x) = 0$ *почти для всех x относительно H^∞,*
3. $\int\limits_{\mathbb{X}} \int\limits_0^\infty \psi(t, x)\, dt\, H^\infty(dx) < \infty,$
4. *семейство $\mathcal{B}(\mathbb{X})$-измеримых функций $(\psi(t, \cdot))$ $(t \geq 0)$ имеет*

H^∞-интегрируемую мажоранту. Тогда справедливо

$$\lim_{t\to\infty}\int_{\mathbb{X}}\int_0^t \psi(t-s,y)\,U(ds\times dy\,|\,x) =$$

$$\frac{1}{M}\int_{\mathbb{X}}\int_0^\infty \psi(t,y)\,dt\,H^\infty(dy). \tag{1}$$

Доказательство см. Шуренков [10, с. 127].

Вернемся к рассмотрению полумарковского процесса общего вида. Согласно результатам Шуренкова [10] для доказательства эргодичности процесса достаточно обнаружить вложенный в него подходящий марковский процесс восстановления ("марковское вмешательство случая"). Пусть $\tau \equiv \tau_1$ – момент регенерации полумарковского семейства вероятностных мер. Тогда любой из последовательности итерированных моментов остановки (τ_n) $(\tau_{n+1} = \tau_n\dot{+}\tau,\ n \geq 1)$ также является моментом регенерации. Для применения теоремы Шуренкова необходимо потребовать от этой последовательности, чтобы при любом x P_x – почти наверное $\tau_n < \infty$ и $\tau_n \to \infty$. Так будет, например, если $\tau = \sigma_A\dot{+}\sigma_B$, где A и B – два открытых подмножества множества $\mathbb{X}$ таких, что $\mathbb{X}\setminus A \subset B$. Заметим, что альтернирующая последовательность множеств $(A, B, A, B, \ldots)$ является частным случаем выводящей последовательности. Таким образом, если все τ_n конечны, то последовательность пар (τ_n, π_{τ_n}) $(n \geq 0, \tau_0 = 0)$ – образует марковский процесс восстановления. Предположим, что полумарковская переходная функция $F_\tau(A\times S\,|\,x) \equiv P_x(\tau \in A,\ \pi_\tau \in S)$ и ее производные ядра $F_{\tau_n} \equiv F_\tau^n$, $H_{\tau_n} \equiv H_\tau^n$, Q_{τ_n} удовлетворяют условиям теоремы 2 с предельным распределением H_τ^∞ и средним значением длины интервала между соседними моментами регенерации

$$M_\tau = \int_{\mathbb{X}}\int_0^\infty t\,Q_\tau(dt\,|\,x)\,H_\tau^\infty(dx).$$

Рассмотрим трехмерное распределение $G_t(\cdot\,|\,x)$. Имеем

$$G_t(S\times A_1\times A_2\,|\,x) =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} P_x(\pi_t \in S,\, R_t^- \in A_1,\, R_t^+ \in A_2,\, \tau_k \le t < \tau_{k+1}) =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^t P_x(\tau_k \in ds,\, \pi_t \in S,\, R_t^- \in A_1,\, R_t^+ \in A_2,\, t < s + \tau \circ \theta_{\tau_k}) =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^t P_x(\tau_k \in ds,\, \pi_{t-s} \circ \theta_{\tau_k} \in S,$$

$$R_{t-s}^- \circ \theta_{\tau_k} \in A_1,\, R_{t-s}^+ \circ \theta_{\tau_k} \in A_2,\, t-s < \tau \circ \theta_{\tau_k}) =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^t P_x(P_{\pi(\tau_k)}(\pi_{t-s} \in S,\, R_t^- \in A_1,\, R_t^+ \in A_2,\, t-s < \tau);\, \tau_k \in ds) =$$

$$= \int_{\mathbb{X}} \int_0^t P_y(\pi_{t-s} \in S,\, R_{t-s}^- \in A_1,\, R_{t-s}^+ \in A_2,\, t-s < \tau)\, U(ds \times dy \,|\, x).$$

Рассмотрим подынтегральную функцию

$$\psi_\tau(t,y) = P_y(\pi_t \in S,\, R_t^- \in A_1,\, R_t^+ \in A_2,\, t < \tau)$$

и проверим выполнение для нее условий теоремы 2. Это ограниченная функция, стремящаяся к нулю при $t \to \infty$. Так как $\psi_\tau(t,y) \le P_y(t<\tau)$, то интеграл, входящий в условие 1, не больше единицы, а интеграл от ψ по t не больше $m_\tau(y) \equiv P_y(\tau)$ и поэтому H_τ^∞ - почти всюду конечен. Следовательно, существует предел вероятности $G_t(S \times A_1 \times A_2 \,|\, x)$ при $t \to \infty$ и этот предел равен

$$G_\infty(S \times A_1 \times A_2) = \frac{1}{M_\tau} \int_{\mathbb{X}} \int_0^\infty \psi_\tau(t,x)\, dt\, H_\tau^\infty(dx).$$

Ближайшая наша цель – выразить интеграл $\int_0^\infty \psi_\tau(t,x)\, dt$ в терминах разложения Леви переходной производящей функции полумарковского процесса. Обозначим $\mathcal{F}^\circ$ – σ-алгебра подмножеств множества $\mathcal{D}$, порожденная разбиением этого множества на классы эквивалентности функций, отличающихся друг от друга только заменой времени (мы говорим, что функции такого класса имеют одну и ту же последовательность состояний, или след).

Известно (см. [8]), что для любого $\lambda > 0$ и ограниченной функции φ справедливо представление переходной производящей функции f_τ:

$$f_\tau(\lambda,\, \varphi \,|\, x) \equiv P_x(\exp(-\lambda\tau)\,\varphi(\pi_\tau)) = P_x(\exp(-b(\lambda,\tau))\,\varphi(\pi_\tau)),$$

где $b(\lambda,\tau)$ – $\mathcal{F}^\circ$ – измеримый аддитивный функционал вида

$$b(\lambda,\tau) = \lambda\, a_\tau + \int\limits_{0+}^{\infty} (1 - e^{-\lambda u})\, n_\tau(du) + B(\lambda,\tau),$$

где a_τ – $\mathcal{F}^\circ$ - измеримый нетрицательный аддитивный функционал; $n_\tau(B)$ $(B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}_+))$ – $\mathcal{F}^\circ$ - измеримый аддитивный функционал, являющийся мерой по аргументу B (мера Леви). Мера n_τ является интенсивностью пуассоновского поля $\mathcal{P}_\tau$ на последовательности состояний, определяющего положения и длины "пуассоновских" интервалов постоянства. Аддитивный функционал $B(\lambda,\tau)$ определяется "условно фиксированными" интервалами постоянства и при заданной мере P_x имеет вид

$$B(\lambda,\tau) = -\sum_{\tau_i<\tau} \log P_x(e^{-\lambda\,\sigma_0} \circ \theta_{\tau_i} \,|\, \mathcal{F}^\circ),$$

где $(\tau_i \dot{+} \sigma_0)$ – конечный или счетный набор $\mathcal{F}^\circ$ – измеримых моментов остановки относительно расширенного потока сигма-алгебр, σ_0 – момент первого выхода из начальной точки. В наиболее простом случае, который мы рассматриваем в качестве примера в конце статьи, сами τ_i являются моментами остановки, а именно, моментами достижения некоторых точек пространства состояний. Времена пребывания в этих точках $\sigma_0 \circ \theta_{\tau_i}$ – независимые случайные величины, распределения которых зависят от $i \in \mathbb{N}$.

Из предыдущего разложения производящей функции вытекает представление Леви для момента остановки τ (см. [2])

$$\tau = a_\tau + \int\limits_{0+}^{\infty} u\,\mathcal{P}_\tau(du) + \sum_{\tau_i<\tau} \sigma_0 \circ \theta_{\tau_i}\,. \qquad (3)$$

Далее везде кроме заключительного примера мы будем предполагать, что условно фиксированные интервалы постоянства отсутствуют.

Рассмотрим интеграл

$$G_\infty(\varphi; A_1 \times A_2) \equiv \int\limits_{\mathbb{X}} \varphi(x)\, G_\infty(dx \times A_1 \times A_2),$$

где φ – непрерывная ограниченная вещественная функция на $\mathbb{X}$. Для этого интеграла справедливо представление

$$G_\infty(\varphi;\, A_1 \times A_2) = \frac{1}{M_\tau} \int\limits_{\mathbb{X}} \int\limits_0^\infty \widetilde{\psi}_\tau(t, x)\, dt\, H_\tau^\infty(dx),$$

где $\widetilde{\psi}_\tau(t, x) = P_x(\varphi(\pi_t);\ R_t^- \in A_1,\ R_t^+ \in A_2,\ t < \tau)$. Имеем

$$\int\limits_0^\infty \widetilde{\psi}_\tau(t, x)\, dt = P_x\Big(\int\limits_0^\tau \varphi(\pi_t)\, I_{A_1}(R_t^-)\, I_{A_2}(R_t^+)\, dt\Big).$$

Зависящий от траектории интервал $[0, \tau)$ мы разбиваем на конечное число N_d частей моментами остановки $\overline{\tau}_k$ так, чтобы на каждом из этих интервалов траектория не выходила из некоторого открытого множества малого диаметра d, своего для каждого интервала. Тогда и функция $\varphi(\pi_t)$ также мало меняется на этом интервале. Таким образом, предыдущая величина может быть найдена как предел сумм

$$P_x\Big(\sum_{k=1}^{N_d} \varphi(\pi_{\overline{\tau}_{k-1}}) \int\limits_{\overline{\tau}_{k-1}}^{\overline{\tau}_k} I_{A_1}(R_t^-)\, I_{A_2}(R_t^+)\, dt\Big).$$

Пользуясь представлением Леви (3) для моментов $\overline{\tau}_k$, мы можем записать интегралы в другом виде, по крайней мере, для двух частных случаев. Если $A_1 = A_2 = \{0\}$, то

$$\int\limits_{\overline{\tau}_k}^{\overline{\tau}_{k+1}} I_{A_1}(R_t^-)\, I_{A_2}(R_t^+)\, dt = a_{\overline{\tau}_{k+1}} - a_{\overline{\tau}_k}.$$

Если $A_1 = (r, \infty)$ и $A_2 = (s, \infty)$, то

$$\int\limits_{\overline{\tau}_k}^{\overline{\tau}_{k+1}} I_{A_1}(R_t^-)\, I_{A_2}(R_t^+)\, dt = \int\limits_{s+r}^\infty (u - s - r)\, \mathcal{P}_{[\overline{\tau}_k, \overline{\tau}_{k+1})}(du),$$

где $\mathcal{P}_{[\overline{\tau}_k,\overline{\tau}_{k+1})}(du) = \mathcal{P}_{\overline{\tau}_{k+1}}(du) - \mathcal{P}_{\overline{\tau}_k}(du)$. Пользуясь полумарковским свойством процесса, можно заменить пуассоновскую меру на ее меру интенсивности. В результате мы можем записать сумму в виде $P_x(\sum_{k=1}^{N_d} \varphi(\pi_{\overline{\tau}_{k-1}})\, c_{[\overline{\tau}_k,\overline{\tau}_{k+1})})$, где $c_{[\overline{\tau}_k,\overline{\tau}_{k+1})} = c_{\overline{\tau}_{k+1}} - c_{\overline{\tau}_k}$ и

$$c_\tau = \begin{cases} a_\tau, & A_1 = A_2 = \{0\}, \\ \int_{r+s}^\infty (u-r-s)\, n_\tau(du), & A_1 = (r,\infty),\, A_2 = (s,\infty). \end{cases}$$

Переходя к пределу при $d \to 0$, мы получаем представление подынтегрального выражения в виде левого криволинейного интеграла по $\mathcal{F}^\circ$-измеримому аддитивному функционалу c_τ (см. [9]):

$$\int_0^\infty \widetilde{\psi}_\tau(t,x)\, dt = P_x((\ell)\int_0^\tau \varphi(\pi_{\tau_1})\, dc_{\tau_1}).$$

Более простой вид это представление принимает, если сами аддитивные функционалы a_τ и $n_\tau(B)$ представимы в виде криволинейных интегралов по одному и тому же аддитивному функционалу. Нетрудно доказать, что функция

$$A_\lambda \mathbb{I}\,(x) \equiv \lim_{\Delta\downarrow x} P_x(\exp(-\lambda\, \sigma_\Delta) - 1)/P_x(\sigma_\Delta)$$

(ламбда-характеристический оператор от единицы) может быть представлена в форме Леви

$$-A_\lambda \mathbb{I}\,(x) = \lambda\alpha(x) + \int_{0+}^\infty (1 - e^{-\lambda\, u})\, \nu(du \,|\, x),$$

где $\alpha(x)$ – некоторая неотрицательная функция и $\nu(du\,|\,x)$ – некоторое семейство мер, зависящих от $x \in \mathbb{X}$. Нетрудно привести достаточные условия, при которых для функции $A_\lambda\mathbb{I}$ непрерывной в некоторой окрестности точки x имеет место представление

$$b(\lambda,\tau) = (\ell)\int_0^\tau (-A_\lambda \mathbb{I} \circ \pi_{\tau_1})\, d\mu_{\tau_1}, \tag{4}$$

где μ – аддитивный функционал: $\mu_\tau = a_\tau + \int_0^\infty u\, n_\tau(du)$. В дальнейшем мы предположим, что это представление справедливо и, таким образом,

$$b(\lambda,\tau)=(\ell)\int_0^\tau(\lambda\alpha(\pi_{\tau_1})+\int_{0+}^\infty(1-e^{-\lambda u})\,\nu(du\,|\,\pi_{\tau_1}))\,d\mu_{\tau_1}. \qquad (5)$$

В этом случае

$$G_\infty(\varphi;\,A_1\times A_2)=\frac{1}{M_\tau}\int_{\mathbb{X}}P_x((\ell)\int_0^\tau\varphi(\pi_{\tau_1})\,\gamma(\pi_{\tau_1})\,d\mu_{\tau_1})\,H_\tau^\infty(dx), \qquad (6)$$

где $\gamma(x)=\begin{cases}\alpha(x), & A_1=A_2=\{0\},\\ \int_{r+s}^\infty(u-r-s)\,\nu(du\,|\,x), & A_1=(r,\infty),\,A_2=(s,\infty).\end{cases}$

Таким образом, трехмерное стационарное распределение полумарковского процесса выражается через одномерное:

$$G_\infty(\varphi;\,A_1\times A_2)=G_\infty(\varphi\,\gamma;\,\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}_+).$$

Мы получили стационарное распределение, характеризующее (вместе с набором вероятностных мер (P_x)) стационарную меру P^∞ полумарковского процесса. Чтобы придать этому распределению более законченный вид и освободиться от формальной зависимости от выбора τ, мы построим марковский процесс, отличающийся от данного процесса только заменой времени (ассоциированный марковский процесс) и выразим трехмерное стационарное распределение полумарковского процесса через одномерное стационарное распределение марковского процесса.

4. Ассоциированный марковский процесс

Наша очередная задача состоит в построении марковского процесса с тем же случайным следом, что и у исходного полумарковского процесса. Иными словами, меры исходного полумарковского процесса и построенного марковского процесса должны совпадать на сигма-алгебре $\mathcal{F}^\circ$. Для этого, очевидно, достаточно в исходном процессе изменить распределение хода времени относительно следа, не меняя самого следа. Рассмотрим семейство ядер, зависящих от параметра $\lambda>0$, вида

$$\overline{f}_G(\lambda,S\,|\,x)\equiv P_x(\exp(-\overline{b}(\lambda,\tau)),\pi_\tau\in S)\quad(G\in\mathfrak{A},S\in\mathcal{B}(\mathbb{X}),x\in\mathbb{X}),$$

где $\tau = \sigma_G$, $\overline{b}(\lambda, \tau)$ имеет вид λA_τ, A_τ – некоторый неотрицательный $\mathcal{F}^\circ$ – измеримый аддитивный функционал. Полумарковский процесс с таким параметром разложения Леви, если он существует, не содержит интервалов постоянства (его мера Леви равна нулю). Примером такого аддитивного функционала служит

$$\mu_\tau = a_\tau + \int\limits_{0+}^{\infty} u\, n_\tau(du).$$

Мы получим полумарковский процесс с этим аддитивным функционалом в качестве предела полумарковских процессов с аддитивными функционалами вида $b(\lambda_k, \tau)/\lambda_k$, $(\lambda_k > 0,\ \lambda_k \to 0)$. Таким образом, принимаем

$$b^{(k)}(\lambda, \tau) = \lambda\, b(\lambda_k, \tau)/\lambda_k. \tag{7}$$

Предложение 1. *Семейство ядер $f_G^{(k)}(\lambda, S \,|\, x)$ с параметром (7) является семейством переходных производящих функций некоторого полумарковского процесса.*

Доказательство. Очевидно, ядро $f_G^{(k)}(\lambda, S \,|\, x)$ с параметром (7) является преобразованием Лапласа некоторого полумарковского ядра $F_G^{(k)}(dt \times S \,|\, x)$. Для доказательства предложения достаточно проверить, что семейство ядер $(F_G^{(k)})$ удовлетворяет условиям теоремы 1. Покажем, что система ядер $(f_G^{(k)})$ удовлетворяет уравнению Маркова для переходных производящих функций. Действительно, для $G \subset G_1$ и $\tau_1 = \sigma_{G_1}$ имеем

$$f_{G_1}^{(k)}(\lambda, \varphi \,|\, x) = P_x(\exp(-\lambda\, b(\lambda_k, \tau\dot{+}\tau_1)/\lambda_k)\, (\varphi \circ \pi_{\tau\dot{+}\tau_1})) =$$

$$= P_x(\exp(-\lambda\, (b(\lambda_k, \tau) + b(\lambda_k, \tau_1) \circ \theta_\tau)/\lambda_k)\, (\varphi \circ \pi_{\tau\dot{+}\tau_1})) =$$

$$= P_x(P_{\pi_\tau}(\exp(-\lambda\, b(\lambda_k, \tau_1)/\lambda_k)\, (\varphi \circ \pi_{\tau_1}))\, \exp(-\lambda\, b(\lambda_k, \tau)/\lambda_k)) =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{X}} f_{G_1}^{(k)}(\lambda, \varphi \,|\, x_1)\, f_G^{(k)}(\lambda, dx_1 \,|\, x).$$

Отсюда следует справедливость условия 1. Следовательно для любого $x \in \mathbb{X}$ определено проективное семейство мер на подалгебрах сигма-алгебры $\mathcal{F}$ (см. [4]). Условие 2 эквивалентно условию

$f^{(k)}_{\tau_n}(\lambda, \mathbb{X} \,|\, x) \to 0$ при $n \to \infty$, где $\tau_n = \sigma^n_\delta$, δ – выводящая последовательность открытых множеств, $\lambda > 0$, $x \in \mathbb{X}$. Из свойства выводящей последовательности следует, что $(\forall x \in \mathbb{X})$ $(\forall \lambda > 0)$ P_x-почти наверное $\exp(-b(\lambda, \tau_n)) \to 0$ $(n \to \infty)$. Следовательно, P_x-почти наверное стремится к бесконечности хотя бы одна из трех компонент: a_{τ_n}, $\int_{0+}^1 u\, n_{\tau_n} du$, $\int_1^\infty n_{\tau_n} du$. Отсюда следует, что функция $b^{(k)}(\lambda, \tau_n)$ P_x-почти наверное стремится к бесконечности:

$$b^{(k)}(\lambda, \tau_n) \geq \lambda a_{\tau_n} + \frac{\lambda}{\lambda_k}(1 - e^{-\lambda_k})\Big(\int\limits_{0+}^{1} u\, n_{\tau_n}(du) + \int\limits_{1}^{\infty} n_{\tau_n}(du)\Big),$$

т.е. условие 2 выполняется. Условие 3 эквивалентно условию: $(\forall G \in \mathfrak{A}_1)$ $(\forall \lambda > 0)$ $(\forall x \in G)$

$$\int\limits_{\mathbb{X}} f^{(k)}_G(\lambda, \mathbb{X} \,|\, x_1)\, f_{G^{-r}}(0, dx_1 \,|\, x) \to 1 \quad (r \to 0),$$

где $\mathfrak{A}_1 \subset \mathfrak{A}$ – некоторое достаточно богатое семейство открытых множеств. Мы имеем

$$1 - \int\limits_{\mathbb{X}} f^{(k)}_G(\lambda, \mathbb{X} \,|\, x_1)\, f_{G^{-r}}(0, dx_1 \,|\, x) =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{X}} (1 - f^{(k)}_G(\lambda, \mathbb{X} \,|\, x_1))\, f_{G^{-r}}(0, dx_1 \,|\, x) =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{X}} P_{x_1}(1 - \exp(-b^{(k)}(\lambda, \sigma_G))\, f_{G^{-r}}(0, dx_1 \,|\, x).$$

При $\lambda < \lambda_k$, используя неравенство

$$(1 - \exp(-\lambda u))/\lambda > (1 - \exp(-\lambda_k u))/\lambda_k,$$

получаем $b^{(k)}(\lambda, \sigma_G) \leq b(\lambda, \sigma_G)$, откуда следует выполнение требуемого свойства. При $\lambda > \lambda_k$ используем неравенство

$$1 - \exp(-\lambda\, u/\lambda_k) \leq \lambda\,(1 - \exp(-u))/\lambda_k$$

и также получаем требуемое свойство, так как оно выполняется для исходного процесса для достаточно богатого класса открытых множеств. Следовательно, построенное проективное семейство мер для любого $x \in \mathbb{X}$ продолжается до вероятностной меры

$P_x^{(k)}$ на $(\mathcal{D},\mathcal{F})$, и семейство этих мер является полумарковским. $\square$

Рассмотрим семейство полумарковских переходных производящих функций

$$\overline{f}_G(\lambda,S\,|\,x)\equiv P_x(\exp(-\lambda\mu_\tau);\,\pi_\tau\in S)\quad (G\in\mathfrak{A},S\in\mathcal{B}(\mathbb{X}),x\in\mathbb{X}).$$

Предложение 2. *Семейство ядер $\overline{f}_G(\lambda,S\,|\,x)$ является семейством переходных производящих функций некоторого полумарковского процесса.*

Доказательство. Это семейство производящих функций для любого $x\in\mathbb{X}$ определяет проективное семейство вероятностных мер $(\overline{P}_x\circ(\beta_{\sigma_r^0},\dots,\beta_{\sigma_r^n})^{-1})$ $(r>0,\,n\geq 1)$, где

$$\beta_\tau(\xi)=\begin{cases}\overline{\infty}, & \tau(\xi)=\infty,\\ (\tau(\xi),\pi_\tau(\xi)), & \tau(\xi)<\infty.\end{cases}$$

Так как при $k\to\infty$ P_x – почти наверное $b^{(k)}(\lambda,\tau)\to\lambda\,\mu_\tau$, то распределение $f_G^{(k)}(\lambda,\cdot\,|\,x)$ слабо сходится к $\overline{f}_G(\lambda,\cdot\,|\,x)$ и, следовательно, последовательность распределений $(P_x^{(k)}\circ(\beta_{\sigma_r^0},\dots,\beta_{\sigma_r^n})^{-1})$ слабо сходится к $(\overline{P}_x\circ(\beta_{\sigma_r^0},\dots,\beta_{\sigma_r^n})^{-1})$. На основании лемм 19 и 20 из работы [5] из этой сходимости следует, во-первых, слабая компактность семейства распределений $(P_x^{(k)})$, во-вторых, слабая сходимость этой последовательности к пределу $\overline{P}_x$ (проективный предел семейства распределений $(\overline{P}_x\circ(\beta_{\sigma_r^0},\dots,\beta_{\sigma_r^n})^{-1})$), который является вероятностной мерой на $\mathcal{D}$, а семейство этих мер согласовано как семейство распределений полумарковского процесса. $\square$

По нашему построению полученное полумарковское семейство мер определяет процесс без интервалов постоянства. Наша гипотеза состоит в том, что такой процесс является марковским без каких-либо дополнительных условий. В настоящее время доказательство этой гипотезы нам не известно. Чтобы доказать марковость построенного процесса, мы используем некоторое предположение о регулярности исходного процесса.

Теорема 3. *Пусть для любого $\lambda>0$, $G\in\mathfrak{A}$ и ограниченной непрерывной функции φ на $\mathbb{X}$ переходная производящая функция $f_G(\lambda,\varphi\,|\,\cdot)$*

непрерывна. Тогда преобразованные полумарковские процессы, построенные в предложениях 1 и 2, являются марковскими процессами.

Доказательство. Из условий теоремы следует, что (P_x) – слабо непрерывное семейство (см. [6]). Докажем, что таковым же является и полумарковское семейство мер $(\overline{P}_x)$ (то же доказательство справедливо для семейства $(P_{(k)})$). Из представления Леви для момента первого выхода преобразованного процесса из множества G справедливо, что $\overline{P}_x$ - почти наверное этот момент равен μ_{σ_G}. С другой стороны, также по формуле Леви, $\sigma_G = a_{\sigma_G} + \int_{0+}^{\infty} u\,\mathcal{P}(du, \sigma_G)$. В этом выражении два последних слагаемых монотонно зависят от G. В частности, при замене G на G^{-r} (G^{+r}) оба они возрастают (убывают) при $r \downarrow 0$. Тот же вывод справедлив относительно интенсивности меры Пуассона, т.е. меры Леви $n(du, \sigma_G)$, а также аддитивного функционала $b(\lambda, \sigma_G)$. Следовательно, $\overline{P}_x(\Pi(G)) = 1$ для тех же G, для которых $P_x(\Pi(G)) = 1$, где $\Pi(G)$ – множество траекторий ξ, правильно выходящих из G (см. [6]). То же относится к любой конечной последовательности открытых множеств G_i и множеству функций, правильно выходящих из этих множеств. Мы получили, что семейство функций вида

$$\prod_{i=1}^{n} \exp(-\lambda\mu_{\tau_i})\varphi_i(\pi_{\tau_i}) \quad (\tau_i = \sigma_{G_1,\ldots,G_i}, \varphi_i \in \mathcal{C}_0(\mathbb{X}))$$

непрерывно на множестве полной меры. И следовательно, интеграл от этой функции по мере P_x непрерывен как функция от x. Отсюда следует слабая непрерывность семейства $(\overline{P}_x)$. Далее для выводящей последовательности δ и $t > 0$ определим момент остановки τ_δ^t:

$$\tau_\delta^t(\xi) = \sigma_\delta^k(\xi) \Leftrightarrow \sigma_\delta^{k-1}(\xi) < t \le \sigma_\delta^k(\xi),$$

который является моментом регенерации для полумарковского семейства $(\overline{P}_x)$. Кроме того, последовательность таких моментов остановки, построенных для δ с убывающими рангами, когда $\operatorname{rank}\delta \to 0$, $\overline{P}_x$-почти наверное сходится к t. Отсюда следует, что фиксированный момент $t \in \mathbb{R}_+$ является моментом регенерации семейства $(\overline{P}_x)$, т.е. это семейство является марковским. □

Из возможности построения ассоциированного марковского процесса, для которого любой внутренний момент остановки τ совпадает с μ_τ – условным математическим ожиданием τ относительно следа в исходном полумарковском процессе, – вытекают интересные следствия для распределения величины μ_τ. Известно, что для марковского процесса отношение $P_x((\sigma_G)^2)/P_x(\sigma_G)$ стремится к нулю при $G \downarrow x$. Для полумарковского процесса, не являющегося марковским, это не так (можно доказать только ограниченность этого отношения). Однако, для полумарковского процесса справедливо стремление к нулю отношения $P_x((\mu_{\sigma_G})^2)/P_x(\mu_{\sigma_G})$, так как для ассоциированного марковского процесса $\mu_{\sigma_G} = \sigma_G$. Отсюда, в частности, следует справедливость представления (4).

Очевидно, если одномерные стационарные распределения такого ассоциированного марковского процесса и исходного полумарковского процесса существуют, то они совпадают.

5. Марковское представление стационарного распределения

Рассмотрим исходное полумарковское семейство мер (P_x) и марковские семейства мер $(P_x^{(k)})$ и $(\overline{P}_x)$, построенные в предыдущем разделе. Математические ожидания момента остановки τ относительно этих мер можно найти путем дифференцирования соответствующих преобразований Лапласа по параметру λ при $\lambda = 0$. Отсюда

$$m_\tau(x) = P_x(a_\tau + \int_{0+}^{\infty} u\, n_\tau(du)),$$

$$m_\tau^{(k)}(x) = P_x(a_\tau + \frac{1}{\lambda_k}\int_{0+}^{\infty}(1 - e^{\lambda_k u})\, n_\tau(du)),$$

$$\overline{m}_\tau(x) = P_x(\mu_\tau) = m_\tau(x).$$

Обозначим $\mu_\tau^{(k)} = P_x^{(k)}(\tau \,|\, \mathcal{F}^\circ)$ и $\overline{\mu}_\tau = \overline{P}_x(\tau \,|\, \mathcal{F}^\circ)$. Отсюда

$$\mu_\tau^{(k)} = a_\tau + \frac{1}{\lambda_k}\int_{0+}^{\infty}(1 - e^{\lambda_k u})\, n_\tau(du), \quad \overline{\mu}_\tau = \mu_\tau.$$

По предположению аддитивный функционал $\mu_\tau^{(k)}$ можно записать в виде левого криволинейного интеграла:

$$\mu_\tau^{(k)} = (\ell)\ \int_0^\tau (\alpha(\pi_{\tau_1}) + \frac{1}{\lambda_k}\int_{0+}^\infty (1 - e^{-\lambda_k u})\,\nu(du\,|\,\pi_{\tau_1}))\,d\mu_{\tau_1}.$$

По произвольности τ заключаем, что справедливо следующее правило замены аддитивного функционала:

$$d\mu_{\tau_1}^{(k)} = (\alpha(\pi_{\tau_1}) + \frac{1}{\lambda_k}\int_{0+}^\infty (1 - e^{-\lambda_k u})\,\nu(du\,|\,\pi_{\tau_1}))\,d\mu_{\tau_1},$$

$$d\mu_{\tau_1} = (\alpha(\pi_{\tau_1}) + \frac{1}{\lambda_k}\int_{0+}^\infty (1 - e^{-\lambda_k u})\,\nu(du\,|\,\pi_{\tau_1}))^{-1}\,d\mu_{\tau_1}^{(k)}.$$

Следовательно, полученное выше стационарное трехмерное распределение полумарковского процесса (6) можно представить в двух видах. Во-первых, это

$$G_\infty(\varphi;\,A_1 \times A_2) = \\ = \frac{1}{M_\tau}\int_{\mathbb{X}} P_x((\ell)\int_0^\tau \varphi(\pi_{\tau_1})\,\gamma(\pi_{\tau_1})\,\beta^{(k)}(\pi_{\tau_1})\,d\mu_{\tau_1}^{(k)})\,H_\tau^\infty(dx),$$

где $\beta^{(k)}(x) = (\alpha(x) + \frac{1}{\lambda_k}\int_{0+}^\infty (1 - e^{-\lambda_k u})\,\nu(du\,|\,x))^{-1}$. И во-вторых,

$$G_\infty(\varphi;\,A_1 \times A_2) = \frac{1}{M_\tau}\int_{\mathbb{X}} P_x((\ell)\int_0^\tau \varphi(\pi_{\tau_1})\,\gamma(\pi_{\tau_1})\,\overline{\mu}_{\tau_1})\,H_\tau^\infty(dx).$$

Так как криволинейный интеграл $\mathcal{F}^\circ$ – измерим, а P_x, $P_x^{(k)}$ и $\overline{P}_x$ совпадают на $\mathcal{F}^\circ$, то, переходя от криволинейного интеграла к обыкновенному, внутренние интегралы в этих представлениях можно представить как

$$P_x^{(k)}(\int_0^\tau \varphi(\pi_t)\,\gamma(\pi_t)\,\beta^{(k)}(\pi_t)\,dt), \quad \overline{P}_x(\int_0^\tau \varphi(\pi_t)\,\gamma(\pi_t)\,dt)$$

соответственно.

Предположим, что семейства мер $(P_x^{(k)})$ и $(\overline{P}_x)$ и функции $\psi^{(k)}(t,x)^{(k)} \equiv P_x^{(k)}(\varphi(\pi_t)\,\gamma(\pi_t)\,\beta^{(k)}(\pi_t))$ и $\overline{\psi}(t,x) \equiv \overline{P}_x(\varphi(\pi_t)\,\gamma(\pi_t))$ удовлетворяют условиям теоремы 2 при том же самом моменте остановки τ. Эти предположения, очевидно, затрагивают только ход времени относительно следа, а сам след остается неизменным. В частности, этим марковским процессам соответствует одна и та же вложенная марковская цепь со стационарным распределением H_τ^∞. Тогда существуют одномерные стационарные распределения $G_\infty^{(k)}$ и $\overline{G}_\infty$ построенных марковских процессов и интегралы по ним имеют вид

$$G_\infty^{(k)}(\varphi\,\gamma\,\beta^{(k)}) = \frac{1}{M_\tau^{(k)}} \int\limits_{\mathbb{X}} P_x^{(k)}(\int\limits_0^\tau \varphi(\pi_t)\,\gamma(\pi_t)\,\beta^{(k)}(\pi_t)\,dt)\,H_\tau^\infty(dx),$$

$$\overline{G}_\infty(\varphi\,\gamma) = \frac{1}{\overline{M}_\tau} \int\limits_{\mathbb{X}} \overline{P}_x(\int\limits_0^\tau \varphi(\pi_t)\,\gamma(\pi_t)\,dt)\,H_\tau^\infty(dx)$$

соответственно, где

$$M_\tau^{(k)} = \int\limits_{\mathbb{X}} m_\tau^{(k)}(x)\,H_\tau^\infty(dx),$$

$$\overline{M}_\tau = \int\limits_{\mathbb{X}} \overline{m}_\tau(x)\,H_\tau^\infty(dx) = M_\tau.$$

Отсюда следуют интересующие нас марковские представления стационарного распределения полумарковского процесса

$$G_\infty(\varphi;\,A_1\times A_2) = \frac{M_\tau^{(k)}}{M_\tau}\,G_\infty^{(k)}(\varphi\,\gamma\,\beta^{(k)}),$$

$$G_\infty(\varphi;\,A_1\times A_2) = \overline{G}_\infty(\varphi\,\gamma).$$

В данном случае нам нет нужды делать столь сильные предположения о марковских семействах мер, как в теореме 2. Мы докажем, что распределения $G_\infty^{(k)}$ и $\overline{G}_\infty$ уже являются стационарными распределениями построенных марковских процессов.

Лемма 1. *Для любого полумарковского семейства (P_x) со стационарным распределением H_τ^∞ вложенной марковской цепи, соответствующей моменту регенерации τ, для любого $n \ge 1$ и измеримой функции φ справедливо*

$$\int_{\mathbb{X}} \int_0^\infty P_x(\varphi(\pi_t);\, t < \tau_n)\, dt\, H_\tau^\infty(dx) =$$

$$= n \int_{\mathbb{X}} \int_0^\infty P_x(\varphi(\pi_t);\, t < \tau)\, dt\, H_\tau^\infty(dx),$$

в частности $M_{\tau_n} \equiv \int_{\mathbb{X}} P_x(\tau_n)\, H_\tau^\infty(dx) = n\, M_\tau$.

Доказательство. Имеем

$$\int_0^\infty P_x(\varphi(\pi_t);\, t < \tau_{n+1})\, dt =$$

$$= \int_0^\infty P_x(\varphi(\pi_t);\, t < \tau_n)\, dt + \int_0^\infty P_x(\varphi(\pi_t);\, \tau_n \le t < \tau_{n+1})\, dt.$$

Второй интеграл равен

$$\int_0^\infty \int_0^t \overline{P}_x(\varphi(\pi_t);\, \tau_n \in dt_1,\, t < t_1 + \tau \circ \theta_{\tau_n})\, dt.$$

Представляя под знаком интеграла $\pi_t = \pi_{t-t_1} \circ \theta_{\tau_n}$ и пользуясь условием регенерации для момента остановки τ_k, получаем

$$\int_0^\infty \int_0^t P_x(P_{\pi(\tau_n)}(\varphi(\pi_{t-t_1});\, t - t_1 < \tau);\, \tau_n \in dt_1)\, dt =$$

$$= \int_0^\infty \int_0^\infty P_x(P_{\pi(\tau_n)}(\varphi(\pi_t);\, t < \tau);\, \tau_n \in dt_1)\, dt =$$

$$= \int_0^\infty P_x(P_{\pi(\tau_n)}(\varphi(\pi_t);\, t < \tau))\, dt.$$

Интегрируя оба интеграла по x и пользуясь стационарностью меры H_τ^∞, получаем

$$\int\limits_{\mathbb{X}} \int\limits_0^\infty P_x(\varphi(\pi_t);\, t < \tau_{n+1})\, dt\, H_\tau^\infty(dx) =$$

$$\int\limits_{\mathbb{X}} \int\limits_0^\infty P_x(\varphi(\pi_t);\, t < \tau_n)\, dt\, H_\tau^\infty(dx) +$$

$$+ \int\limits_{\mathbb{X}} \int\limits_0^\infty P_x(\varphi(\pi_t);\, t < \tau)\, dt\, H_\tau^\infty(dx). \quad \square$$

Следующее предложение, сформулированное для $(\overline{P}_x)$, справедливо для любого марковского процесса, полученного из данного полумарковского с помощью замены времени, в частности, для $(P_x^{(k)})$.

Предложение 3. *Одномерное распределение $\overline{G}_\infty$ является стационарным распределением построенного марковского процесса.*

Доказательство. Для любой измеримой ограниченной функции φ и $h > 0$ справедливо

$$\int\limits_{\mathbb{X}} \overline{P}_x(\varphi(\pi_h))\, \overline{G}_\infty(dx) =$$

$$= \frac{1}{\overline{M}_\tau} \int\limits_{\mathbb{X}} \int\limits_0^\infty \overline{P}_x(\overline{P}_{\pi_t}(\varphi(\pi_h));\, t < \tau)\, dt\, H_\tau^\infty(dx).$$

По лемме 1 при любом $n \geq 1$ предыдущее выражение можно записать в виде

$$\frac{1}{n\, \overline{M}_\tau} \int\limits_{\mathbb{X}} \int\limits_0^\infty \overline{P}_x(\overline{P}_{\pi_t}(\varphi(\pi_h));\, t < \tau_n)\, dt\, H_\tau^\infty(dx).$$

По марковскому свойству внутренний интеграл равен

$$\int\limits_0^\infty \overline{P}_x(\varphi(\pi_{t+h});\, t < \tau_n)\, dt = \int\limits_0^\infty \overline{P}_x(\varphi(\pi_{t+h});\, t + h < \tau_n)\, dt + \varepsilon_1 =$$

$$= \int\limits_h^\infty \overline{P}_x(\varphi(\pi_t);\, t < \tau_n)\, dt + \varepsilon_1 = \int\limits_0^\infty \overline{P}_x(\varphi(\pi_t);\, t < \tau_n)\, dt + \varepsilon_1 - \varepsilon_2,$$

где $\varepsilon_1 = \int\limits_0^\infty \overline{P}_x(\varphi(\pi_{t+h}); t < \tau_n \le t+h)\, dt$, $\varepsilon_2 = \int_0^h \overline{P}_x(\varphi(\pi_t);\, t < \tau_n)\, dt$. Очевидно $\varepsilon_2 \le h \sup |\varphi|$. Далее

$$\varepsilon_1 \le \sup |\varphi| \int\limits_0^\infty \overline{P}_x(t < \tau_n \le t+h)\, dt =$$

$$= \sup |\varphi| (\int\limits_0^\infty \overline{P}_x(t < \tau_n)\, dt - \int\limits_h^\infty \overline{P}_x(t < \tau_n)\, dt) \le h \sup |\varphi|.$$

Отсюда

$$\int\limits_{\mathbb{X}} \overline{P}_x(\varphi(\pi_h))\, \overline{G}_\infty(dx) =$$

$$= \frac{1}{n\, M_\tau} \int\limits_{\mathbb{X}} (\int\limits_0^\infty \overline{P}_x(\varphi(\pi_t);\, t < \tau_n)\, dt + \varepsilon_1 - \varepsilon_2)\, H_\tau^\infty =$$

$$= \overline{G}_\infty(\varphi) + (\varepsilon_1 - \varepsilon_2)/(n\, M_\tau).$$

Так как n может быть выбрано сколь угодно большим, то равенство

$$\int\limits_{\mathbb{X}} \overline{P}_x(\varphi(\pi_h))\, \overline{G}_\infty(dx) = \overline{G}_\infty(\varphi)$$

доказано, а вместе с тем по произвольности h и φ доказана стационарность меры $\overline{G}_\infty$. □

Пример 1. Рассмотрим монотонный непрерывный полумарковский процесс при $\mathbb{X} = \mathbb{R}_+$. Пусть ζ_x – момент достижения уровня x. Процесс $\xi(t)$ $(t \in \mathbb{R}_+)$ называется обращенным процессом с независимыми положительными приращениями, если $\zeta_x(\xi)$ $(x \in \mathbb{R}_+)$ – процесс с независимыми положительными приращениями. Процесс определен на положительной полуоси семейством мер (P_x), заданных на пространстве неубывающих непрерывных положительных функций канторовского типа. Для этого процесса интерес представляет стационарное распределение пары (R_t^-, R_t^+).

Мы будем рассматривать также дробную часть значения процесса в момент t. Фактически при этом мы переходим от монотонного процесса к немонотонному эргодическому процессу $\widetilde{\xi}(t) \equiv \xi(t) \bmod 1$ с пространством состояний $[0,1)$ и семейством мер $(\widetilde{P}_x)$. Естественный вложенный марковский процесс восстановления для такого процесса порождается последовательностью скачков из единицы в нуль: $(\tau_1, \tau_2, \ldots)$, где $\tau \equiv \tau_1 = \sigma_0 \dot{+} \sigma_{(0,1)}$ – первое достижение нуля (если начальная точка не нуль) или первое возвращение в нуль (если начальная точка нуль) (здесь σ_0 – момент первого выхода из начального состояния). Вложенная "марковская" цепь состоит в повторении одного и того же значения нуль: $H_\tau^\infty(\{0\}) = 1$. По формуле Леви для однородного процесса с независимыми положительными приращениями имеем

$$P_y(\exp(-\lambda\sigma_{[0,x)})) =$$
$$= \exp(-(x-y)(\lambda\,\alpha + \int_{0+}^{\infty}(1-e^{-\lambda\,u})\,\nu(du))) \quad (0<y<x<1),$$

где $\alpha \geq 0$ и $\nu(du)$ – мера на $(0,\infty)$ (мера Леви). Пусть $G_t(S\times A_1\times A_2\,|\,y) = \widetilde{P}_y(\pi_t \in S,\, R_t^- \in A_1, R_t^+ \in A_2)$. Тогда согласно формуле (6) получаем

$$G_\infty((0,x)\times A_1\times A_2) = \frac{x\,\gamma}{M},$$

где $M \equiv \widetilde{P}_0(\tau_1) = \alpha + \int_{0+}^\infty u\,\nu(du)$,

$$\gamma = \begin{cases} \alpha, & A_1 = A_2 = \{0\}, \\ \int_{r+s}^\infty (u-r-s)\,\nu(du), & A_1 = (r,\infty),\, A_2 = (s,\infty). \end{cases}$$

Пример 2. Рассмотрим монотонный непрерывный полумарковский процесс, представляющий собой обращенный процесс с независимыми положительными приращениями $\xi(t)$ $(t\in\mathbb{R}_+)$, в котором все интервалы постоянства условно фиксированы. Для такого процесса

$$\zeta_x = a_x + \sum_{x_i<x} t_i,$$

где a_x – неубывающая функция от $x \in \mathbb{R}_+$, $X \equiv (x_i)$ – последовательность точек из множества $\mathbb{R}_+$, (t_i) – последовательность независимых положительных случайных величин. Распределение случайной величины t_i зависит только от x_i: $P_0(t_i < t) = F_{x_i}(t)$ $(t > 0)$. Предположим, что $a_x = \alpha x$ $(\alpha > 0)$, множество точек X периодично с периодом 1 (при любом $t \geq 0$ справедливо $X \cap [t+1, \infty) = (X \cap [t, \infty)) + 1$), а также семейство функций распределения периодично с периодом 1 $(F_{x+1} = F_x \ (x \geq 0))$. Будем рассматривать дробную часть значения процесса в момент t – эргодический процесс $\widetilde{\xi}(t) \equiv \xi(t) \bmod 1$ с пространством состояний $[0, 1)$. При $0 < x < 1$ стационарная вероятность $G_\infty((0, x) \times A_1 \times A_2)$ этого процесса равна $\omega(x)/M$, где

$$M = \alpha + \sum_{x_i < 1} \int\limits_0^\infty t \, dF_{x_i}(t),$$

$$\omega(x) = \begin{cases} \alpha x, & A_1 = A_2 = \{0\}, \\ \sum\limits_{x_i < x} \int_{r+s}^\infty (t - r - s) \, dF_{x_i}(t), & A_1 = (r, \infty), \, A_2 = (s, \infty). \end{cases}$$

Литература

1. И. И. Гихман, А. В. Скороход, *Теория случайных процессов.* т.2, Наука, М. (1973).
2. К. Ито, Г. Маккин, *Диффузионные процессы и их траектории.* Мир, М. (1968).
3. В. С. Королюк, А. Ф. Турбин, *Полумарковские процессы и их приложения.* Наукова думка, Киев (1976).
4. Б. П. Харламов, *Случайные процессы с полумарковскими потоками первых вхождений.* — Зап. научн. семин. ЛОМИ **41** (1974), 139–164.
5. Б. П. Харламов, *О сходимости полумарковских блужданий к непрерывному полумарковскому процессу.* — Теория вероятн. и ее примен. **XXI,** 3 (1976), 497–511.
6. Б. П. Харламов, *Свойство "правильного выхода" и одна предельная теорема для полумарковских процессов.* — Зап. научн. семин. ЛОМИ **72** (1977), 186–201.
7. Б. П. Харламов, *Представление полумарковского процесса в виде преобразованного заменой времени марковского процесса.* — Теория вероятн. и ее примен. **XXVIII,** 4 (1983), 653–667.
8. Б. П. Харламов, *Распределение хода времени относительно последовательности состояний в полумарковском процессе.* — Зап. научн. семин. ЛОМИ **142** (1985), 167–173.
9. Б. П. Харламов, *Случайные криволинейные интегралы и их применение.* — Теория вероятн. и ее примен. **35** (1990), 118–130, *Характеристический оператор и криволинейный интеграл для полумарковского процесса* — Зап. научн. семин. ЛОМИ **177** (1989), 170–180.
10. В. М. Шуренков, *Эргодические процессы Маркова.* Наука, М. (1989).

11. B. P. Harlamov, *Stationary distributions of continuous semi-Markov processes.* 2nd Nordic-Russian Symposium in Stochastic Analysis. Beitostolen, Norway, July 28–August 6. Abstracts 1999, pp. 5–11.

Harlamov B. P. Ergodicity conditions and stationary distributions of a continuous semi-Markov process.

A semi-Markov process of a general type on a metric space is considered. The stationary distribution of the process is investigated. A Markov process associated to the semi-Markov one is constructed. The stationary distribution for values of the process at the fixed point of the time scale and for the lengths of intervals of constancy covering this point is expressed in terms of the stationary distribution of the associated Markov process.

Институт проблем
машиноведения РАН

Поступило 1 декабря 2000 г.