Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 279, 2001 г.

В. Н. Берестовский, В. М. Гичев

МЕТРИЗОВАННЫЕ ПОЛУГРУППЫ

Александру Александровичу Иванову и
Виктору Абрамовичу Залгаллеру
к восьмидесятилетию

§1. Введение

Довольно широко распространена точка зрения, согласно которой понятие полугруппы, в отличие от понятия группы, чересчур общо, чтобы быть содержательным. Не пытаясь ее оспорить или подтвердить, мы попытаемся в этой работе показать, что на языке топологических полугрупп можно выразить многие важные метрические понятия. В основном, это вариации на тему следующего наблюдения: семейство шаров для левоинвариантной внутренней метрики на топологической группе образует полугруппу множеств. Главным образом речь пойдет о понятиях, определенных авторами в работе [1]: метризованных порядках на топологических группах, острых и локально порожденных полугруппах, частными случаями которых являются подграфики отвечающих порядкам функций расстояния.

Хорошо известные успехи и широта использования теории групп обусловлены тем, что группа автоморфизмов (симметрий) какого-либо объекта во многих важных случаях хранит существенную информацию о его строении. Полугруппы обычно выступают как семейства (необратимых) эндоморфизмов, и их наличие также многое говорит об объекте. Так, однопараметрические полугруппы линейных операторов постоянно используются в теории вероятностей, уравнениях с частными производными, а в физике и других естественно-научных дисциплинах они дают проверенные модели различных процессов, например, диффузии. Посвященная им книга [2] сыграла значительную роль в развитии функционального анализа.

Поддержано грантом РФФИ 98-01-00385.

Неясно, когда впервые появилось понятие полугруппы. По свидетельству Е. С. Ляпина [3], Ф. Клейн указывал, что в период формирования теории групп были сомнения, не следует ли в качестве основного взять понятие полугруппы. Самостоятельное развитие теории началось в 1920–30 гг. Насколько нам известно, книга [4] является первой монографией по теории полугрупп, а первое систематическое изложение теории топологических полугрупп, по-видимому, было предпринято в [5].

О структуре групп известно много, и эта информация занимает весьма заметное место в математике (и физике) – упомянем лишь теории групп Ли и конечных групп. Положительное решение пятой проблемы Гильберта о характеризации групп Ли как локально евклидовых топологических групп в работах Ивасавы, Монтгомери–Зиппина и Ямабе в середине 20-го века привело одновременно к определенной законченности (хотя и не завершению) теории локально компактных групп, сведя многие относящиеся к ним вопросу к случаю групп Ли. Особый интерес с точки зрения теории автоморфных функций, теории чисел или теории локально однородных римановых пространств представляют дискретные подгруппы групп Ли [6]. Метрический подход к изучению дискретных групп, предложенный Громовым (см. ците7, 8), все еще не исчерпал своих возможностей. Близкий класс составляют вполне несвязные топологические группы – их теория находятся на подъеме и имеет интересные нерешенные задачи, во многом в связи с p-адическими аналитическими группами [9]. Интенсивно развивается теория бесконечномерных групп Ли [10].

В отношении топологических полугрупп дела обстоят намного хуже. Видимо, не следует ожидать важных результатов, относящихся ко всему этому классу – он слишком велик. Имеются общезначимые результаты, относящиеся к классу компактных, в частности, конечных полугрупп – они касаются существования идемпотентов и однопараметрических полугрупп. Компактная полугруппа имеет наименьший идеал, распадающийся в объединение групп [5]. Интересен вопрос о вложимости (топологических) полугрупп в (топологические) группы. А. И. Мальцев нашел критерий такой вложимости для (абстрактных) полугрупп и выяснил, что в общем случае класс полугрупп, вложимых в группы, не может быть задан никакой конечной системой условных тождеств [11, 12]. В частности, существуют полугруппы с единицей и двусторонним сокращением, не вложимые в группы. Критерии вложимости полугруппы в группу в общем случае малоэффективны. С другой стороны, всякая коммутативная полугруппа P с сокращением вложима в группу [3]; правда, если P – топологическая полугруппа, то содержащая P группа G может не допускать хорошей топологии.

Рассмотрение подполугрупп (топологической) группы G важно и потому, что задание лево- или правоинвариантного частичного предпорядка на G эквивалентно выбору подполугруппы P с единицей в G [13]. В случае групп Ли соответствующий инфинитезимальный объект – касательный к полугруппе конус C в алгебре Ли, задающий левоинвариантное поле конусов на группе.

Изучение инвариантных порядков на однородных пространствах связано с задачами теории относительности. Аксиоматическому обоснованию теории относительности и изучению групп автоморфизмов упорядоченных пространств посвящен обзор [14], в котором излагаются результаты основанной А. Д. Александровым школы хроногеометрии. Отметим, что в последние годы изучаются анизотропные финслеровы обобщения теории относительности [15–17].

Где-то с начала 80-х годов начинается интенсивное изучение довольно широкого круга вопросов оптимального управления, теории упорядочений групп, комплексного анализа, теории представлений, связанных с конусом C [18–22]. Представление об этом можно получить по сборникам [23, 24].

Множества группы G образуют полугруппу SG относительно естественного умножения с единицей $\{e\}$. При этом G является подгруппой полугруппы SG. Если G коммутативна, часто вместо SG рассматривают фактор-полугруппу SG/G. Для топологической группы G естественно рассматривать подполугруппу BSG в SG, состоящую из ограниченных подмножеств в G, или подполугруппы в BSG. Напомним, что множество $A \subseteq G$ называется *ограниченным*, если, для каждой окрестности $U \ni e$, A покрывается конечным числом левых (правых) сдвигов окрестности U. Если G локально компактна, то это условие эквивалентно относительной компактности множества A. Полугруппа BSG получает естественную структуру топологической полугруппы; окрестность множества A из BSG состоит из всех множеств в BSG, содержащихся в множестве AU или UA, где U – окрестность e в G. Если топология G определяется лево- или правоинвариантной метрикой d, то указанная топология в BSG также определяется естественной лево- или правоинвариантной метрикой, индуцированной d; в качестве множеств U выше берутся открытые шары в (G,d) с центром в e. Если G коммутативна, то вместо полугруппы BSG естественно рассматривать более широкую в общем случае полугруппу $B(d)SG$ метрически ограниченных подмножеств в (G,d) с соответствующей инвариантной метрикой (если G некоммутативна или не локально компактна, то операция умножения в полугруппе $B(d)SG$ может быть разрывной). Частный пример такой метрики – известная метрика Хаусдорфа на полугруппе (выпуклых) ограниченных подмножеств банахова пространства. В случае коммутативной группы G все рассмотренные конструкции применимы к полугруппе BSG/G вместо BSG.

Аксиоматика геометрий на топологической группе G в [25] основана на наблюдении, что для левоинвариантной внутренней метрики d на G шары с центром в e образуют однопараметрическую подполугруппу в $B(d)SG$ с радиусами шаров в качестве вещественного параметра. В работе [1] доказано, что эти аксиомы (в случае полной метризуемой группы G) эквивалентны тому условию, что надграфик функции $\mathfrak{t}(g) := d(e,g)$ является острой открытой локально порожденной подполугруппой S группы $G\times\mathbb{R}$, инвариантной относительно инволюции $\iota : (g,t) \to (g^{-1},t)$. Двойственным образом, левоинвариантная внутренняя антиметрика τ на G, определенная в [1], характеризуется условием, что функция $\mathfrak{t}(g) := \max\{0, \tau(e,g)\}$ неотрицательна, непрерывна, а ее подграфик является (открытой) острой локально порожденной подгруппой группы $G\times\mathbb{R}$. Эквивалентные аксиоматики МП (метризованного порядка) и АМ (антиметрики) для τ основаны соответственно на рассмотрении некоторой подполугруппы в SG и некотором обобщении понятия левоинвариантной кинематической метрики Р. И. Пименова [26], подчиненной дополнительному условию совпадения интервальной (александровской) топологии для τ на G с исходной. Если G – конечномерное векторное пространство, то всякая открытая острая локально порожденная подполугруппа в G есть открытый острый выпуклый конус C в G, а всякая инвариантная антиметрика τ на G является непрерывной антинормой, областью положительных значений которой является некоторый конус C указанного вида; понятие антинормы (антиметрики) в некотором смысле двойственно понятию нормы (метрики). Замкнутая острая подполугруппа P топологической группы G определяет частичный порядок на G. Для локально компактной группы G верно и обратное утверждение. Локально порожденная топологическая полугруппа, по определению, алгебраически и топологически порождается любой окрестностью своей единицы.

Таким образом, внутреннюю метрику (или антиметрику) можно определить как однопараметрическую полугруппу множеств или как острую локально порожденную полугруппу в $G\times\mathbb{R}$. Эта точка зрения приводит к естественным обобщениям понятия внутренней метрики на многопараметрический (возможно, некоммутативный) случай. Нам пока известен только один содержательный пример – полярные представления компактных групп Ли. Оказывается, этот класс линейных представлений (обладающий рядом хороших алгебраических свойств) можно охарактеризовать следующим образом: семейство выпуклых оболочек орбит представления образует полугруппу множеств относительно сложения по Минковскому. При этом выяснилось, что эта полугруппа параметризуется точками некоторого симплициального конуса. Поэтому полугруппу их выпуклых оболочек можно понимать как векторнозначную норму на пространстве представления со значениями в C, по которой можно строить векторнозначные внутренние метрики, например, на компактных группах Ли.

В случае группы Ли G семейство острых локально порожденных подполугрупп совпадает с классом острых полугрупп Ли S в G; последние задаются условием инфинитезимальной порожденности: полугруппа, алгебраически порожденная экспонентой касательного конуса $\mathcal{C}(S)$, плотна в S. При этом не исключается *неголономный* случай, когда $\dim\mathcal{C}(S) < \dim G$. Неголономные внутренние метрики (Карно–Каратеодори) рассматривались в работах [27, 28].

Всякую левоинвариантную внутреннюю антиметрику τ на группе Ли G можно понимать как анизотропную финслерову метризацию некоторого глобального порядка, определяемого упомянутой (может быть, неголономной) полугруппой Ли S. При этом $\tau(g,h)$ равно точной верхней границе длин временноподобных (относительно упомянутого порядка) кусочно-гладких путей, соединяющих g и h. Длина пути равна интегралу длины его касательного вектора относительно левоинвариантной антинормы на касательном расслоении TG группы Ли G, определяемой некоторой единственной антинормой ν на V, пересечение областей положительности и непрерывности которой совпадает с C.

Как показывают примеры, в общем случае функция $\nu^+ := \max\{\nu, 0\}$ разрывна, хотя функция $\tau^+ := \max\{\tau, 0\}$ непрерывна. Это резко контрастирует со случаем левоинвариантной внутренней метрики ρ на группе Ли [29]. Отметим, что основной результат последней статьи, согласно которому всякая левоинвариантная внутренняя метрика на группе Ли (вообще говоря, неголономная) финслерова, можно легко доказать, воспользовавшись совпадением классов локально порожденных полугрупп и полугрупп Ли (этот факт применяется к надграфикам функции расстояния до единицы).

§2. Предварительные сведения

В работе [1] мы ввели три системы аксиом для метризованного порядка на топологической группе, связанные с понятиями полугруппы множеств, (почти) внутренней антиметрики и подграфика функции "антирасстояния" до единицы группы. Там же была доказана их эквивалентность. Приведем их формулировки, предварительно дав необходимые определения. Прежде всего, речь идет о понятиях острой и локально порожденной полугруппы, которые играют важную роль при нашем подходе. Мы дадим эти определения в немного большей, чем в [1] общности, не предполагая их вложенными в группы. Это не лишено смысла – хотя в содержательных примерах полугруппы вложены в группы, часто бывает так, что на них имеется естественная топология, отличная от индуцированной.

Пусть S – топологическая хаусдорфова полугруппа с единицей e. Обозначим через $\mathcal{T}_e$ семейство всех открытых окрестностей единицы в S. Будем называть S *локально порожденной*, если она топологически порождается любой окрестностью единицы в ней:

$$\operatorname{clos}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} V^n\right) = S \quad \text{для всех} \quad V \in \mathcal{T}_e.$$

Полугруппу S будем называть *острой*, если

(A) для каждой окрестности $U \in \mathcal{T}_e$ найдется $V \in \mathcal{T}_e$ такая, что условие $xy \in V$ влечет включения x, $y \in U$. Другими словами, если мало произведение, то малы и сомножители. В [1, лемма 1.2] было доказано, что для полугрупп, вложенных в группы, условие (A) может быть заменено без потери общности более сильным:

(A') для каждой окрестности $U \in \mathcal{T}_e$ существует $V \in \mathcal{T}_e$ такая, что $V \subseteq U$ и

$$x, y \in S, \quad xy \in V \quad \Longrightarrow \quad x, y \in V.$$

Если S вложена в хаусдорфову топологическую группу G, условимся считать S наделенной индуцированной из G топологией и предполагать выполненным включение

$$e \in \operatorname{clos} S \tag{1}$$

(а не $e \in S$). В локально компактной G локально порожденная полугруппа S является острой тогда и только тогда, когда

$$\operatorname{clos} S \cap \operatorname{clos} S^{-1} = \{e\} \tag{2}$$

[1, предложение 1]. При выполнении (2) правило

$$x \leq y \Leftrightarrow x^{-1}y \in \operatorname{clos} S$$

задает левоинвариантный порядок в G.

Пусть G – связная группа Ли с алгеброй Ли $\mathcal{G}$. Для множества $C \subseteq \mathcal{G}$ через $\mathcal{S}(C)$ будет обозначаться замыкание полугруппы, порожденной множеством $\exp(C)$; для полугруппы $S \subseteq G$ положим

$$\mathcal{C}(S) := \{x \in \mathcal{G} : \exp(tx) \in S \quad \text{для всех} \quad t > 0\}.$$

Ясно, что $S \supseteq \mathcal{S}(\mathcal{C}(S))$, если S замкнута, и что включение $C \subseteq \mathcal{C}(\mathcal{S}(C))$ выполняется для всех множеств C. Полугруппа S называется *полугруппой Ли*, если $\mathcal{S}(\mathcal{C}(S)) = S$; конус C называется *глобальным*, если $\mathcal{C}(\mathcal{S}(C)) = C$. Соответствие между глобальными конусами и полугруппами Ли взаимно однозначно ввиду очевидных равенств

$$\mathcal{C}(\mathcal{S}(\mathcal{C}(S))) = \mathcal{C}(S), \quad \mathcal{S}(\mathcal{C}(\mathcal{S}(C))) = \mathcal{S}(C). \tag{3}$$

Размерность конуса $\mathcal{C}(S)$ может быть меньше размерности S. Глобальные конусы замкнуты, как и полугруппы Ли; для полугрупп это следует немедленно из определений, для конусов – из непрерывности exp. Полугруппы Ли можно понимать как инфинитезимально порожденные. Очевидно, всякая полугруппа Ли локально порождена. Если полугруппа острая, то верно и обратное утверждение.

Произведение AB множеств A, B определяется как совокупность всех попарных произведений ab, где $a \in A$, $b \in B$; при этом произведение будем считать пустым, если хотя бы один из сомножителей пуст. Семейство множеств $\{S_t\}_{t\geq 0}$ будет называться *однопараметрической полугруппой множеств*, если $S_tS_s = S_{t+s}$ для всех t, $s \geq 0$ и, кроме того, $S_t \neq \varnothing$ при $t \geq 0$. Это определение влечет равенство $S_0^2 = S_0$, которое означает, что S_0 – полугруппа. Будем называть $\{S_t\}_{t\geq 0}$ *неубывающей* (*невозрастающей*) полугруппой, если $S_t \subseteq S_s$ при $t \leq s$ (соответственно, $t \geq s$). Каждая полугруппа множеств $\{S_t\}_{t\geq 0}$ задает полугруппу $\widetilde{S}$ в $S\times\mathbb{R}^+$, $\mathbb{R}^+ = [0, \infty)$, по формуле

$$\widetilde{S} = \{(g, t) : g \in S_t\} = \bigcup_{t\geq 0} (S_t \times \{t\}) . \qquad (4)$$

Полугруппа множеств $\{S_t\}_{t\geq 0}$ будет называться *острой* или *локально порожденной*, если соответствующими свойствами обладает $\widetilde{S}$.

Пусть M – метрическое пространство с метрикой ρ; последняя называется *внутренней*, если

$$\rho(x, y) = \inf \Lambda(\gamma),$$

где inf берется по семейству путей $\gamma : [a, b] \to M$, соединяющих x и y. *Длина* $\Lambda(\gamma)$ пути γ задается формулой

$$\Lambda(L) = \sup \sum_{k=0}^{n} \rho(\gamma(t_k), \gamma(t_{k+1})),$$

где sup берется по множеству всех конечных разбиений $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$ отрезка $[a, b]$.

Перейдем к формулировке аксиоматических систем. *Метризованным порядком* на G будем называть семейство $\mathfrak{U} = \{U_t\}_{t\geq 0}$ непустых множеств в G удовлетворяющих следующим условиям.

МП$_1$. Если $t \leq s$, то $U_s \subseteq U_t$, причем включение строгое при $t < s$.

МП$_2$. $U_sU_t \subseteq U_{s+t}$ для всех $t, s \geq 0$.

МП$_3$. $\bigcap\limits_{t>0} U_t = \varnothing$.

МП$_4$. Множества U_s, $s \geq 0$, открыты, а множества $\bigcap\limits_{0\leq s<t} U_s$ замкнуты в G для всех $t > 0$.

МП$_5$. U_0 – острая полугруппа.

МП$_6$. Для всех $t \geq 0$ и каждой окрестности единицы V в G,

$$U_t = \bigcup_{n=1}^{\infty} (U_{t/n} \cap V)^n.$$

Этот набор аксиом условимся обозначать через МП. Положим

$$\tau(g,h) = \sup\{s \in \mathbb{R} : g^{-1}h \in U_s\} \tag{5}$$

(если $g^{-1}h \notin U_s$ для всех $s \geq 0$, то $\tau(g,h) = -\infty$). Функция τ на $G \times G$ будет называться *антиметрикой*, если

$$\tau(g,h) + \tau(h,f) \leq \tau(g,f).$$

для всех g, h, $f \in G$. Формула (5) определет антиметрику, если выполняется МП; более того, антиметрика τ почти внутренняя. Будем называть антиметрику τ *почти внутренней*, если для всех g, $h \in G$ таких, что $\tau(g,h) > 0$ и каждой окрестности V единицы в G,

$$\tau(g,h) = \sup \sum_{k=0}^{n} \tau(x_k, x_{k+1}), \tag{6}$$

где sup берется по всем конечным множествам $x_0 = g, x_1, \dots, x_n = h$ в G таким, что $\tau(x_k, x_{k+1}) > 0$ и $x_k^{-1}x_{k+1} \in V$ для $k = 0, 1, \dots, n-1$. Метрика ρ будет называться *почти внутренней*, если для каждой пары $g, h \in G$ и любого $\varepsilon > 0$

$$\rho(g,h) = \inf \sum_{k=0}^{n} \rho(x_k, x_{k+1}),$$

где inf берется по всем конечным множествам $x_0 = g, x_1, \dots, x_n = h$ в G таким, что $\rho(x_k, x_{k+1}) < \varepsilon$. Пусть $L : [a,b] \to G$ – U_0-временноподобный путь (т.е. $\tau(L(t), L(s)) > 0$ при $t < s$). Определим его *длину* формулой

$$\lambda_\tau(L) = \inf \sum_{k=0}^{n} \tau(L(t_k), L(t_{k+1})), \tag{7}$$

где inf берется по всем конечным разбиениям $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$ отрезка $[a, b]$. Длина не зависит от параметризации и поэтому определена для кривой (понимаемой как класс эквивалентности путей). Будем называть антиметрику τ *внутренней*, если для любых $g, h \in G$ таких, что $\tau(g, h) > 0$, выполняется равенство

$$\tau(g, h) = \sup \lambda(L),$$

где sup берется по всем непрерывным U_0-временноподобным путям L с началом в g и концом в h. Если G полна (в частности, локально компактна) и метризуема, то любая почти внутренняя (анти)метрика является внутренней. ([1, теорема 2.2], [25]). Удобно рассматривать вместе с τ функцию

$$\tau^+(g, h) = \max\{0, \tau(g, h)\}.$$

Вторая система аксиом АМ относится к антиметрике τ.

АМ$_1$. Множество $\tau(G \times G)$ содержится в $\{-\infty\} \cup (0, \infty)$ и плотно в этом множестве.

АМ$_2$. Для всех f, g, $h \in G$,

$$\tau(g, h) \geq \tau(g, f) + \tau(f, h).$$

АМ$_3$. Антиметрика τ левоинвариантна.

АМ$_4$. Функция τ^+ непрерывна на $G \times G$.

АМ$_5$. Для каждой окрестности $\mathcal{V}$ произвольного элемента $x \in G$ существуют g, $h \in G$ такие, что $x \in \{f : \tau(g, f) > 0,\ \tau(f, h) > 0\} \subseteq \mathcal{V}$.

АМ$_6$. Антиметрика τ почти внутренняя.

Наконец, рассмотрим еще один набор аксиом для функции $\mathfrak{t}$ на G.

ПГ$_1$. Функция $\mathfrak{t}$ принимает значения в $[0, \infty)$ и непрерывна на G.

ПГ$_1$. Подграфик П этой функции, определенный формулой

$$\Pi = \{(g, t) \in G \times \mathbb{R} :\ 0 < t < \mathfrak{t}(g)\},$$

является острой полугруппой.

ПГ$_1$. Полугруппа П локально порождена.

По определению острой полугруппы и ПГ$_2$, $\Pi \neq \varnothing$. Поэтому $\mathfrak{t}$ не может быть равной нулю тождественно.

Каждый из трех объектов в системах МП, АМ, ПГ естественно связан с другими. Для МП и АМ соответствие реализуется (5) и

$$U_s = \{g \in G :\ \tau(e, g) > s\}. \tag{8}$$

Метризованный порядок $\mathfrak{U} = \{U_t\}_{t\geq 0}$ в МП задает функцию $\mathfrak{t}$ в ПГ по правилу

$$\mathfrak{t}(g) = \inf\{t \geq 0 : g \notin U_t\} \tag{9}$$

(если g содержится во всех множествах U_t, $t > 0$, то $\mathfrak{t}(g) = +\infty$); равенство

$$U_t = \{g \in G : \mathfrak{t}(g) > t\} \tag{10}$$

восстанавливает $\{U_t\}_{t\geq 0}$. Наконец, $\mathfrak{t}$ и τ связаны формулами

$$\mathfrak{t}(g) = \tau^+(e, g), \tag{11}$$

$$\tau(g, h) = \sigma(\mathfrak{t}(g^{-1}h)), \tag{12}$$

где $\sigma(t) = t$ для $t > 0$ и $\sigma(t) = -\infty$, если $t \leq 0$. Следующая теорема была доказана в [1].

Теорема 1. *Системы аксиом МП, АМ и ПГ равносильны, если объекты, к которым они относятся, связаны формулами* (8)–(12), (5).

Примеры антиметрик можно строить, исходя из метрик, как показано в примере ниже. Получающийся при этом класс антиметрик, правда, удовлетворяет дополнительному и довольно ограничительному условию равномерной непрерывности.

Пример 1. Пусть ρ – левоинвариантная метрика на топологической группе G. Тогда функция

$$\mathfrak{t}(g, t) = \max\{t - \rho(e, g)\}$$

является левоинвариантной антиметрикой. При этом $\mathfrak{t}$ (почти) внутренняя тогда и только тогда, когда таким свойством обладает ρ.

Римановы и финслеровы метрики на многообразиях дают модельные примеры внутренних метрик. При классическом подходе основным является понятие длины кривой, а расстояние между точками x, y определяется как точная нижняя граница длин $\Lambda(\gamma)$ соединяющих их кусочно-гладких путей:

$$\Lambda(\gamma) = \int_a^b |\gamma'(t)|\, dt, \tag{13}$$

$$\rho(x, y) = \inf \Lambda(\gamma), \tag{14}$$

где $|\cdot|$ – норма на касательном расслоении многообразия. Заменяя семейство $\mathfrak{T}$ всех кусочно-гладких путей меньшим семейством, можно получать другие примеры внутренних метрик. Естественное требование к семейству состоит в том, чтобы оно содержало кривые, соединяющие любые наперед заданные пары точек. Это так, например, в случае, если $\mathfrak{T} = \mathfrak{T}(\mathcal{D})$ состоит из кусочно-гладких кривых, касательных к вполне неинтегрируемому гладкому распределению $\mathcal{D}$ подпространств касательных пространств на многообразии M (т.е. $\mathcal{D}$ – подрасслоение касательного расслоения с той же базой и меньшим слоем; приведенное выше условие можно считать определением полной неитегрируемости, так как по теореме Рашевского–Чжоу [30, 31] оно эквивалентно тому, что алгебра Ли касательных к $\mathcal{D}$ векторных полей порождает алгебру Ли всех векторных полей на M).

Для того, чтобы определить длину кривой из $\mathfrak{T}(\mathcal{D})$ по формуле (13), достаточно знать норму на $\mathcal{D}$. Такие метрики известны как *субримановы* или *метрики Карно–Каратеодори* [27]. В [29, 33] было доказано, что эта конструкция универсальна в классе инвариантных внутренних метрик на однородных пространствах. Именно, любая инвариантная внутренняя метрика на фактор-пространстве группы Ли по ее компактной подгруппе финслерова, вообще говоря, неголономная.

Подобная конструкция и аналогичный результат имеют место и для антиметрик. Опишем их подробнее, начав с понятия *антинормы на открытом остром конусе* U в конечномерном вещественном векторном пространстве $\mathcal{V}$. По определению, это функция $\mathfrak{t}$ на $\mathcal{V}$ такая, что

a) $\mathfrak{t} \geq 0$ на $\mathcal{V}$, $\mathfrak{t} > 0$ на открытом остром конусе U и $\mathfrak{t} = 0$ вне U;
b) $\mathfrak{t}$ положительно однородна степени 1: $\mathfrak{t}(tv) = t\mathfrak{t}(v)$, если $t \geq 0$ и $v \in \mathcal{V}$;
c) $\mathfrak{t}(u+v) \geq \mathfrak{t}(u) + \mathfrak{t}(v)$ для всех $u, v \in U$.

Заметим, что $\mathfrak{t}$ вогнута на U. Поэтому она непрерывна в любой точке U. Из a) следует, что $\mathfrak{t}$ непрерывна снизу; соответствующая непрерывная сверху функция

$$\mathfrak{t}^\star(\xi) = \limsup_{\eta \to \xi} \mathfrak{t}(\eta), \quad \xi \in \mathcal{V},$$

тоже будет называться антинормой (или *непрерывной сверху антинормой*). Отметим, что $\mathfrak{t}^\star$ непрерывна на $\operatorname{clos} U$. Если $\mathfrak{t}$ непрерывна на $\mathcal{V}$, условимся называть ее *непрерывной антинормой*. Таким образом, непрерывность $\mathfrak{t}$ равносильна условию

$$\mathfrak{t}^{\star}(\xi) = \mathfrak{t}(\xi) \quad \text{для всех} \quad \xi \in \mathcal{V}. \tag{15}$$

Предложение 1. *Функция* $\mathfrak{t}$, *удовлетворяющая условию* a), *является антинормой тогда и только тогда, когда ее подграфик*

$$\Pi = \{\xi \oplus t : 0 < t < \mathfrak{t}(\xi)\}$$

является открытым острым конусом в $\mathcal{V} \oplus \mathbb{R}$. *Эта функция непрерывна в том и только в том случае, когда множество*

$$U_1 = \{\xi : \mathfrak{t}(\xi) \geq 1\}$$

замкнуто.

Иногда антинормы, не предполагающиеся непрерывными, будут называться *разрывными*.

Через l_g, r_g обозначаются левые и правые сдвиги на группе G:

$$l_g(h) = gh, \quad r_g(h) = hg. \tag{16}$$

Пусть C_g – левый сдвиг подмножества C алгебры Ли $\mathcal{G} = T_eG$ (т.е. $C_g = d_e l_g(C) \subseteq T_gG$). Семейство всех кусочно гладких путей $\gamma : [a,b] \to G$, удовлетворяющих условию

$$\gamma'(t) \in C_{\gamma(t)}, \quad t \in [a,b], \tag{17}$$

где (17) предполагается выполненным для обеих односторонних производных, обозначим через $\mathfrak{T}(C)$. Пусть $\mathcal{V}$ – линейное подпространство $\mathcal{G}$, $\mathfrak{t}_*$ – антинорма на $U \subseteq \mathcal{V}$. Векторы из U и пути из $\mathfrak{T}(U)$ будут называться U-*временноподобными*. Длину U-временноподобного пути $\gamma : [a,b] \to G$ и (анти-)расстояние определим формулами, подобными (13) и (14):

$$\lambda(\gamma) = \int_a^b \mathfrak{t}_*(\gamma'(t))\, dt, \tag{18}$$

$$\tau(x,y) = \sup \lambda(\gamma), \tag{19}$$

$$\mathfrak{t}_*(\gamma'(t)) = \mathfrak{t}_*\big((d_e l_{g(t)})^{-1}(\gamma'(t))\big),$$

где sup берется по множеству всех U-временноподобных путей с началом x и концом y, и $\tau(x,y) = -\infty$, если таких путей не существует. Это определение корректно тогда и только тогда, когда $\mathfrak{T}(U)$ не содержит нетривиальных замкнутых путей. Даже в этом случае функция τ^+ не обязана быть непрерывной (пример 18). Может случиться и так, что $\mathfrak{t}$ непрерывна для разрывной $\mathfrak{t}_*$ (пример 17). Эти и другие примеры, приведенные в работе, показывают, что результат, подобный упомянутому выше результату для метрик, не может быть получен без дополнительных ограничений. Тем не менее, мы рассматриваем здесь его вариант, включающий в себя сформулированное выше утверждение об инвариантных внутренних метриках. В соответствии с нашим подходом, он вытекает из следующей теоремы.

Теорема 2. *Пусть G – группа Ли, S – острая замкнутая полугруппа в G. Полугруппа S локально порождена тогда и только тогда, когда она является полугруппой Ли. В этом случае конус $\mathcal{C}(S)$ является острым, выпуклым и замкнутым.*

Этот факт давно известен специалистам, однако нам не удалось найти подходящую ссылку. Проблема характеризации условий, при которых данная антинорма на $\mathcal{C}(S)$ порождает непрерывную антиметрику, остается открытой. Мы не будем ее здесь рассматривать, считая заданным метризованный порядок на группе Ли.

В качестве почти немедленного следствия теоремы, получаем описание острых локально порожденных полугрупп в векторных группах (т.е. аддитивных группах векторных пространств).

Следствие. *Острая полугруппа в конечномерной векторной группе локально порождена тогда и только тогда, когда она является выпуклым острым конусом.*

§3. Абелевы группы

Первый шаг к характеризации метризованных порядков в группах Ли состоит в решении этой задачи для конечномерных векторных групп.

Теорема 3. *Пусть $\{U_t\}_{t\geq 0}$ – метризованный порядок в конечномерном векторном пространстве $\mathcal{V}$. Тогда функция*

$$\mathfrak{t}(x) = \inf\{t \geq 0 : x \notin U_t\} \tag{20}$$

является непрерывной антинормой на $\mathcal{V}$. Обратно, каждая непрерывная антинорма $\mathfrak{t}$ в $\mathcal{V}$ определяет метризованный порядок по формуле

$$U_t = \{v \in \mathcal{V} : \mathfrak{t}(v) > t\}, \quad t \geq 0. \tag{21}$$

Для антинорм имеются естественные аналоги понятий, связанных с нормами – например, их можно задавать как функционалы Минковского своих "единичных шаров".

Теорема 4. *Если $\mathfrak{t}$ – антинорма на конечномерном вещественном векторном пространстве $\mathcal{V}$, то пара множеств $\{U_0, U_1\}$, определенная формулой* (21), *удовлетворяет следующим условиям:*

U_0 является открытым острым выпуклым конусом а U_1 – открытым выпуклым подмножеством U_0 со свойствами

$$tU_1 \subset U_1 \quad \textit{для всех} \quad t > 1, \quad U_0 = \bigcup_{t>0} tU_1. \tag{22}$$

Если $\mathfrak{t}$ непрерывна, то

$$\operatorname{clos} U_1 \subset U_0. \tag{23}$$

Обратно, каждая пара $\{U_0, U_1\}$, состоящая из открытого острого конуса U_0 и открытого выпуклого множества $U_1 \subset U_0$, удовлетворяющего (22), *отвечает антинорме $\mathfrak{t}$, заданной формулой*

$$\mathfrak{t}(x) = \inf\{t > 0 : x \notin tU_1\}, \tag{24}$$

причем $\mathfrak{t}$ непрерывна, если выполняется условие (23). *Соответствующий метризованный порядок определяется формулой*

$$U_t = tU_1, \quad t > 0, \tag{25}$$

причем указанное соответствие между антинормами τ и парами $\{U_0, U_1\}$ взаимно однозначно.

Другая характеризация основана на модификации понятия опорной функции (или двойственной нормы). Пусть U – открытый выпуклый конус в вещественном векторном пространстве $\mathcal{V}$, $K \subseteq U$. Определим *опорную функцию* h_K на двойственном пространстве $\mathcal{V}^*$ формулой

$$h_K(\xi) = \begin{cases} \inf\{\xi(x) : x \in K\}, & \xi \in U^*, \\ 0, & \xi \notin U^*, \end{cases}$$

где

$$U^* = \{\xi \in \mathcal{V}^* : \xi(x) > 0 \quad \text{для всех} \quad x \in U \setminus \{0\}\} \tag{26}$$

является внутренностью двойственного к U конуса. Неравенство $h_K(\xi) \geq 1$ определяет *полярное множество* K^*. Очевидно, $tK^* \subseteq K^*$ для $t > 1$ и всех $K \subseteq U$.

Теорема 5. *Пусть U – открытый острый выпуклый конус в вещественном векторном пространстве $\mathcal{V}$, U^* задано формулой (26). Тогда для каждого непустого множества $Q \subseteq U^*$ такого, что $0 \notin \operatorname{clos} Q$, опорная функция h_Q является антинормой на U. Непрерывность h_Q равносильна тому, что для каждой окрестности V нуля в $\mathcal{V}^*$ и всех $\xi \in \partial U^*$ существует $t > 0$ такое, что*

$$(V + t\xi) \cap (Q + U^*) \neq \varnothing. \tag{27}$$

Имеется большое количество содержательных примеров антинорм; первый из тех, что приведены ниже (в известной мере дублирующий пример 1) показывает, что это понятие в каком-то смысле обобщает понятие нормы. В описании примеров мы всегда предполагаем, что $\mathfrak{t}(x) = 0$ для $x \notin U$, где U – открытый выпуклый острый конус. Отметим, что U^* – конус телесный и острый.

Пример 2. Пусть $\|\ \|$ – норма на $\mathcal{V}$, $\mathfrak{t}(v \oplus t) = \max\{0, t - \|v\|\}$. Функция $\mathfrak{t}$ является непрерывной антинормой на надграфике $\|\ \|$.

Пример 3. Положим

$$\eta(v) = \int\limits_{U^*} e^{-\langle v, \xi \rangle} dm(\xi),$$

где m – мера Лебега. Функция η – выпуклая (более того, $\log \eta$ является выпуклой функцией) и однородна степени $-n$; поэтому множество $U_1 = \{x \in U : \eta(x) < 1\}$ выпукло, откуда следует, что функция $\mathfrak{t}(v) = \eta(v)^{-1/n}$ является антинормой. Так как $\eta(v) \to +\infty$ при $v \to \partial U$, $\mathfrak{t}$ непрерывна. Пусть $\operatorname{Aut}(U)$ – группа линейных автоморфизмов конуса U, $\operatorname{Aut}_0(U) = \operatorname{Aut}(U) \cap \operatorname{SL}(\mathcal{V})$. Ясно, что $\mathfrak{t}$ инвариантна относительно $\operatorname{Aut}_0(U)$. Если U – эллиптический конус, то $\mathfrak{t}$ – лоренцева антиметрика.

Пример 4. Неравенство Брунна–Минковского [32] для пары выпуклых множеств A, B

$$\operatorname{Vol}(A + B)^{1/n} \geq \operatorname{Vol}(A)^{1/n} + \operatorname{Vol}(B)^{1/n}$$

означает, что функция $\mathrm{Vol}\,(K)^{1/n}$ определяет антинорму на конусе (полугруппе) выпуклых тел в $\mathbb{R}^n$, факторизованному по параллельным переносам. Метрика Хаусдорфа инвариантна относительно суммы Минковского и, тем самым, задает в ней структуру топологической полугруппы (с сокращением).

Пример 5. Положительные эрмитово-симметрические $n \times n$-матрицы образуют открытый выпуклый конус U_n в пространстве H_n всех эрмитово-симметрических матриц того же размера. Функция

$$\mathfrak{t}(A) = (\det A)^{1/n}$$

является непрерывной антинормой на U_n. Обратное неравенство треугольника для $\mathfrak{t}$ известно как неравенство Минковского для определителей. При $n = 2$ матрицы Паули

$$\sigma_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

образуют вещественный базис в линейном пространстве H_2. Если при этом $A = \sum_{k=0}^{3} a_k \sigma_k$, то $\det A = a_0^2 - a_1^2 - a_2^2 - a_3^2$. Таким образом, $(H_2, \mathfrak{t})$ – не что иное, как пространство-время Минковского (пространство СТО).

Пример 6. Пусть U – открытый острый выпуклый конус в $\mathcal{V}$. Для $x \in U$ положим

$$\mathfrak{t}(x) = \mathrm{Vol}\,(I_x)^{1/n},$$

где $\mathrm{Vol}\,(T)$ обозначает объем тела T, $n = \dim \mathcal{V}$, а $I_x = U \cap (x - U)$ – порядковый интервал. Обратное неравенство треугольника является следствием очевидного включения $I_x + I_y \subseteq I_{x+y}$ и неравенства Брунна–Минковского. Эта антинорма также $\mathrm{Aut}_0(U)$-инвариантна. Если конус U однороден (т.е. $\mathrm{Aut}(U)$ действует на U транзитивно), то антинорма примера 3 скалярно кратна этой. В частности, отсюда следует равенство $\eta(x)\mathrm{Vol}\,(I_x) = \mathrm{const}$; для неоднородных конусов оно неверно. Однородные выпуклые конусы описаны в работе [34].

Пример 7. Пусть W – конечномерное векторное пространство, K – острый открытый конус в W, $\pi : W \to V$ – сюрьективный линейный оператор с ядром H такой, что $\dim H = m > 0$, $H \cap \operatorname{clos} K = \{0\}$ и $\pi K = U$. Функция $\mathfrak{t}(x) = \mathrm{Vol}\,(\pi^{-1}(x) \cap K)^{1/m}$, где Vol обозначает m-мерный объем, является антинормой на K. Если $\dim(\pi^{-1} x \cap \operatorname{clos} K) < m$ для всех $x \in \partial U$, то $\mathfrak{t}$ непрерывна.

В конечномерном векторном пространстве любые две нормы эквивалентны. Для антинорм аналогичное утверждение неверно. Дело в том, что они могут иметь различное асимптотическое поведение вблизи границы конуса. Следующий пример представляет набор антинорм, которые являются, в понятном смысле, слабейшими.

Пример 8. Выберем $v \in U$ и положим $U_0 = U$, $U_1 = v + U$. Эта пара задает антинорму

$$\mathfrak{t}_v(x) = \sup\{t > 0 : x - tv \in U\}. \tag{28}$$

Пусть $\widetilde{\mathfrak{t}}$ – другая антинорма на U и $\widetilde{U}_1 = \{x \in \mathcal{V} : \widetilde{\mathfrak{t}}(x) > 1\}$. Включение $x \in \widetilde{U}_1$ влечет $x + U \subseteq \widetilde{U}_1$. Следовательно, для всех $x \in U$

$$\mathfrak{t}_v(x) \leq \frac{\widetilde{\mathfrak{t}}(x)}{\widetilde{\mathfrak{t}}(v)}.$$

Следующий пример содержит конструкцию двойственной антинормы.

Пример 9. Пусть $\mathfrak{U}$ – метризованный порядок на $\mathcal{V}$, заданный парой (U_0, U_1). Положим

$$U_1^* = \{\xi \in U_0^* : \inf_{v \in U_1} \xi(v) > 1\},$$
$$U_0^* = \{\xi \in V^* : \xi(v) > 0 \quad \text{для всех} \quad v \in \operatorname{clos} U_0\}$$

Если $\operatorname{clos} U_1^* \subset U_0^*$, то пара (U_0^*, U_1^*) задает метризованный порядок на V^*. Это условие не выполняется для порядков $\mathfrak{U}_v$ примера (8) (см. теорему 3); антинорма $\mathfrak{t}^*$, двойственная к (28), представляет собой сужение на конус U_0^* линейного функционала $\xi \to \xi(v)$ и является сильнейшей: для любой другой антинормы $\widetilde{\mathfrak{t}}$ найдется $C > 0$ такое, что $\widetilde{\mathfrak{t}}(x) \leq C\mathfrak{t}^*(x)$ для всех $\xi \in U_0^*$.

Естественно возникает вопрос о структуре множества $\mathfrak{A}(C)$ антинорм на конусе C в конечномерном векторном пространстве. Очевидно, что $\mathfrak{A}(C)$ замкнуто относительно операций взятия суммы, умножения функции на положительное число и минимума функций. Таким образом, $\mathfrak{A}(C)$ является выпуклым конусом с дополнительной операцией min. Приведенные выше примеры наталкивают на мысль о существовании и других операций в $\mathfrak{A}(C)$, не выводящих за его пределы. Например, если f, $g \in \mathfrak{A}(C)$, то

$\sqrt{fg} \in \mathfrak{A}(C)$. Естественное обобщение таково: если η – антинорма на положительном квадранте в $\mathbb{R}^2$, то $\eta(\mathfrak{t}_1, \mathfrak{t}_2) \in \mathfrak{A}(C)$ для всех $\mathfrak{t}_1, \mathfrak{t}_2 \in \mathfrak{A}(C)$, что дает континуальное семейство операций на $\mathfrak{A}(C)$.

Далее, антинорму примера 6 можно задать формулой $\mathfrak{t} = (\chi_C * \chi_C)^{1/n}$, где $*$ обозначает операцию свертки.

Задача 1. Верно ли, что из f, $g \in \mathfrak{A}(C)$ следует, что $(f * \chi_C)^{\frac{1}{n+1}}$ и $(f * g)^{\frac{1}{n+2}}$ содержатся в $\mathfrak{A}(C)$ (степени поставлены так, чтобы свертка имела степень однородности 1).

Возможно и другое описание функций из $\mathfrak{A}(C)$. Существует гиперплоскость H в V, проходящая через нуль и такая, что $\operatorname{clos} C \cap H = \{0\}$. Для произвольного вектора $c \in C$ множество $B = \operatorname{clos} C \cap (c + H)$ – выпуклый компакт. Функция $\mathfrak{t} \in \mathfrak{A}(C)$ полностью определяется своими значениями на B. Очевидно, сужение $\mathfrak{r}$ функции $\mathfrak{t}$ на B удовлетворяет условиям:

1) $\mathfrak{r}$ – неотрицательна на B и положительна на внутренности B относительно $c + H$;

2) $\mathfrak{r}$ вогнута на B:

$$\mathfrak{r}(tx + (1-t)y)t \geq \mathfrak{r}(x) + (1-t)\mathfrak{r}(y)$$

для всех $x, y \in B$, $t \in [0, 1]$.

Функция $\mathfrak{t}$ непрерывна тогда и только тогда, когда

3) $\mathfrak{r}(x) = 0$ для x из границы множества B в $c + H$.

Обратно, всякая функция $\mathfrak{r}$ на B со свойствами 1), 2) определяет функцию $\mathfrak{t} \in \mathfrak{A}(C)$, которая непрерывна лишь при выполнении 3). Если φ – непрерывная возрастающая вогнутая функция на $[0, \infty)$ с условиями $\varphi(0) = 0$, $0 < \varphi(t) < \infty$ при $t > 0$, то $\varphi \circ \mathfrak{r}$ обладает теми же свойствами, что дает еще одно континуальное семейство операций на $\mathfrak{A}(C)$.

Пример 10. Энтропия Шеннона

$$H(p) = -\sum_{k=1}^{n} p_k \log_2 p_k,$$

где n конечно или равно ∞, вектора $p = (p_1, \dots)$ из вероятностного симплекса $B = \{p : \sum_{k=0}^{n} p_k = 1,\ p_k \geq 0, \dots\}$ удовлетворяет условиям 1), 2). Условие 3) выполняется лишь при $n = 2$. Можно считать, что B при $n = \infty$ вложен в пространство l^p, $p \geq 1$. Обычно B снабжается слабой топологией.

Пример 11. Пусть $P(G)$ – множество всех вероятностных мер μ на метризуемой локально компактной группе G, абсолютно непрерывных относительно меры Хаара dg с функцией плотности $p(g)$. Непосредственным обобщением энтропии Шеннона является интеграл

$$H(\mu) = -\int_G [\log_2 p(g)]\, p(g)\, dg.$$

Если G связна и не компактна, то эта функция, в отличие от предыдущего примера, может менять знак. $H(\mu)$ вогнута относительно выпуклых комбинаций функций плотностей $p(g)$ мер μ и можно ограничиться рассмотрением выпуклого множества $P_H^+(G)$ тех мер $\mu \in P(G)$, для которых $H(\mu) \geq 0$. Множество $P_H^+(G)$ непусто. Н. Винер в [35], ссылаясь на высказанное в личном сообщении мнение Дж. фон Неймана, рассматривал $-H(\mu)$ при $G = \mathbb{R}$ как разумную меру количества информации, связанного с μ.

Случай общих топологических абелевых групп заметно отличается от векторного. Отметим сначала несколько фактов, относящихся к ним. Согласно теореме 1.5 и следствию 1.2 работы [25], всякая односвязная локально компактная линейно связная группа G с первой аксиомой счетности изоморфна прямому произведению односвязной группы Ли и не более чем счетного числа компактных простых связных односвязных групп Ли. В частности, если группа G абелева, то она топологически изоморфна конечномерному вещественному векторному пространству. Вследствие замечания к теореме 2.2 работы [1], допускающая почти внутреннюю антиметрику полная метризуемая группа линейно связна; отсюда вытекает следующее утверждение.

Предложение 2. *Всякая связная односвязная локально компактная абелева группа с (почти) внутренней (анти)метрикой топологически изоморфна конечномерному вещественному векторному пространству.*

Как показывает следующий пример, без условия локальной компактности группа может быть не изоморфна векторному пространству даже при существенном усилении остальных условий предложения 2.

Пример 12. Пусть $\mathfrak{B}$ – множество всех лебеговских классов борелевских подмножеств конечной меры Лебега m в $\mathbb{R}$. Положим

$d(A,B) := m(A \triangle B)$, где $A, B \in \mathfrak{B}$, а $\triangle$ – симметрическая разность. Заметим, что операция $\triangle$ равносильна сложению характеристических функций множеств по модулю 2. Поэтому $\mathfrak{B}$ является абелевой группой, каждый элемент которой инволютивен, с единицей $\varnothing$. В частности, $\mathfrak{B}$ не изоморфна топологическому векторному пространству и не допускает введения антиметрики. Можно доказать, что $\mathfrak{B}$ полна и стягиваема, а метрика d – внутренняя и удовлетворяет (глобально) условию существования кратчайших. Отображения $A \to \lambda A$, $\lambda > 0$, являются одновременно метрическими подобиями с коэффициентом λ и автоморфизмами группы. Стягивание $H : \mathfrak{B} \times [0,1] \to \mathfrak{B}$, определенное равенством $H(A,t) = tA$, непрерывно благодаря тому, что характеристические функции измеримых множеств можно приблизить в $L^1(\mathbb{R})$ финитными непрерывными функциями. Всякая изометрия $(\mathfrak{B}, d)$ на себя представляется в виде суперпозиции левого сдвига и автоморфизма φ группы $\mathfrak{B}$, сохраняющего меру множеств; φ является и автоморфизмом σ-алгебры $\mathfrak{B}$. Если заменить $\mathbb{R}$ на отрезок $[0,1]$, то все предыдущие утверждения, за исключением существования метрических подобий, сохраняются. В этом случае σ-алгебра $\mathfrak{B}$ вместе с мерой m известна как непрерывное пространство Лебега; известно, что автоморфизм φ индуцируется автоморфизмом пространства Лебега.

Отметим, что полугруппа U_0, отвечающая метризованному порядку на вещественном векторном пространстве V, выпуклая тогда и только тогда, когда U_0 – конус. В бесконечномерном случае U_0 не обязано быть конусом. Более того, выпуклость U_0 – довольно существенное ограничение на V.

Предложение 3. *Всякое топологическое вещественное линейное пространство V с первой аксиомой счетности допускает метризованный порядок $\{U_t\}_{t\geq 0}$ с выпуклым множеством U_0 тогда и только тогда, когда V нормируемо.*

Для бесконечномерных топологических векторных пространств, в том числе нормируемых, существование метризованных порядков с невыпуклым U_0, видимо, типично. Примеры можно строить, исходя из примеров внутренних метрик с невыпуклыми шарами: если ρ – такая метрика на пространстве V, $\mathfrak{r}(v) = \rho(0, v)$, то для антиметрики на $V \times \mathbb{R}$, построенной по $\mathfrak{r}$ как в примере 1, множество U_0 не выпукло (так как проекция на V сечения U_0 гиперплоскостью вида $(\cdot, t_0)$, $t_0 > 0$, является шаром). Два примера таких внутренних метрик построены Радстрёмом в [36]. Пусть $\|f\|_p = \int\limits_0^1 |f(x)|^p\,dx$, где $f \in L^p[0,1]$ и $0 < p \le 1$.

Пример 13. В пространстве $V = L^p[0,1]$ при $0 < p \le 1$ стандартная метрика, определяемая функцией $\mathfrak{r}(f) = \|f\|_p$, является внутренней. Одну из кратчайших, соединяющих 0 с f (множество кратчайших несчетно), можно реализовать так: $\gamma(t) = \chi_t f$, где χ_t – характеристическая функция отрезка $[0,t]$. Если $p < 1$, то шары не выпуклые.

В этом примере пространство V при $p < 1$ не локально выпукло. Подобные примеры есть и в локально выпуклых пространствах.

Пример 14. Пусть Z – аддитивная группа функций из $V = L^1[0,1]$, принимающих почти всюду лишь целые значения. Для $t > 0$ обозначим через U_t открытый шар относительно нормы $\|\ \|_1$ с центром в нуле. Положим $Z_t = U_t \cap Z$ и, для $c > 0$, $V_t^c = U_{ct} + Z_t$. В [36] показано, что существует внутренняя метрика ρ_s на V, для которой (при $t > 0$) V_t^c является шаром радиуса t с центром в нуле и что множество V_t^c не выпукло при достаточно малых $c > 0$.

Согласно приведенным примерам, в бесконечномерном случае острая локально порожденная полугруппа не обязана быть конусом. Из предыдущего легко извлекается пример более серьезной патологии: касательный конус может оказаться тривиальным.

Пример 15. Обозначим через Z^p (Z_+^p) аддитивную (полу)группу функций из $L^p := L^p[0,1]$, $0 < p < \infty$, принимающих почти всюду целые (неотрицательные) значения. Ясно, что Z^p и Z_+^p замкнуты в L^p. Если $\|f_n\| \to 0$ при $n \to \infty$, $f_n \in Z^p$, то меры множеств $\{x \in [0,1] : f_n(x) > 0\}$ стремятся к нулю. Поэтому у любой последовательности вида $\{t_n f_n\}$ предел может быть лишь нулевым. Тем не менее, нетрудно показать, что полугруппа Z^p острая и локально порожденная.

Группа $G = Z^2$ имеет удивительные характеризации и свойства. Упомянем только некоторые из них.

1) Как метрическая подгруппа в L^2, группа G характеризуется следующим свойством: для любого натурального числа n, $G = \sum_{i=1}^n G_i$, где $G_i \perp G_j$ при $i \ne j$ и все G_i метрически подобны (и топологически изоморфны) группе G с коэффициентом подобия $1/\sqrt{n}$.

2) Другое описание связано с матрицами Адамара. Напомним, что $m\times m$-матрица H называется *матрицей Адамара*, если ее элементы равны ± 1 и $HH^T = mI$. Будем считать, что первая строка и первый столбец матрицы H состоят из $+1$. Отождествим L^2 с l^2, выбирая в L^2 ортонормированный базис $\mathfrak{E} = \{e_n\}$ и сопоставляя ему канонический базис в l^2. Пусть $H(n, m(n))$ – произвольная последовательность $m(n)\times m(n)$-матриц Адамара ($m(n) \geq 2$). Обозначим через A_k аддитивную подгруппу в l^2, порожденную векторами, координатами которых относительно первых векторов базиса $\mathfrak{E}$ являются строки матрицы

$$\frac{1}{l}(H(1, m(1)) \otimes \cdots \otimes H(k, m(k)), \quad l = \prod_{i=1}^{k} m(i),$$

где $\otimes$ обозначает тензорное (кронекеровское) произведение матриц.

Группа A_k образует кубическую решетку в $\mathbb{R}^l \subset l^2$, причем $A_k \subset A_{k+1}$. Группа G изометрически изоморфна группе $\operatorname{clos} A$, где $A = \bigcup A_k$. В этой реализации G можно наглядно интерпретировать как бесконечномерную кубическую решетку в l^2, кубы которой имеют большую диагональ длины 1 и бесконечно малые ребра. "Глубокие дыры" этой решетки имеют радиус $\frac{1}{2}$ и состоят из всех точек смежного класса $\frac{1}{2}e_1 + G$. Объединение сфер радиуса $\frac{1}{2}$ с центрами из смежного класса $\frac{1}{2}e_1 + 2G$ покрывает G. При этом все указанные ранее порождающие множества групп A_k находятся на пересечении Φ группы G со сферой $S(\frac{1}{2}e_1, \frac{1}{2})$; их объединение алгебраически порождает полугруппу, плотную в Z^2_+. Множество Φ указанным ранее изоморфизмом $l^2 \to L^2$ отождествляется с семейством характеристических функций борелевских подмножеств $[0, 1]$ (содержащимся в Z^2).

G имеет следующие свойства.

3) Группа $G/2G$ топологически изоморфна группе $\mathfrak{B}$ примера 12 (на отрезке $[0, 1]$). Естественная проекция $p : G \to G/2G$ индуцирует единственную метрику ρ на $\mathfrak{B}$ (эквивалентную метрике примера 12, но не совпадающую с ней), относительно которой p является субметрией. При этом множество Φ изометрично отображается на $(\mathfrak{B}, \rho)$.

4) Пересечение G со всяким конечномерным подпространством дискретно. Замкнутые подгруппы банаховых пространств с таким свойством изучались раньше (см. [37] и цитированную там

литературу).

5) Группа G линейно связна и, вследствие характеризации 1), топологически содержит гильбертов кирпич (тихоновский куб I^ω). Поэтому G имеет бесконечную (несчетную) размерность Урысона–Менгера.

6) (К. Плаут). Если H – подгруппа в l^2 такая, что $l^2/\operatorname{clos} H$ локально компактна, то $G + H$ (и, следовательно, $A + H$) плотна в l^2.

Задача 2. В связи со свойством 4) возникает вопрос: какие решетки в конечномерных евклидовых пространствах метрически подобны пересечениям G с конечномерными подпространствами l^2?

Задача 3. Охарактеризовать острые и локально порожденные подполугруппы банаховых пространств с тривиальным касательным конусом. Верно ли, что каждая такая полугруппа является пересечением острого конуса с замкнутой (линейно) связной подгруппой аддитивной группы пространства со свойством 4)?

§4. Антиметрики на группах Ли

Теперь мы можем сформулировать основной результат работы.

Теорема 6. *Пусть τ – внутренняя антиметрика в группе Ли G, t определена формулой* (11). *Тогда существует подпространство $\mathcal{V}$ алгебры Ли $\mathcal{G}$, алгебраически порождающее $\mathcal{G}$, и антинорма t_* на $\mathcal{V}$ такие, что t совпадает с функцией, построенной по t_* посредством формул* (19) *и* (18). *При этом t однозначно определяет $\mathcal{V}$ и t_*.*

Антинорма t_* не обязана быть непрерывной. Приведенный ниже пример 17 показывает, что этот эффект, по-видимому, имеет неголономный характер. Проблема определения условий, при выполнении которых непрерывной антинорме на заданном глобальном конусе отвечает непрерывная антиметрика, кажется весьма нетривиальной. Так, точная верхняя граница в (19) может быть бесконечной, а ее конечность не означает, что функция t в (19) непрерывна даже при непрерывной t_*. Мы приводим частичные результаты и иллюстрирующие примеры. Левоинвариантный порядок, определенный полугруппой S, называется *глобально гиперболическим*, если каждый порядковый интервал $S \cap xS^{-1}$

компактен; мы будем в этом случае называть глобально гиперболической полугруппу S.

Предложение 4. *Пусть S – острая полугруппа Ли с непустой внутренностью в группе Ли G. Следующие условия равносильны:*

1) *S глобально гиперболична;*
2) *для каждого $r > 0$ существует $R > 0$ такое, что*

$$\sup \Lambda(\gamma) < R < \infty \tag{29}$$

где $\sup$ *берется по всем S-временноподобным путям $\gamma : [a, b] \to G$ со свойством $\rho(\gamma(a), \gamma(b)) < r$, где ρ – произвольная левоинвариантная внутренняя метрика на G.*

Теорема 7. *Пусть S – острая глобально гиперболическая полугруппа Ли с непустой внутренностью, $C = \mathcal{C}(S)$. Тогда каждая непрерывная антинорма C определяет антиметрику по формулам* (18) *и* (19).

Гипотеза 1. *Верно и обратное утверждение.*

Для наугад взятого острого конуса $C \subseteq \mathcal{G}$ нельзя ожидать, что любая антинорма на C задает некоторую антиметрику на G. Во-первых, линейная оболочка конуса C должна алгебраически порождать алгебру Ли $\mathcal{G}$. Во-вторых, как показывает пример 18, необходимо предположить глобальность C. Даже если все эти условия выполнены, но $\mathcal{S}(C)$ не глобально гиперболична, то некоторые антинормы не определяют антиметрик.

Задача 4. Пусть C – глобальный конус в $\mathcal{G}$ такой, что его линейная оболочка V алгебраически порождает $\mathcal{G}$. Верно ли, что для каждого $v \in \mathrm{Int}C$ антинорма $\mathfrak{t}_v$ примера 8 определяет антиметрику посредством формул (18) и (19)?

Мы рассматриваем также проблему существования временноподобной длиннейшей кривой, соединяющей заданные точки x и y, т.е. пути $\gamma : [a, b] \to G$ такого, что

$$\gamma(a) = x, \quad \gamma(b) = y, \quad \lambda(\gamma) = \tau(x, y). \tag{30}$$

Без потери общности мы можем предположить, что $x = e$ и γ параметризована длиной дуги. Удобно расширить определение временноподобной кривой на липшицев случай: липшицев по отношению к римановой метрике путь $\gamma : [a, b] \to G$ будем называть C-*временноподобным*, если (17) выполняется для почти всех

$t \in [a, b]$. Ясно, что определение от выбора римановой метрики не зависит. Пусть S – острая полугруппа Ли в группе Ли G. Путь $\gamma : [a, b] \to G$ будет называться *S-временноподобным*, если

$$\gamma(s)^{-1}\gamma(t) \in S \quad \text{для всех} \quad s, t \in [a, b], \ s < t.$$

Теорема 8. *Пусть $\mathfrak{U} = \{U_t\}_{t \geq 0}$ – метризованный порядок в группе Ли G. Существует окрестность V единицы e в G такая, что для произвольной точки $p \in V \cap U_0$ существует длиннейшая липшицева кривая, соединяющая точки e и p.*

В соответствии с принятым нами подходом, этот результат выводится из теоремы, относящейся к полугруппам Ли.

Теорема 9. *Пусть S – острая полугруппа Ли в группе G, $C = \mathcal{C}(S)$. Каждая S-временноподобная кривая допускает липшицеву параметризацию. Липшицев путь является S-временноподобным тогда и только тогда, когда он C-временноподобен. Далее, существует окрестность $V \in \mathcal{T}_e$ такая, что для каждой точки $p \in S \cap V$ существует C-временноподобный липшицев путь, соединяющий e и p; если S глобально гиперболична, то такой путь существует для всех $p \in S$.*

Построение длиннейшей кривой сводится к нахождению $\operatorname{clos}\Pi$-временноподобной кривой, соединяющей единицу с точкой из замыкания подграфика. Если t, Π – те же, что и в ПГ, $p \in \partial\Pi$ и $\operatorname{clos}\Pi$-временноподобный путь γ соединяет $(e, 0)$ и $p = (q, \mathsf{t}(q))$, то проекция γ на G является длиннейшей кривой с началом e и концом q (при этом неважно, какое определение временноподобной кривой мы используем – для полугрупп Ли они равносильны). Глобально длиннейшей кривой может и не быть.

Задача 5. Верно ли, что для строго выпуклого $\operatorname{clos} U_1$ окрестность $V \in \mathcal{T}_e$ можно выбрать так, что соединяющая точки e и $g \in V \cap U_0$ длиннейшая кривая единственна?

Для неголономной метрики на трехмерной группе Гейзенберга локальной единственности нет – она нарушается в точках центра ввиду инвариантности метрики относительно группы вращений.

Сформулированные выше результаты приводят к простому и концептуальному доказательству теоремы, доказанной в [29].

Теорема 10. *Каждая левоинвариантная внутренняя метрика на группе Ли является финслеровой, быть может, неголономной.*

Приведем несколько иллюстрирующих примеров, начав с простейшего примера неголономного метризованного порядка.

Пример 16. Пусть $G = H_3$ – трехмерная группа Гейзенберга, X, Y, Z – образующие ее алгебры Ли $\mathcal{G} = \mathcal{H}_3$, $[X, Y] = Z$, $\mathcal{V}$ – двумерное подпространство с базисом X, Y. Положим

$$\mathcal{U}_0 = \{xX + yY : x > 0,\, y > 0\}.$$

Функция

$$\mathfrak{t}_*(x, y) = \begin{cases} \sqrt{xy}, & (x, y) \in \mathcal{U}_0, \\ 0, & (x, y) \notin \mathcal{U}_0, \end{cases} \tag{31}$$

является антинормой на $\mathcal{V}$, определяющей антиметрику $\mathfrak{t}$ в G вышеописанным способом. Группу H_3 можно реализовать как $\mathcal{H}_3$ с умножением, определенным формулой Кэмпбелла–Хаусдорфа:

$$(x, y, z)(\xi, \eta, \zeta) = (x + \xi,\, y + \eta,\, z + \zeta + \frac{1}{2}(x\eta - y\xi)).$$

Заметим, что в этой реализации

$$\{a, b\} := aba^{-1}b^{-1} = [a, b] \quad \text{для всех} \quad a, b \in H_3 = \mathcal{H}_3. \tag{32}$$

Пусть U_0 – множество конечных точек временноподобных кривых с началом в e. Для каждой точки $p_0 = (x_0, y_0, z_0) \in U_0$ существует длиннейшая, соединяющая e и p_0. Она может быть найдена как решение вариационной задачи

$$y(0) = 0,\ y(x_0) = y_0, \quad \frac{1}{2}x_0 y_0 - \int\limits_0^{x_0} y(x)\, dx = z_0;$$

$$\int\limits_0^{x_0} \sqrt{y'(x)}\, dx \to \max.$$

Решая ее стандартным способом, получаем $y = \frac{ax}{b-x}$ для некоторых a и b. Таким образом, проекции длиннейших на плоскость xy являются дугами гипербол, асимптоты которых параллельны осям координат. Функция $\mathfrak{t}$ не выписывается явно, но можно задать параметрически границу множества U_t, $t > 0$. Поскольку $\mathfrak{t}_*$ инвариантна по отношению к гиперболическим вращениям, $\mathfrak{t}$ инвариантна относительно автоморфизмов $(x, y, z) \to (\mu x, \mu^{-1} y, z)$,

$\mu > 0$, Поэтому достаточно найти сужение функции $\mathfrak{t}$ на плоскость α, заданную уравнением $x = y$. Пусть (x, z) – координаты в α для точки (x, x, z). Тогда формулы

$$\begin{cases} z = t^2 \dfrac{\operatorname{sh}\theta - \theta}{\theta^2}, \\ x = t \dfrac{2\operatorname{sh}\frac{\theta}{2}}{\theta} \end{cases} \tag{33}$$

задают параметризацию кривой $\partial U_t \cap \alpha$.

В связи с этим примером отметим следующее сходство (не случайное). Пусть $|(x, y)| = \sqrt{x^2 + y^2}$ – евклидова длина в плоскости xy, B_1 – единичный шар для построенной по ней метрики Карно–Каратеодори в H_3. Очевидно, B_1 инвариантен относительно вращений вокруг оси z. Вычисления показывают, что пересечение B_1 с плоскостью xz ограничено кривой

$$\begin{cases} z = t^2 \dfrac{\theta - \sin\theta}{2\theta^2}, \\ x = t \dfrac{2\sin\frac{\theta}{2}}{\theta}. \end{cases} \tag{34}$$

В первом из следующих примеров функция $\mathfrak{t}_*$ разрывна, а $\mathfrak{t}$ – непрерывна; во втором непрерывна $\mathfrak{t}_*$, а разрывна $\mathfrak{t}$.

Пример 17. Пусть G – та же, что и в примере 16. Подграфик антинормы этого примера – открытый в $\mathcal{V} \times \mathbb{R}$ выпуклый конус

$$C = \{(\xi, \eta, t) \in \mathcal{V} \times \mathbb{R} : 0 < t < \sqrt{\xi\eta}\}.$$

Пусть $\widetilde{C}$ – сумма C и луча

$$Z^+ = \{(0, 0, \zeta, 0) \in \mathcal{G} \oplus \mathbb{R} : \zeta > 0\}.$$

Существует единственная антинорма $\mathfrak{t}_*$ на $\mathcal{G}$ с подграфиком C. Так как $\mathcal{V} \oplus \mathbb{R}$ – опорная гиперплоскость к $\widetilde{C}$ и $\widetilde{C} \cap (\mathcal{V} \oplus \mathbb{R}) = C$, $\mathfrak{t}_*$ разрывна на $\mathcal{G}$. В то же время полугруппа $\widetilde{\Pi} \subset G \times \mathbb{R}$, порожденная $\exp(\widetilde{C})$, – подграфик непрерывной функции $\mathfrak{t}$, задающей антиметрику в соответствии с теоремой 1. Она является подграфиком некоторой функции, так как из $0 < s < t$ и $(g, t) \in \widetilde{\Pi}$, очевидно, следует $(g, s) \in \widetilde{\Pi}$. Так как $\widetilde{C} = C \oplus Z^+$, для всех $\xi \in \widetilde{C}$ имеется единственное разложение $\xi = \eta + \zeta$ с $\zeta \in Z^+$, $\eta \in C$. Следовательно, для всех $\xi_1, \ldots, \xi_n \in \widetilde{C}$

$$\exp(\xi_1) \ldots \exp(\xi_n) = \zeta \exp(\eta_1) \ldots \exp(\eta_n),$$

где $\zeta \in Z^+$, $\eta_1, \ldots, \eta_n \in C$. Это влечет равенства

$$\widetilde{U}_t = Z^+ U_t, \quad t \geq 0, \tag{35}$$

где U_t – та же, что в примере 16 и

$$\widetilde{U}_t = \{g \in G : (g, t) \in \widetilde{\Pi}\}.$$

Поэтому

$$\widetilde{U}_t \cap \alpha = (U_t \cap \alpha) \cup \{(x, x, z) : x > t, \, z > 0\},$$

где α – плоскость $x = y$ того же примера. Используя (35) и явный вид множеств $\{U_t\}_{t \geq 0}$ примера 16, легко проверить, что семейство $\{\widetilde{U}_t\}_{t \geq 0}$ удовлетворяет МП.

В следующих двух примерах понадобится простая конструкция путей (ломаных) из $\mathfrak{T}(C)$, где $C \subseteq \mathcal{G}$. Для $x \in C$ положим

$$\overline{x}(t) = \exp(tx), \quad t \in [0, |x|]. \tag{36}$$

Ясно, что $\overline{x} \in \mathfrak{T}(\{x\})$. Далее, пусть $\gamma_k : [0, s_k] \to G$ – пути с $\gamma_k(0) = e$, $k = 1, 2$. Их произведение $\gamma_1 \cdot \gamma_2 : [0, s_1 + s_2] \to G$ определим равенством

$$\gamma_1 \cdot \gamma_2(t) = \begin{cases} \gamma_1(t), & t \in [0, s_1], \\ \gamma_1(s_1)\gamma_2(t - s_1), & t \in [s_1, s_1 + s_2]. \end{cases} \tag{37}$$

Очевидно, $\gamma_1 \cdot \gamma_2(t) \in \mathfrak{T}(C)$, если $\gamma_1, \gamma_2 \in \mathfrak{T}(C)$. Более того,

$$\gamma_1 \cdot \gamma_2(s_1 + s_2) = \gamma_1(s_1)\gamma_2(s_2). \tag{38}$$

Применяя эту конструкцию к конечным множествам $\mathbf{x}=(x_1, \ldots, x_n)$ точек из C, получаем кусочно-гладкий путь

$$\overline{\mathbf{x}} = \overline{x}_1 \cdot \overline{x}_2 \cdot \ldots \cdot \overline{x}_n \in \mathfrak{T}(C), \tag{39}$$

соединяющий e и $\exp(x_1) \cdots \exp(x_n)$.

Пример 18. Пусть $G = H_3 \times \mathbb{R}$. Отождествим $\mathcal{G} = \mathcal{H}_3 \oplus \mathbb{R}$ с G. Положим

$$C = \{(x, y, z, r) \in \mathcal{G} : z^3 r \geq (x^2 + y^2)^2, \; z \geq 0\}.$$

Сечение C гиперплоскостью $z = 1$ – выпуклое множество $r \geq (x^2+y^2)^2$. Поэтому C – выпуклый конус. Очевидно, C – острый. Существует непрерывная антинорма $\mathfrak{t}_*$ на $\mathcal{G}$ такая, что

$$\mathfrak{t}_*(x,y,1,r) > \sqrt{r}, \text{ если } r \geq 2(x^2+y^2)^2. \tag{40}$$

Пусть

$$r > 0, \quad a_r = (\sqrt[4]{\frac{r}{2}}, 0,0,0), \quad b_r = (0, \sqrt[4]{\frac{r}{2}}, 0, 0) \text{ и } c_r = (0,0,1,r).$$

Тогда $c_r \pm a_r, c_r \pm b_r \in C$; более того, для этих векторов выполняется условие (40). Следовательно, для

$$\mathbf{x}_r = (c_r + b_r, c_r + a_r, c_r - b_r, c_r - a_r)$$

и $\mathbf{s} = (s,s,s,s)$, $s > 0$, кривая $\gamma = \overline{\mathbf{x}}_r^{\mathbf{s}}$ временноподобна. Так как c_r принадлежит центру $\mathcal{G}$, то согласно (32),

$$\gamma(4s) = 4sc_r + s^2[b_r, a_r] = (0,0,4s - s^2\sqrt{\frac{r}{2}}, 4sr).$$

Для $s = 4\sqrt{\frac{2}{r}}$

$$\gamma(4s) = (0,0,0,16\sqrt{2r}) \to e = (0,0,0,0) \text{ при } r \to 0.$$

Далее, для того же s, ввиду (18) и (40),

$$\lambda(\gamma) = \int_0^{4s} \mathfrak{t}_*(\gamma'(t))\,dt \geq 4s\sqrt{r} = 16\sqrt{2}.$$

Поэтому функция $\mathfrak{t}$, определенная (19), не может быть непрерывной в точке e.

Отметим, что конус C не глобален; однако подобные примеры имеются и для глобальных конусов.

Пример 19. Пусть группа $G = H_3 \times \mathbb{R}$ реализована как алгебра Ли $\mathcal{G} = \mathcal{H}_3 \oplus \mathbb{R}$ с умножением, определенным по формуле Кэмпбелла–Хаусдорфа:

$$(x,y,z,r)(\xi,\eta,\zeta,\rho) = (x+\xi, y+\eta, z+\zeta+\frac{1}{2}(x\eta - y\xi), r+\rho). \tag{41}$$

Для s, $r > 0$ положим

$$a_1 = (0, 2s, s^2, r), \qquad a_2 = (2s, 0, s^2, r),$$
$$a_3 = (0, -2s, s^2, r), \quad a_4 = (-2s, 0, s^2, r).$$

Тогда

$$a_1 a_2 a_3 a_4 = (0, 0, 0, 4r) \tag{42}$$

при любом s. Пусть C – эллиптический конус $4zr - x^2 - y^2 > 0$, $r > 0$. Если $r > 1$, то $a_k \in C$ для всех $k = 1, \ldots, 4$. Положим $a = (x, y, z, r)$. Функция

$$\mathsf{t}_*(a) = \begin{cases} \sqrt{4zr - x^2 - y^2}, & a \in C, \\ 0, & a \notin C \end{cases} \tag{43}$$

является антинормой в $\mathcal{G}$. Пусть $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_4)$ и $\overline{\mathbf{a}}$ – соответствующие кривые. Тогда кривая $\overline{\mathbf{a}}$ C-временноподобна и

$$\lambda(\overline{\mathbf{a}}) = \mathsf{t}_*(a_1) + \cdots + \mathsf{t}_*(a_4) = 8s\sqrt{r-1}. \tag{44}$$

Объединяя (43), (19) и (44), получаем, что расстояние между e и $(0, 0, 0, 4r)$ бесконечно для $r > 1$.

Пусть $\langle M, \rho \rangle$ – метрическое пространство, $a > 0$. Назовем *a-подобием* преобразование $\delta : M \to M$ такое, что

$$\rho(\delta(x), \delta(y)) = a\rho(x, y)$$

для всех $x, y \in M$. Это определение имеет очевидный аналог для антиметрик. Внутренняя антиметрика примера 16 допускает a-подобие для любого $a > 0$ – это автоморфизм

$$\delta_a(x, y, z) = (ax, ay, a^2 z).$$

В работе [38] было доказано, что локально-компактное однородное пространство с внутренней метрикой допускает a-подобие (при $a \neq 1$) тогда и только тогда, когда оно изометрично односвязной нильпотентной группе Ли с градуированной алгеброй Ли и левоинвариантной (в неабелевом случае) метрикой Карно–Каратеодори. Для внутренних антиметрик аналогичный результат неверен, как показывает следующий простой пример.

Пример 20. Пусть G_1 и G_2 – группы Ли с внутренними антиметриками, построенными по антинормам $\mathsf{t}_*^{(1)}, \mathsf{t}_*^{(2)}$ соответственно.

Предположим, что G_2 допускает a-подобие δ с $a \neq 1$ (например, $G_2 = H_3$ из примера 16). Положим $G = G_1 \times G_2$ и, для $x = (x_1, x_2)$, $y = (y_1, y_2)$,

$$\tau(x, y) = \sqrt{\tau_1(x_1, y_1)\tau_2(x_2, y_2)}.$$

Тогда преобразование $x \to x_1 \times \delta(x_2)$ является $\sqrt{a}$-подобием в G.

Теорема 11.

1. *Всякая параметризованная длиной дуги кратчайшая $g : [0, a] \to G$ левоинвариантной внутренней метрики ρ на группе Ли G, определяемой нормой на подпространстве $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{G}$ с замкнутым единичным шаром $\mathcal{B}_1$, является оптимальной по быстродействию липшицевой траекторией системы управления $g(t)^{-1}g'(t) = u \in \mathcal{B}_1$.*
2. *(Левоинвариантный принцип максимума Понтрягина) Всякая такая кратчайшая $g(t)$ с началом в $e \in G$ есть липшицева интегральная кривая (касающаяся для почти всех $t \in [0, a]$) дифференциального включения*
$$\{d_e l_g(u) \in T_g G \mid \psi_g(u) = \max\{\psi_g(v) : v \in \operatorname{clos} \mathcal{B}_1\}\}, \qquad (45)$$
где $\psi_g := (\mathrm{Ad}_g)^*(\psi_0) \in \mathcal{G}^*$, а $\psi_0 \in \mathcal{G}^*$ – некоторый фиксированный ковектор с
$$\max\{\psi_0(v) : v \in \mathcal{B}_1\} = 1.$$
Если множество $\mathcal{B}_1$ строго выпукло, то дифференциальное включение (45) есть непрерывное векторное поле на G.
3. *(Закон сохранения) При этом $\psi(t)(g(t)^{-1}g'(t)) = 1$ для всех $t \in [0, a]$, где $\psi(t) := (\mathrm{Ad}_{g(t)})^*(\psi_0)$.*

Теорема 12.

1. *Всякая параметризованная длиной дуги временноподобная длиннейшая $g : [0, a] \to G$ левоинвариантной внутренней антиметрики τ на группе Ли G, определяемой антинормой на подпространстве $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{G}$ с открытым единичным шаром $\mathcal{U}_1$, является оптимальной по медленнодействию липшицевой траекторией системы управления $g(t)^{-1}g'(t) = u \in \operatorname{clos} \mathcal{U}_1$.*
2. *(Левоинвариантный принцип минимума Понтрягина) Всякая такая длиннейшая $g(t)$ с началом в $e \in G$ есть липшицева интегральная кривая (касающаяся для почти всех $t \in [0, a]$) дифференциального включения*
$$\{d_e l_g(u) \in T_g G \mid \psi_g(u) = \min\{\psi_g(v) : v \in \operatorname{clos} \mathcal{U}_1\}\}, \qquad (46)$$

где $\psi_g := (\mathrm{Ad}_g)^*(\psi_0) \in \mathcal{G}^*$, *а* $\psi_0 \in \mathcal{G}^*$ *– некоторый фиксированный ковектор с условием*

$$\min\{\psi_0(v) : v \in \operatorname{clos} \mathcal{U}_1\} = 1.$$

Если множество $\operatorname{clos}\mathcal{U}_1$ *строго выпукло, то дифференциальное включение* (46) *есть непрерывное векторное поле на* G.

3. *(Закон сохранения) При этом* $\psi(t)(g(t)^{-1}g'(t)) = 1$ *для всех* $t \in [0, a]$, *где* $\psi(t) := (\mathrm{Ad}_{g(t)})^*(\psi_0)$.

Представление τ компактной группы Ли G в конечномерном евклидовом пространстве $\mathcal{V}$ называется *полярным*, если существует линейное подпространство $\mathcal{A} \subset \mathcal{V}$ такое, что

(а) любая орбита $O_v = \tau(G)v$, $v \in \mathcal{V}$, пересекает $\mathcal{A}$;

(б) в каждой точке u из $O_v \cap \mathcal{A}$ касательное пространство $\mathcal{T}_u$ к орбите O_u перпендикулярно $\mathcal{A}$.

Так как каждая точка $O_v \cap \mathcal{A}$ изолированна в O_v, то множество $O_v \cap \mathcal{A}$ конечно. Этот класс представлений был определен в [39]. Модельный пример доставляет присоединенное представление G в алгебре Ли $\mathcal{G}$, причем роль $\mathcal{A}$ в этом случае исполняет подалгебра Картана. Еще один довольно очевидный пример – *s-представления*, т.е. представления изотропии симметрических пространств $M = H/K$. Они реализуются в пространствах $\mathcal{V}$ из разложения Картана $\mathcal{H} = \mathcal{K}+\mathcal{V}$, причем в качестве $\mathcal{A}$ можно взять максимальное абелево подпространство $\mathcal{V}$.

В работе [39] доказано, что полярные представления *орбитально эквивалентны* s-представлениям, что означает существование вложения $G \mapsto K$, для которого G транзитивна на любой орбите K в $\mathcal{V}$. Этот результат был выведен в [39] из полученной там классификации полярных представлений, причем некоторые случаи были оставлены читателю. Концептуальное доказательство и вывод полной классификации имеются в [40, 42].

Понятие полярного представления можно определить и для комплексных редуктивных групп Ли; существенную часть определения (которое можно найти в [43, п. 8.6]) составляет условие параллельности касательных пространств в точках открытого подмножества подпространства $\mathcal{V}$, которое пересекает орбиты общего положения трансверсально. Задача их классификации решена в [41].

Свойство полярности представления тесно связано с другими хорошими свойствами представления (в классе связных неприводимых простых линейных групп Ли оно равносильно тому, что алгебра полиномиальных инвариантов представления свободна, см. [43]).

Оказывается, имеется еще одна характеризация полярных представлений компактных групп Ли. Условимся обозначать через $\widehat{Q}$ выпуклую оболочку множества Q, а через O_v – орбиту $\tau(G)v$ вектора v.

Теорема 13. *Следующие утверждения* (a) *и* (b) *о неприводимом конечномерном представлении τ компактной связной группы Ли равносильны:*

(a) *τ полярно;*

(b) *семейство $\{\widehat{O}_v\}_{v\in\mathcal{V}}$ выпуклых оболочек орбит образует полугруппу относительно сложения по Минковскому.*

Доказательство импликации $(b) \Longrightarrow (a)$ содержится в [44].

Для случая присоединенного представления обратное утверждение можно вывести из теоремы выпуклости Костанта: проекция O_v на подалгебру Картана $\mathcal{A}$ представляет собой выпуклую оболочку $\mathcal{A} \cap O_v$, причем последнее множество составляет одну орбиту группы Вейля W. В частности, оно конечно и его выпуклая оболочка является W-инвариантным многогранником, у которого ровно одна вершина расположена в камере Вейля. Нетрудно проверить, что семейство таких многогранников тоже образует полугруппу по сложению. Отсюда следует, что полугруппа $\{\widehat{O}_v\}_{v\in\mathcal{V}}$ параметризуется точками камеры Вейля.

Аналогичное утверждение верно и в общем случае. Семейство $\{\widehat{O}_v\}_{v\in\mathcal{V}}$ упорядочивается отношением теоретико-множественного включения; поскольку камера Вейля симплициальна, из сказанного следует, что это упорядочение решеточно (то есть у любых двух элементов имеются верхняя и нижняя грани). В случае системы корней A_n построенное упорядочение векторов из $\mathcal{A}$ известно под названием *мажоризации* [45]. $\square$

Левоинвариантную (возможно, неголономную) внутреннюю метрику ρ на группе Ли G будем называть *субримановой*, если ρ определяется некоторой евклидовой нормой $\|\cdot\|$ на порождающем алгебру Ли $\mathcal{G}$ подпространстве $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{G}$ по формулам (13), (14).

Известно, что субримановы метрики ρ на G взаимно однозначно соответствуют гипоэллиптическим симметрическим порождающим операторам (сублапласианам) L однопараметрической (симметричной) гауссовой сверточной полугруппы $\{\mu_t\}_{t>0}$ (точные определения имеются в [46]) с непрерывными функциями плотностей вероятностных мер μ_t. Существование гауссовой полугруппы $\{\mu_t\}_{t>0}$ с такими же свойствами и соответствующего порождающего оператора L на всякой метризуемой локально компактной связной локально связной группе H доказано в работе [47]. Аналогичная связь должна существовать между левоинвариантными внутренними метриками ρ на H, являющимися пределами субримановых метрик на группах Ли, и полугруппами $\{\mu_t\}_{t>0}$ из [47] специального вида.

Задача 6. Какова эта связь?

Литература

1. В. Н. Берестовский, В. М. Гичев, *Метризованные левоинвариантные порядки на топологических группах.* — Алгебра и анализ **11**, No. 4 (1999), 1–34.
2. Э. Хилле, Р. С. Филлипс, *Функциональный анализ и полугруппы.* ИЛ, М. (1951).
3. Е. С. Ляпин, *Полугруппы.* Физматгиз, М. (1960).
4. А. К. Сушкевич, *Теория обобщенных групп.* Харьков (1937).
5. K. H. Hofmann, P. S. Mostert, *Elements of Compact Semigroups.* Columbus, Ohio: Charles E. Merrill Books, Inc. (1966).
6. М. Рагунатан, *Дискретные подгруппы групп Ли.* Мир, М. (1977).
7. M. Gromov, *Asymptotic invariants of infinite groups.* in: Geometric Group Theory, G.Niblo and M.Roller, eds., vol. 2, London Math. Soc. Lecture Notes 182, Cambridge University Press, Cambridge (1993).
8. E. Ghys, A. Haefliger, A. Verjovsky (Eds.), *Group Theory from a Geometrical Viewpoint.* — 26 March–6 April 1990, ICTP, Trieste, Italy. World Scientific, Singapore–New Jersey–London–Hong Kong (1991).
9. J. D. Dixon, M. P. F. du Sautoy, A. Mann, D. Segal, *Analytic pro-p Groups.* — London Math. Soc. Lecture Note Series, 157, Cambridge University Press, Cambridge (1991).
10. H. Omori, *Infinite-Dimensional Lie Groups.* — Transl. Math. Monographs, V. 158, Am. Math. Soc., Providence, R.I. (1997).
11. А. И. Мальцев, *О включении ассоциативных систем в группы. I.* — Мат. сб. **6**, No. 2 (1939), 331–336.
12. А. И. Мальцев О включении ассоциативных систем в группы. II, — Мат. сб. **8**, No. 2 (1940), 251–263.
13. Л. Фукс, *Частично упорядоченные алгебраические системы.* М. (1965).
14. А. К. Гуц, *Аксиоматическая теория относительности.* — Успехи мат. наук **37**, вып. 2 (1982), 39–79.
15. Р. И. Пименов, *Анизотропное финслерово обобщение теории относительности как структуры порядка.* Сыктывкар (1987).

16. Г. Ю. Богословский, *Теория локально анизотропного пространства-времени.* Изд-во Моск. ун-та (1992).
17. Г. С. Асанов, С. Ф. Пономаренко, *Финслерово расслоение над пространством-временем, ассоциируемые калибровочные поля и связности.* Штиинца, Кишинев (1989).
18. Э. Б. Винберг, *Инвариантные выпуклые конусы и упорядочения в группах Ли.* — Функц. анал. и его прил. **14** (1980), 1–13.
19. Г. И. Ольшанский, *Инвариантные упорядочения в простых группах Ли: решение задачи Э. Б. Винберга.* — Функц. анал. и его прил. **16** (1982), 80–81.
20. Г. И. Ольшанский, *Выпуклые конусы в симметрических алгебрах Ли, полугруппы Ли и инвариантные причинные структуры (упорядочения) на псевдоримановых пространствах.* — Докл. АН СССР **265**, (1982), 537–541.
21. S. Paneitz, *Invariant convex cones and causality in semisimple Lie Groups.* — J. Funct. Anal. **43** (1981), 313–359.
22. K.-H. Neeb, *Invariant subsemigroups in Lie groups.* — Mem. Am. Math. Soc. **104**, No. 499 (1993).
23. *Semigroups in Algebra, Geometry, and Analysis.* K. H. Hofmann, J. Lawson, and E. B. Vinberg (editors), de Gruyter Exp. Math., Berlin (1995).
24. *Positivity in Lie Theory: Open Problems.* J. Hilgert, J. D. Lawson, K.-H. Neeb, and E. B. Vinberg (editors), de Gruyter Exp. Math., Berlin (1998).
25. V. Berestovskiĭ, C. Plaut, C. Stallmann, *Geometric groups I.* — Trans. Am. Math. Soc., **351** (1999), 1403–1422.
26. Р. И. Пименов, *Пространства кинематического типа (математическая теория пространства-времени).* — Зап. науч. семин. ЛОМИ **6** (1968).
27. M. Gromov, *Carnot–Caratheodory spaces seen from within.* in: Sub-Riemannian Geometry, A. Bellaiche and J.-J. Risler (Eds.), Progress in Math. **144**, Birkhäuser, Basel (1997).
28. А. М. Вершик, В. Я. Гершкович, *Неголономные динамические системы. Геометрия распределений и вариационные задачи.* — В кн.: Итоги науки и техники, современные проблемы математики, фундаментальные направления. **16** ВИНИТИ, М. (1987), 5–85.
29. В. Н. Берестовский, *Однородные многообразия с внутренней метрикой I.* — Сиб. матем. ж. **29**, No. 6 (1988), 17–29.
30. П. К. Рашевский, *О соединимости любых двух точек вполне неголономного пространства допустимой линией.* — Уч. зап. пед. ин-та им. Либкнехта, сер. физ.-мат. наук, No. 2 (1938), 83–94.
31. W. L. Chow, *Systeme von linearen partiellen differential Gleichungen erster Ordnung.* — Math. Ann. **117** (1939), 98–105.
32. Ю. Д. Бураго, В. А. Залгаллер, *Геометрические неравенства.* Наука, Л. (1980).
33. В. Н. Берестовский, *Однородные многообразия с внутренней метрикой,* II. — Сиб. мат. ж. **30**, No. 2 (1989), 14–28.
34. Э. Б. Винберг, *Теория выпуклых однородных конусов.* — Труды ММО **12** (1963), 340–402.

35. Н. Винер, *Кибернетика, или управление и связь в животном и машине.* — Советское радио (1968).
36. H. Radström, *One-parameter semigroups of subsets of a real linear space.* — Arkiv Mat. **4**, No. 9 (1959), 87–97.
37. F. D. Ancel, T. Dobrowolski, J. Grabowski, *Closed subgroups in Banach spaces.* — Studia Math. **109**, No. 3 (1994), 277–290.
38. В. Н. Берестовский, *Однородные пространства с внутренней метрикой.* — Докт. дисс., Ин-т математики СО АН СССР, Новосибирск, 1990.
39. J. Dadok, *Polar coordinates induced by actions of compact Lie groups.* — Trans. Am. Math. Soc. **288** (1985), 125–137.
40. J.-H. Eschenburg, E. Heintze, *Polar Representations and Symmetric Spaces.* — J. Reine Angew. Math. **507** (1999), 93–106.
41. J. Dadok, V. Kac, *Polar representations.* — J. Algebra, **92** (1985), 504–524.
42. J.-H. Eschenburg, E. Heintze, *On the classification of polar representations.* — Math. Z. **232** (1999), 391–398.
43. Э. Б. Винберг, В. Л. Попов, *Теория инвариантов.* — В кн.: Итоги науки и техники. Серия "Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. ВИНИТИ, **55** (1989), 137–309.
44. В. М. Гичев, *Замечание о полярных представлениях компактных групп Ли.* — Матем. структуры и моделирование, No. 6, Омск, 2000, 30–36.
45. А. Маршалл, И. Олкин, *Неравенства: теория мажоризации и ее приложения.* Мир, М. (1983).
46. Х. Хейер, *Вероятностные меры на локально компактных группах.* Мир, М. (1981).
47. A. Bendikov, L. Saloff-Coste, *Elliptic diffusions on infinite products.* — J. Reine Angew. Math. **493** (1997), 171–220.

Berestovskii V. N., Gichev V. M. Metrized semigroups.

The notion of metrized order (antimetric) on a topological group is characterized by three equivalent systems of axioms and connected with pointed locally generated semigroups. In the present paper, these notions are discussed and new results are announced; the main result is an analog of the following fact in metric geometry: every left-invariant inner metric on a Lie group is Finsler (maybe, nonholonomic). In the situation considered, a norm is replaced by an antinorm, and a metric by an antimetric. Examples are given, showing the complexity of these structures and their prevalence. Among them are: a nonholonomic antimetric on Heisenberg group, an antimetric on a nonnilpotent group admitting dilatations, a pointed locally generated semigroup in the Hilbert space with trivial tangent cone, antinorms connected with the Brunn–Minkowski inequality and the Shannon entropy, a discontinuous antinorm on a Lie algebra defining a continuous antimetric on the Lie group, and an example of the converse situation. Several problems are formulated.

Омский государственный университет

Поступило 25 декабря 2000 г.