Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 279, 2001 г.

АЛЕКСАНДР АЛЕКСАНДРОВИЧ ИВАНОВ

(к восьмидесятилетию со дня рождения)

Александр Александрович Иванов родился 16 января 1921 года в городе Уссурийске Приморского края. В 1923 году его семья переехала в Петроград, на родину отца (мать была сибирячкой). В школьные годы математика не всегда была его любимым предметом, только с девятого класса он начал заниматься ею всерьез и в десятом (выпускном) классе самостоятельно изучил дифференциальное и интегральное исчисление по учебнику Гренвиля и Лузина и аналитическую геометрию по учебнику Привалова. В 1938 году Саша Иванов получил премию на Ленинградской городской математической олимпиаде школьников, что стало событием для окраинной школы Ленинграда (12 средняя школа Выборгского района), в которой он учился.

В том же 1938 году Александр Иванов стал студентом математико-механического факультета Ленинградского государственного университета. Учился у А. Д. Александрова, А. А. Маркова (мл.), В. И. Смирнова, Д. К. Фаддеева, на третьем курсе заинтересовался топологией. Все изменилось в июне 1941 года. Экзаменационная сесия была прервана, но все же он сумел сдать С. Н. Бернштейну последний экзамен за третий курс, затем оборонные работы, партизанский отряд, сформированный в Ленинграде и действовавший в Ленинградской области, госпитали Тихвина и Вологды, военное училище в Череповце, действующая армия. И все это время, вплоть до тяжелого ранения в июле 1944 года, носил с собой, а когда появлялась возможность, то читал "Топологию" Зейферта и Трельфалля. Одно время, обучаясь на филиале офицерских курсов "Выстрел" в Архангельске, ему даже показалось, что найдено решение проблемы Пуанкаре (ошибку нашел сам). Летом 1944 года был представлен на фронте к ордену Отечественной Войны 2-й степени, который получил через 50 (!) лет. В конце 1944 года лейтенант, командир пулеметной роты А. А. Иванов после длительного лечения в госпитале был демобилизован по инвалидности. Появилась возможность продолжить обучение в ЛГУ.

Первой научной публикацией А. А. Иванова была статья "Об устойчивости двумерных полиэдров", содержавшая краткое изложение его дипломной работы. В ней изучались условия, при выполнении которых тождественное отображение не гомотопно отображению пространства на его собственное подмножество.

Основным результатом его кандидатской диссертации "Изотопия компактов в евклидовых пространствах" (1951) было обобщение результата Антуана, построившего пример вложения канторова дисконтинуума в трехмерное евклидово пространство с нетривиальной фундаментальной группой дополнения образа. Трудность построения аналога этого примера в пространствах большей размерности состояла в том, что замкнутые цепи из окрестностей окружностей нельзя было заменить просто комбинациями окрестностей сфер. Удалось преодолеть все трудности, рассмотрев окрестности многомерных торов и их сетки.

С 1951 по 1958 год А. А. Ивановым проводились исследования некоторых прикладных задач, в основном закрытого характера.

Однако все эти работы не типичны для научного творчества А. А. Иванова, для которого характерно стремление к проблемной тематике, а не решению конкретных задач. Вместе с В. М. Ивановой в 1958–1959 годах он создает быстро ставшую классической *теорию отношений (структур) смежности*. В этих исследованиях ярко проявилась другая черта научного творчества А. А. Иванова – стремление к максимальной общности разрабатываемых теорий.

На отношения смежности накладываются минимальные условия, требуемые для построения общей теории произвольных бикомпактных расширений топологических пространств. В то время как в литературе рассматривались, за исключением некоторых частных конструкций, только хаусдорфовы бикомпактные расширения вполне регулярных пространств, определяемые отделимыми отношениями близости, новый метод позволял строить любые бикомпактные расширения произвольных топологических пространств. При этом оказалось, что одно и тоже отношение близости естественно определяется различными отношениями смежности, среди которых можно выделить так называемое *главное* отношение смежности. Главные отношения смежности определяют *главные* бикомпактные расширения. Главные расширения обладают многими специальными характеризующими их свойствами, в частности, расширения, определяемые отделимыми отношениями близости, являются главными. При построении бикомпактных расширений, соответствующих заданным отношениям смежности, используются не фильтры, а системы смежности, являющиеся кофильтрами.

В дальнейшем А. А. Ивановым была развита общая *теория расширений* топологических пространств, в частности теория пополнений равномерных пространств, понимаемых как системы открытых покрытий, удовлетворяющих опять только минимально необходимым условиям (например, без условия звездной вписанности). По-видимому, в его работах впервые была рассмотрена одноступенчатая процедура пополнения, в отличие от классической двухступенчатой. В классической теории рассматривались классы эквивалентности максимальных фильтров Коши, в то время как оказалось более естественным использовать либо минимальные фильтры Коши, либо (в двойственном варианте) максимальные кофильтры Коши.

Продуктивность стремления А. А. Иванова к максимальной общности конструируемых теорий ярко проявилась при исследовании введенной им *редуктивной классификации равномерных структур*. В опубликованной в 1972 году в Докладах Академии наук статье “Редуктивность равномерных структур” было показано, как по мере усиления редуктивности равномерной структуры ее свойства приближаются к свойствам вейлевских равномерных структур. Данное направление завершает статья “Структуры расширений” (Зап. науч. семин. ЛОМИ, т. 36 (1973), 50–125). В том же томе была опубликована статья “Детализации” (с. 126–133), хотя и относящаяся к теории категорий, однако непосредственно связанная с структурами расширений. Дело в том, что структурная связь между топологическими пространствами, пространствами близости, пространствами смежности и равномерными пространствами определяет связь между соответствующими категориями. Оказалось, что можно определить функторы вложения и функторы проекции, при этом, если последние определены однозначно, то функторы вложения можно выбирать различными способами. В статье рассмотрены некоторые свойства этих функторов (так называемые *аксиомы детализаций*), позволяющие переносить различные понятия и утверждения из одной категории в другую.

В 1974–1976 годах А. А. Иванов занимался *теоремами о неподвижных точках* отображений метрических пространств. Результаты этих исследования были включены в его обзорную статью "Неподвижные точки отображений метрических пространств" (Зап. науч. семин. ЛОМИ, т. 66, с. 5–102). В частности, в ней содержатся различные обобщения теоремы Банаха о сжимающих отображениях. А. А. Ивановым доказаны наиболее общие теоремы, в которых накладываются условия на различные комбинации расстояниий $d(x, Tx)$, $d(y, Ty)$, $d(x, Ty)$ и $d(y, Tx)$. Приведем один пример.

Пусть (X, d) – полное метрическое пространство, $T\colon X \to X$ – такое отображение, что

$$\alpha d(x,y)+\beta d(Tx,Ty)+\gamma[d(x,Tx)+d(y,Ty)]+\delta[d(x,Ty)+d(y,Tx)] \geqslant 0,$$

где $\alpha + \beta + 2\gamma < \min\{0, -2\delta\}$ и $\beta + \gamma + \delta < 0$. Тогда отображение T имеет неподвижную точку, причем если $\beta + \gamma + 2\delta < 0$, то такая точка единственна.

Очень интересно полученное им обобщение теоремы Банаха на *слабо метрические пространства*. Определение слабой метрики по А. А. Иванову характеризуется тем, что аксиома треугольника заменяется более слабым условием: для каждого ε найдется такое δ, что если $d(y, z) < \delta$, то $d(x, z) \leqslant d(x, y) + \varepsilon$. А. А. Ивановым было найдено удивительно элегантное доказательство того, что сжимающее отображение полного слабо метрического пространства имеет единственную неподвижную точку. К сожалению, этот результат остался незамеченным, хотя он выглядит многобещающе с точки зрения широты его возможных приложений.

А. А. Иванова всегда интересовали *структуры топологического типа*, под которыми понимаются топологические структуры на множествах, получаемых из некоторого множества X операцией декартова умножения и переходом к множествам подмножеств. Кроме собственно топологических структур на X, можно изучать топологии на произведении $X \times X$, на множестве PX всех подмножеств X, на $P(X \times X)$ и так далее. Естественно, что все они являются структурами на исходном множестве X; некоторые из них получили специальные названия. Так, топологическая структура на $X \times X$ была названа *битопологической структурой* на X. Это связано с тем, что битопологическим пространством (в классическом смысле) называется множество, на котором заданы две топологические структуры, задание же двух топологических структур на множестве X эквивалентно заданию на множестве $X \times X$ топологической структуры, являющейся их произведением. В классической теории битопологических структур изучались, главным образом, аналоги различных понятий и утверждений теории топологических пространств. Общая теория битопологических пространств (по А. А. Иванову) является самостоятельной ветвью теоретико-множественной топологии. Понятия и утверждения этой теории, как правило, не имеют аналогов в теории топологических пространств. Единственными аналогами являются самые простые битопологические понятия подпространства, факторпространства, объединения, произведения, индуцирования, ослабления и согласования структур, методы задания битопологических структур, например использование сходимостей направленных систем точек.

Как уже было сказано, битопологическим пространством называется пара (X, β), где β – топологическая структура на множестве $X \times X$. Отображение $f : X \to X'$ называется *бинепрерывным*, если непрерывно отображение

$$f \times f : (X \times X, \beta) \to (X' \times X', \beta').$$

Равномерная структура окружений диагонали превращается в битопологическую структуру добавлением к ней пустого множества. Это означает, что теорию равномерных по Вейлю пространств можно рассматривать, как часть теории битопологических пространств.

Если $\beta = \tau_1 \times \tau_2$, где τ_1 и τ_2 – топологические структуры на X, т. е. $(X \times X, \beta) = (X, \tau_1) \times (X, \tau_2)$, то такое битопологическое пространство называется *разложимым*. Таким образом, класс классических битопологических пространств (X, τ_1, τ_2) совпадает с классом разложимых битопологических пространств. Более широким является класс локально разложимых битопологических пространств (X, β), для которых в пространстве $(X \times X, \beta)$ имеются базы окрестностей точек, состоящие из прямоугольных множеств. Кстати, базы открытых прямоугольных окрестностей может и не быть. Локально разложимые битопологические пространства обладают многими интересными свойствами.

Совершенно особое место занимает класс локальных битопологических пространств. Битопологическое пространство (X, β) называется *локальным*, если любое множество в $X \times X$, не пересекающееся с диагональю $\Delta = \{(x, x) \mid x \in X\}$, является открытым в $(X \times X, \beta)$ множеством. Структура β называется в этом случае также *локальной*. От любой битопологической структуры можно перейти к локальной, включив в нее все множества, не имеющие общих точек с диагональю. Эта процедура переводит равномерную структуру окружений диагонали в локальную битопологическую структуру. Поэтому теорию равномерных по Вейлю пространств можно рассматривать, как часть теории локальных битопологических пространств.

Одним из возможных применений развиваемой А. А. Ивановым теории битопологических пространств являются так называемые *битопологические представления*. Будем говорить, что некоторый класс $\mathcal{F}$ непрерывных отображений топологических пространств *битопологически представлен* классом $\mathcal{B}$ битопологических структур (пространств), если $\mathcal{F}$ совпадает с классом всех бинепрерывных отображений $f\colon (X, \beta) \to (X', \beta')$ для всевозможных битопологических структур β и β' из $\mathcal{B}$. Были рассмотрены битопологические представления различных классов отображений, наиболее перспективными являются, по-видимому, битопологические представления кусочно линейных отображений.

Оказалось, что на евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$ произвольной размерности можно ввести такую битопологическую структуру β_n, что отображение $f\colon \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ является кусочно линейным тогда и только тогда, когда отображение битопологических пространств $f\colon (\mathbb{R}^p, \beta_p) \to (\mathbb{R}^q, \beta_q)$ бинепрерывно. Таким образом, на кусочно линейном многообразии оказывается возможным ввести такую битопологическую структуру, что класс всех таких структур является битопологическим представлением класса всех кусочно линейных отображений кусочно линейных многообразий. В результате получилось чисто топологическое описание кусочно линейных многообразий.

Уже в начале 70-х годов делались попытки ввести понятие *битопологической группы* (в классическом смысле), но все они оказались неудачными. После нескольких попыток А. А. Иванову удалось найти хороший подход к теории битопологических групп. Выяснилось, что существуют два типа битопологических групп, так называемые *прямые и косые*. При этом битопологическая прямая $(\mathbb{R}, \tau_r, \tau_l)$, как группа относительно сложения, оказалась как раз косой битопологической группой.

В последнее время А. А. Ивановым изучалась связь между топологическими структурами на произведениях и на множествах непрерывных отображений. Такого рода связь рассматривалась ранее только для обычного произведения $X \times Y$ топологических пространств X и Y. Рассмотрение других топологических структур позволило создать интересную теорию двойственности между топологическими структурами на произведениях и структурами на множествах непрерывных отображений, интересным частным случаем которой является двойственность между битопологическими структурами на X и топологическими структурами на множестве $P_{cl}X$ замкнутых подмножеств пространства X.

А. А. Иванов обладает высоким чувством долга и ярко выраженным общественным темпераментом. Большой и плодотворной была его общественная и научно-организационная работа. С 1952 по 1954 год он был ученым секретарем ЛОМИ. В качестве секретаря и члена партийного бюро ЛОМИ в течение многих лет уделял много внимания и отдавал много сил организации научной работы. На его плечи легла основная работа по проведению Ленинградской Международной Топологической конференции 1982 года. А. А. Иванов всегда интересовался проблемами преподавания математики в высших учебных заведениях, в разные годы работал по совместительству в вузах Ленинграда. Читал (на общественных началах) различные курсы на математико-механическом факультете ЛГУ. Им был прочитан первый на матмехе (тогда еще факультативный) курс топологии. Участниками организованного им семинара были студенты (ныне – известные топологи) О. Я. Виро, В. М. Нежинский, А. Сюч, В. М. Харламов.

В рамках философского (методологического) семинара ЛОМИ А. А. Иванов организовал и провел четыре конференции “Методологические и методические проблемы математического образования” (1981, 1983, 1985, 1987), в которых приняли участие математики различных городов страны. На этих конференциях обсуждались проблемы не только вузовского, но и школьного математического образования. По материалам конференций в 1987 году Центральным советом философских (методологических) семинаров при Президиуме АН СССР был издан сборник "Методологические проблемы преподавания математики". До сих пор А. А. Иванов яляется заместителем председателя Научно-методического Совета по математике вузов Северо-Запада и членом Президиума Ассоциации математиков вузов.

Общительный, доброжелательный, принципиальный человек, всегда стремящийся помочь другим, А. А. Иванов пользуется заслуженным уважением коллег и друзей.

Прожито уже восемьдесят лет, были радости и беды, успехи и неудачи, о многом болела и продолжает болеть душа. Пожелаем же Александру Александровичу здоровья, бодрости духа и еще многих лет творческой деятельности!

С. В. Буяло, В. А. Залгаллер, И. А. Ибрагимов, Н. А. Шанин, О. А. Иванов, Г. А. Леонов, В. М. Нежинский, Н. Ю. Нецветаев, Ю. И. Смирнов, А. В. Архангельский, А. А. Мальцев, А. С. Мищенко, Б. А. Пасынков, В. И. Пономарев, Е. Г. Скляренко, В. В. Федорчук, С. А. Богатый, К. Л. Козлов, А. П. Комбаров, Ю. В. Садовничий, О. В. Сипачева, А. Н. Якивчик

Поступило 22 декабря 2000 г.