Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 279, 2001 г.

П. М. Ахметьев

О ВЫСШЕМ АНАЛОГЕ КОЭФФИЦИЕНТА ЗАЦЕПЛЕНИЯ ПАРЫ БЕЗДИВЕРГЕНТНЫХ ВЕКТОРНЫХ ПОЛЕЙ

Введение

Обозначим через $\mathcal{B}$ множество бездивергентных векторных полей в $\mathbb{R}^3$, имеющих компактный носитель, а через SDiff – группу диффеоморфизмов $D\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, сохраняющих объем и имеющих компактный носитель (т.е. неподвижных вне некоторого шара).

Пусть B_1, $\widetilde{B}_1$, B_2, $\widetilde{B}_2 \in \mathcal{B}$. Будем говорить, что пара $(B_1, \widetilde{B}_1)$ *эквивалентна* паре $(B_2, \widetilde{B}_2)$, и писать $(B_1; \widetilde{B}_1) \simeq (B_2; \widetilde{B}_2)$, если существует диффеоморфизм $D \in \mathrm{SDiff}$ такой, что $D(B_1) = B_2$ и $D(\widetilde{B}_1) = \widetilde{B}_2$.

0.1. Условие Соколова. Пусть $I_n : \mathcal{B}\times\mathcal{B} \to \mathbb{R}$ – вещественнозначная функция. Скажем, что она удовлетворяет *условию Соколова*, если она может быть получена как усреднение (сходящееся абсолютно) значений $2n$-линейной формы

$$\mu_n(B(x_1), \dots, B(x_n); \quad \widetilde{B}(\widetilde{x}_1), \dots, \widetilde{B}(\widetilde{x}_n))$$

от значений векторных полей B и $\widetilde{B}$ в наборе $2n$ точек $(x_1, \dots, x_n; \widetilde{x}_1, \dots, \widetilde{x}_n) \in \mathbb{R}^{6n}$. При этом предполагается, что коэффициенты формы μ_n (как тензора) зависят от упорядоченного набора точек $(x_1, \dots, x_n; \widetilde{x}_1, \dots, \widetilde{x}_n) \in \mathbb{R}^{6n}$ и могут даже быть не определены (иметь особенности), если набор вырождается, т.е. некоторые точки в нем совпадают.

Функции I_n, удовлетворяющие условию Соколова и такие, что их значения на эквивалентных парах полей совпадают, т.е. $I_n(B_1; \widetilde{B}_1) = I_n(B_2; \widetilde{B}_2)$, если $(B_1; \widetilde{B}_1) \simeq (B_2; \widetilde{B}_2)$, будем называть *инвариантами Соколова*. (Ср. [11].)

Работа написана при финансовой поддержке грантов РФФИ Nos. 99-01-01227, 00-05-64015 и гранта INTAS-CNES 975-1048.

0.2. Инварианты Соколова. Автору известно всего два содержательных примера инвариантов Соколова. Первый пример был фактически построен Гауссом в середине 19 в., построение второго примера является предметом работы. Оно проводится с использованием конструкций из статьи [9].

Пример 1. Интеграл спиральности. Положим

$$h(B(x), \widetilde{B}(\widetilde{x})) = \frac{\langle B(x); \widetilde{B}(\widetilde{x}); (x - \widetilde{x})\rangle}{\|x - \widetilde{x}\|^3},$$

где $\langle a; b; c\rangle$ – смешанное произведение упорядоченной тройки векторов. Определим интеграл спиральности $I_1(B; \widetilde{B}) = H(B; \widetilde{B})$ по формуле

$$H(B; \widetilde{B}) = \int h(B(x); \widetilde{B}(\widetilde{x}))dx d\widetilde{x}.$$

Инвариантность интеграла спиральности была фактически установлена Гауссом, исходившим из топологических соображений. На современном языке эти соображения можно сформулировать так. Если пара полей $(B, \widetilde{B})$ моделирует зацепление $L = L_1 \cup \widetilde{L}_1$ (см. [6]), то значение $H(B, \widetilde{B})$ пропорционально коэффициенту зацепления $\mathrm{lk}(L; \widetilde{L})$ (с коэффициентом $F\widetilde{F}$, где F и $\widetilde{F}$ – потоки векторных полей B и $\widetilde{B}$ через трансверсальное сечение соответствующей компоненты носителя поля). При топологическом подходе случай произвольной пары полей сложен, и необходимы более тонкие рассуждения об асимптотическом усреднении, проведенные В. И. Арнольдом [1] для наиболее сложного случая $\widetilde{B} = B$. Аналитическое доказательство того, что H является инвариантом, значительно проще, см. [8].

Пример 2. Высший аналог интеграла спиральности. В §1 и 2 строится 4-линейная форма $\mu(B(x_1),\, B(x_2),\, \widetilde{B}(\widetilde{x}_1),\, \widetilde{B}_2(\widetilde{x}_2))$ с абсолютно сходящимся средним интегральным значением $I_2(B; \widetilde{B}) = M(B; \widetilde{B})$:

$$M(B, \widetilde{B}) = \int \mu(B_1(x_1), B_2(x_2), \widetilde{B}_1(\widetilde{x}_1), \widetilde{B}_2(\widetilde{x}_2)) d\mathbb{R}^{12}. \tag{1}$$

В §3 проверяется, что $M(B, \widetilde{B})$ не зависит от выбора представителя в классе пар бездивергентных векторных полей. В §4 формулируются некоторые родственные гипотезы.

§1. Определение формы μ

Определим семейство вектор-функций $A(x;x_i)$ и семейство функций $\varphi(x;x_i)$, зависящих от точки $x\in\mathbb{R}^3$ и параметризованных точкой $x_i\in\mathbb{R}^3$, $i=1,2$:

$$A(x;x_i)=\frac{B(x_i)\times(x-x_i)}{\|x-x_i\|^3},$$

$$\varphi(x;x_i)=-\frac{\partial}{\partial\widehat{B}}\|x-x_i\|^{-1},$$

где через $\widehat{B}$ обозначено постоянное векторное поле, все значения которого равны $B(x_i)$.

Говоря иными словами, вектор-функция $A(x;x_i)$ – это векторный потенциал диполя с центром в точке x_i, ось и интенсивность которого определяются значением поля B в этой точке, а функция $\varphi(x;x_i)$ – скалярный потенциал того же диполя.

Выполнены равенства

$$\operatorname{rot}A(x;x_i)=\operatorname{grad}\varphi(x;x_i),\qquad \operatorname{div}(A(x;x_i))=0. \tag{2}$$

Удобно ввести аналогичные обозначения $\widetilde{A}(x;\widetilde{x}_i)$, $\widetilde{\varphi}(x;\widetilde{x}_i)$ для семейства векторных и скалярных потенциалов диполей, связанных с полем $\widetilde{B}$.

Определим семейство вектор-функций $C(x;x_i,\widetilde{x}_i)$, зависящих от точки $x\in\mathbb{R}^3$ и параметризованных упорядоченными парами точек $x_i,\widetilde{x}_i$, по формуле

$$C(x;x_i,\widetilde{x}_i)=$$
$$=A(x;x_i)\times\widetilde{A}(x;\widetilde{x}_i)-(\varphi(x;x_i)+a)\widetilde{A}(x;\widetilde{x}_i)+A(x;x_i)(\widetilde{\varphi}(x;\widetilde{x}_i)+\widetilde{a}), \tag{3}$$

где числа a и $\widetilde{a}$ выбираются (для каждой пары точек $(x_i,\widetilde{x}_i)$) из условия $a+\varphi(\widetilde{x}_i;x_i)=\widetilde{a}_i+\widetilde{\varphi}(x_i;\widetilde{x}_i)=0$.

1.1. Лемма. *Для любой пары несовпадающих точек $(x_i,\widetilde{x}_i)$ векторное поле $C(x;x_i,\widetilde{x}_i)$ бездивергентно в области $\mathbb{R}^3\setminus\{x_i,\widetilde{x}_i\}$.*

Доказательство. Воспользовавшись равенством (2), получим

$$\operatorname{div}C(x;x_i,\widetilde{x}_i)=(\operatorname{rot}A_i;\widetilde{A}_i)-(A_i;\operatorname{rot}\widetilde{A}_i)-(\nabla\varphi_i;\widetilde{A}_i)+(\nabla\widetilde{\varphi}_i,A_i)=0. \quad\bullet$$

1.2. Определение формы μ. Определим вектор-функцию $\Gamma(x; x_i, \widetilde{x}_i)$ как векторный потенциал для $C(x; x_i, \widetilde{x}_i)$, т.е. тем условием, что $\operatorname{rot}\Gamma(x; x_i, \widetilde{x}_i) = C(x; x_i, \widetilde{x}_i)$. При этом потребуем дополнительно, чтобы полюса вектор-функции Γ в особых точках $x_i, \widetilde{x}_i$ и на бесконечности были минимальными возможными, т.е. асимптотика в полюсах составляла бы $O(r^{-1})$, а асимптотика на бесконечности имела бы вид

$$\operatorname{rot}^{-1}(\widetilde{A}(x; \widetilde{x}_i))a + \operatorname{rot}^{-1}(A(x; x_i))\widetilde{a} + O(r^{-3}).$$

Первые два слагаемых в этом выражении имеют стандартный вид; например, для $x_i = 0$ имеем $\operatorname{rot}^{-1}(A(x; 0)) = B(0)/r$, где r – расстояние до 0. Это определяет вектор-функцию Γ не однозначно, а с точностью до соленоидальной вектор-функции вида ∇f.

Пусть $(x_1, x_2, \widetilde{x}_1, \widetilde{x}_2) \in (\mathbb{R}^3)^4$ – упорядоченная четверка несовпадающих точек. Определим форму μ по формуле

$$\mu(B(x_1), B(x_2), \widetilde{B}_1(x_1), \widetilde{B}_2(x_2)) = \int \Gamma(x; x_1, \widetilde{x}_1)C(x; x_2, \widetilde{x}_2)d\mathbb{R}^3. \quad (4)$$

В окрестности бесконечности интеграл следует понимать в смысле главного значения из-за наличия слагаемых стандартного вида, связанных с константами a и $\widetilde{a}$.

1.3. Лемма. *Значение формы μ корректно определено и не зависит от произвола в выборе векторного поля $\Gamma(x; x_1, x_2)$.*

Доказательство. Пусть $\varepsilon > 0$ – малое число, $U_\varepsilon(x_i)$, $U_\varepsilon(\widetilde{x}_i)$ – шары радиуса ε с центрами в точках x_i, $\widetilde{x}_i$, $V_{1/\varepsilon}$ – шар радиуса ε^{-1} с центром в точке, лежащей в области носителя полей B_i, $\widetilde{B}_i$, $i = 1, 2$. Обозначим через W дополнение к объединению всех этих шаров.

Рассмотрим две вектор-функции $\Gamma(x; x_1, x_2)$, $\Gamma'(x; x_1, x_2)$, удовлетворяющие условиям из определения формы μ. В области $\mathbb{R}^3 \setminus W$ справедливо равенство $\Gamma - \Gamma' = \nabla f$, и

$$\operatorname{div}(fC(x; x_2, \widetilde{x}_2)) = (\nabla f; C(x; x_2, \widetilde{x}_2)$$

в силу бездивергентности поля C. Применяя теорему Гаусса–Остроградского к полю fC в области W, получим, что значение $\int(\nabla f; C)d\mathbb{R}^3$ оценивается суммой поверхностных интегралов поля fC по компонентам границы области W. Применим разложение в ряд в центральных точках шаров. Учитывая условия на полюса вектор-функций Γ, C, получим, что значение суммы поверхностных интегралов становится пренебрежимо малым, если ε достаточно мало. Лемма 1.3 доказана. $\bullet$

§2. Среднее интегральное значение M корректно определено

2.1. Утверждение. *Интегральное выражение* (1) *абсолютно сходится.*

Это утверждение вытекает из оценок снизу для значений формы $\mu(B(x_1),\ B(x_2),\ \widetilde{B}(\widetilde{x}_1),\ \widetilde{B}(\widetilde{x}_2))$ при условии, что четверка точек $(x_1, x_2, \widetilde{x}_1, \widetilde{x}_2)$ вырождается. Вырождение происходит на линейном подмногообразии в $\mathbb{R}^{12}$, которое имеет коразмерность 3. Это достигается прямым вычислением. Например, если $x_1 \to \widetilde{x}_1$, то значение подынтегральной вектор-функции в выражении (4) имеет полюс порядка 3 в точке $x_1 = \widetilde{x}_1$, полюс первого порядка в x_2, полюс второго порядка в $\widetilde{x}_2$. Если одна из точек четверки лежит вне области носителя поля, подынтегральное выражение тождественно обращается в 0. Существование среднего значения M вытекает из полученной оценки. $\bullet$

2.2. Замечание. Первое слагаемое в подынтегральном выражении в (3) не удается усреднить по переменным x_1, x_2, $\widetilde{x}_1$, $\widetilde{x}_2$, поскольку при этом возникают полюса порядка $O(r^{-4})$ в точках дискриминанта в коразмерности 3.

§3. Значение инварианта M на парах эквивалентных полей совпадает

Мы приводим набросок доказательства, предполагая дать более подробное доказательство в последующих публикациях.

Пусть $D_t\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $t \in [0; +\varepsilon]$, – росток однопараметрического семейства диффеоморфизмов из группы SDiff, причем $D_0 = \mathrm{Id}$. Обозначим через B_t и $\widetilde{B}_t$ образы векторных полей B и $\widetilde{B}$ при диффеоморфизме D_t. Мы покажем, что

$$\frac{\partial M(B_t, \widetilde{B}_t)}{\partial t} = 0. \tag{5}$$

Обозначим $\frac{\partial D_t}{\partial t}$ через u. Тогда $\operatorname{div}(u) = 0$. Выпишем калибровочное преобразование для вектор-функции C в выражении (3):

$$C \to C + \nabla f \times \widetilde{A} + A \times \nabla \widetilde{f} + (\varphi + a)\nabla \widetilde{f} - (\widetilde{\varphi} + \widetilde{a})\nabla f + \nabla \psi, \tag{6}$$

причем f и $\widetilde{f}$ удовлетворяют уравнениям

$$\Delta f = (\operatorname{rot} u; \nabla\varphi), \quad \Delta\widetilde{f} = (\operatorname{rot} u; \nabla\widetilde{\varphi}), \tag{7}$$

(Ср. [8], уравнение (2.119).)

Следует отдельно доказывать, что калибровочного преобразования (6) достаточно для доказательства инвариантности $M(B_t, \widetilde{B}_t)$ относительно действия группы SDiff. Поясним идею доказательства, используя соображения с дифференциальными формами. Первые два слагаемых в выражении (2) преобразуются как внешнее произведение дифференциальных 1-форм, третье и четвертое – как произведения 2-формы (каждая из этих 2-форм двойственна соответствующей предыдущей 1-форме) на 0-форму (функцию). Наконец, последнее соленоидальное поле в выражении (6) возникает при преобразовании 2-формы, составленной из 4 слагаемых, т.е. требуется для сохранения свойства бездивергентности. Если обозначить правую часть (6) через $C+\delta C$, можно записать $\operatorname{div}(\delta C) = 0$. Из условий на C вытекает оценка порядков полюсов для δC. Так, например, функции f, $\widetilde{f}$ имеют в особых точках x_1, $\widetilde{x}_1$ полюса порядка -1, что вытекает и из уравнения (7).

Применяя тождества

$$\nabla((\varphi + a)\widetilde{f}) = \nabla\varphi\widetilde{f} + (\varphi + a)\nabla\widetilde{f}, \quad \nabla((\widetilde{\varphi} + \widetilde{a})f) = \nabla\widetilde{\varphi}f + (\widetilde{\varphi} + \widetilde{a})\nabla\widetilde{f}$$

и найдя из условия бездивергентности функцию ψ в виде $\psi = (\varphi + a)\widetilde{f} + (\widetilde{\varphi} + \widetilde{a})f$, преобразуем формулу (6) к виду

$$\delta C(x; x_1\widetilde{x}_1) = \operatorname{rot}(f\widetilde{A}) - \operatorname{rot}(\widetilde{f}A). \tag{8}$$

Для доказательства требуемого равенства (5) достаточно установить, что

$$\int \delta\Gamma(x; x_1, \widetilde{x}_1)C(x; x_2, \widetilde{x}_2)d(x, x_1, x_2, \widetilde{x}_1, \widetilde{x}_2) = 0,$$

где $\delta\Gamma = \operatorname{rot}(f\widetilde{A}) - \operatorname{rot}(\widetilde{f}A)$. Пользуясь свойством косой симметрии векторного произведения, прямым вычислением находим, что интегральное среднее значение выражения $\delta\Gamma(x; x_1, \widetilde{x}_1)(A(x, x_2) \times \widetilde{A}(x, \widetilde{x}_2))$ равно 0. Теперь проверим, что слагаемое

$$\int \delta\Gamma(x; x_1, \widetilde{x}_1)(-\varphi(x; x_2) - a)\widetilde{A}(x; \widetilde{x}_2)dx \tag{9}$$

(и аналогичное слагаемое, содержащее функцию $\widetilde{\varphi}$) в интегральном выражении можно усреднить по параметрам (x_1, x_2) (ср. замечание 2.2).

Действительно, в точках дискриминанта $x_2 = \widetilde{x}_2$ выражение $(\varphi(x;x_2) + a)\widetilde{A}(x;\widetilde{x}_2)$ имеет полюс порядка 3. Если при усреднении интеграл (9) понимать в смысле главного значения, то в окрестности дискриминанта выражение пренебрежимо мало. Вне дискриминанта подынтегральное выражение (как выражение зависящее от параметров) можно усреднить, что приводит к тождественному нулю в силу того, что среднее значение семейства функций $\varphi(x;x_2) + a$ (и второго семейства $\widetilde{\varphi}(x;\widetilde{x}_2) + \widetilde{a}$) в каждой точке x пространства обращается в 0. Калибровочная инвариантность доказана.

Замечание. Необходимо проверить, что выражение M не обращается тождественно в 0. Это проще доказать исходя из топологических соображений, которые формулируются в следующем разделе в виде гипотез.

§4. Гипотезы и обсуждения

Пусть $(B, \widetilde{B}) \in \mathcal{B}^2$ – пара бездивергентных векторных полей, моделирующая зацепление $L \cup \widetilde{L}$ (по поводу определения см. [6]). Естественно предположить, что значение инварианта $M(B, \widetilde{B})$ выражается через топологические инварианты соответствующего двухкомпонентного зацепления. Сформулируем ряд гипотез в этом направлении.

4.1. Гипотеза. *Если* $\mathrm{lk}(L;\widetilde{L}) = 0$, *то число* $M(B;\widetilde{B})$ *совпадает с числом* $W(B;\widetilde{B})$, *построенным в* [5]. *Тем самым, оно пропорционально значению инварианта Сато–Левина* $\beta(L;\widetilde{L})$ *с коэффициентом пропорциональности* $F^2\widetilde{F}^2$, *где* $F, \widetilde{F}$ *– соответствующие потоки через трансверсальные сечения для каждой компоненты.*

4.2. Гипотеза. *В случае произвольного двухкомпонентного зацепления* $L \cup \widetilde{L}$ *(компоненты предполагаются связными) число* $M(B;\widetilde{B})$ *совпадает с обобщенным инвариантом Сато–Левина* [10, 7, 2].

4.3. Гипотеза. *В случае общего многокомпонентного зацепления, компоненты которого раскрашены в два цвета, соответствую-*

щим паре полей, число $M(B;\widetilde{B})$ *выражается суммой инвариантов по всем четырехкомпонентным подзацеплениям (с парой одноокрашенных связных компонент каждого цвета), по трехкомпонентным подзацеплениям с разноокрашенными компонентами и по двухкомпонентным подзацеплениям с разноокрашенными компонентами.*

Первые два инварианта в топологии пока не открыты. Они представляются обобщенными инвариантами Милнора. Обобщение состоит в том, что новый инвариант имеет порядок 3 в смысле Васильева и, при том предположении, что соответствующее четырехкомпонентное подзацепление полуограничивает, значение обобщенного инварианта совпадает с милноровским инвариантом длины 3 (в случае трехкомпонентного зацепления выделенная цветом компонента удваивается по оснащению 0). Топологические подходы к такому обобщению предложены в [3].

4.4. Пусть теперь в качестве второго поля $\widetilde{B}$ выбирается поле $\operatorname{rot} B$. Предположим для простоты, что поле B моделирует зацепление L. Число $M(B;\operatorname{rot} B)$ в этом случае связано с инвариантами Васильева порядка 2 для связных компонент зацепления L. В этом случае оно является лишь инвариантом плоского движения и меняется при трехмерных подкручиваниях компонент зацепления. Это связано с изучением обобщенного инварианта Сато–Левина как высшего аналога коэффициента зацепления [4].

Результаты, представленные в работе, были изложены в докладе автора на конференции по приложениям теории особенностей в геометрии, проходившей в Ливерпуле с 16 по 21 декабря 2000 г.

Автор благодарит С. Б. Куксина, С. А. Мелихова и П. В. Семенова за полезные обсуждения.

Литература

1. V. I. Arnold, *The asymptotic Hopf invariant and its applications.* — Selecta Math. Sov. **5** (1986), 327–345.
2. П. М. Ахметьев, Й. Малешич, Д. Реповш, *Формула для обобщенного инварианта Сато–Левина.* — Мат. сб. № 1 (2001), 1–10.
3. П. М. Ахметьев, Й. Малешич, Д. Реповш, *Об инвариантах Милнора длины 3 для полуограничивающих зацеплений.* Препринт Университета Любляны, т. 38, 724.
4. P. M. Akhmet'ev, *On a higher analog of the linknig number of two curves.* — Am. Math. Soc. Transl. (2) **185** (1998), 113–127.

5. P. M. Akhmet'ev, A. Ruzmaikin, *A fourth-order invariant for magnetic and vortex lines.* — J. Geom. Phys. **15** (1995), 95–101.
6. M. Freedman, *A note on topology and magnetic energy in noncompressible perfectly conducting fluids.* — J. Fluid Mech. **194** (1988), 549–551.
7. P. Kirk, C. Livingston, *Vassil'ev invariants of two component links and the Casson–Walker invariant.* — Topology **36** (1997), 1333–1353.
8. Г. К. Моффат, *Возбуждение магнитного поля в проводящей среде, пер.* Москва, Мир, 1980.
9. H. K. Moffatt, R. Ricca, *Helicity and the Calugareanu invariant.* Topological Aspects of Dynamics of Fluids and Plasma, H. K. Moffatt et al. (eds). Dordrecht, Kluwer, 1992, pp. 257–270.
10. M. Polyak, O. Viro, *Gauss diagram formulas for Vassiliev invariants.* (electronic), — Internat. Math. Res. Notices **11** (1994).
11. Д. Д. Соколов, *О погружении псевдоримановых многообразий в псевдоевклидовы пространства.* — Мат. заметки **9**, № 2 (1971), 193–198.

Akhmet'ev P. M. A higher-order analog of the helicity number for a pair of divergent-free vector fields.

Pairs B, $\widetilde{B}$ of divergent-free vector fields with compact support in $\mathbb{R}^3$ are considered. A higher-order analog $M(B,\widetilde{B})$ (of order 3) of the Gauss helicity number $H(B,\widetilde{B}) = \int A\widetilde{B}\,d\mathbb{R}^3$, $\mathrm{curl}(A) = B$, (of order 1) is constructed, which is invariant under volume-preserving diffeomorphisms. An integral expression for M is given. A degree-four polynomial $m(B(x_1)$, $B(x_2)$, $\widetilde{B}(\widetilde{x}_1)$, $\widetilde{B}(\widetilde{x}_2))$, x_1, x_2, $\widetilde{x}_1$, $\widetilde{x}_2 \in \mathbb{R}^3$, is defined, which is symmetric in the first and second pairs of variables separately. M is the average value of m over arbitrary configurations of points. Several conjectures clarifying the geometric meaning of the invariant and relating it with invariants of knots and links are stated.

Институт земного
магнетизма ионосферы
и распространения
радиоволн РАН
akhmetev@izmiran.rssi.ru,
pmakhmet@mi.ras.ru

Поступило 25 января 2001 г.