Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 279, 2001 г.

А. В. Жубр

ОБ ОДНОЙ РАБОТЕ БАРДЕНА

Введение

В своей работе 1965 г. [1] Д. Барден получил полную классификацию замкнутых односвязных 5-мерных гладких многообразий, а также ряд результатов о вложениях и погружениях таких многообразий в евклидовы пространства. Основные классификационные результаты цитированной работы Бардена могут быть сформулированы в виде следующих двух теорем (в дальнейшем "многообразие" будет всюду означать "гладкое многообразие").

Теорема A [1, Theorem 2.2]. *Замкнутое односвязное ориентированное 5-мерное многообразие определяется, с точностью до сохраняющего ориентацию диффеоморфизма, следующим набором инвариантов, рассматриваемым с точностью до естественного изоморфизма:*

1. *Конечно порожденная абелева группа G (двумерная группа гомологий).*
2. *Гомоморфизм $w : G \to \mathbf{Z}_2$ (двумерный класс Штифеля–Уитни).*
3. *Кососимметрическая билинейная форма $l : \operatorname{Tors} G \times \operatorname{Tors} G \to \mathbf{Q}/\mathbf{Z}$ (форма зацеплений).*

Говоря точнее, всякий изоморфизм $\eta : H_2(M_1) \to H_2(M_2)$, согласованный с двумерными классами Штифеля–Уитни и формами зацеплений, индуцируется некоторым сохраняющим ориентацию диффеоморфизмом $M_1 \to M_2$.

Теорема B. *Набор инвариантов (G, w, l) указанного выше вида реализуется многообразием (т. е. изоморфен набору $(H_2(M), w_2(M), l_M)$ для некоторого M) в том и только том случае, если, во-первых, форма l невырождена и, во-вторых, выполнено следующее "условие согласованности":*

$$w(x) = 2l(x, x) \tag{1}$$

для всех $x \in \operatorname{Tors} G$.

Теорема A утверждает, таким образом, что набор инвариантов (G, w, l) является полным, а теорема B описывает "множество значений" этих инвариантов. Заметим, что свойство невырожденности формы l – это не что иное как двойственность Пуанкаре. Соотношение (1) получено Уоллом [2] (заметим, что, в силу кососимметричности формы l, выражение $l(x, x)$ может принимать лишь два значения: 0 и $\frac{1}{2}$). Тройки, удовлетворяющие условиям теоремы B, мы будем в дальнейшем называть *допустимыми*.

В действительности, в работе Бардена теорема A играет роль промежуточного, а не окончательного результата: некоторые довольно элементарные рассуждения позволяют получить дальнейшую классификацию объектов вида (G, w, l) и, следовательно, более явное (хотя и, в определенном смысле, менее "естественное") описание множества классов ориентированно диффеоморфных многообразий рассматриваемого вида. Именно, оказывается (см. [1, лемма E] и далее), что всякая допустимая тройка (G, w, l) изоморфна прямой сумме некоторых "простейших" допустимых троек, образующих два бесконечных семейства, которые мы обозначаем через M_k $(k = 2, 3, \dots, \infty)$ и X_j $(j = -1, 1, 2, 3, \dots, \infty)$. Эти семейства можно описать при помощи следующей таблицы:

тройка	G	w	l
$M_k,\ k < \infty$	$\mathbf{Z}_k \oplus \mathbf{Z}_k$		$\begin{pmatrix} 0 & 1/k \\ -1/k & 0 \end{pmatrix}$
M_∞	$\mathbf{Z}$	0	
$X_j,\ 1 \leqslant j < \infty$	$\mathbf{Z}_{2^j} \oplus \mathbf{Z}_{2^j}$		$\begin{pmatrix} 0 & 1/2^j \\ -1/2^j & 1/2 \end{pmatrix}$
X_∞	$\mathbf{Z}$	$\neq 0$	
X_{-1}	$\mathbf{Z}_2$		$\neq 0$

Напомним, что в случае конечной группы G гомоморфизм w задавать не нужно – он определяется формой l в соответствии с соотношением (1). При этом всегда можно добиться того, что в описанном выше разложении произвольной допусимой тройки в сумму простейших будет присутствовать не более одной "неспинорной" тройки X_j. Число

$$i = \begin{cases} |j| & \text{при } w \neq 0 \\ 0 & \text{при } w = 0 \end{cases}$$

является, очевидно, инвариантом класса изоморфных троек (G, w, l) (собственно, пар (G, w)); обратно, из существования вышеупомянутого разложения легко следует, что множество классов изоморфных "допустимых троек" совпадает с множеством классов изоморфных "допустимых пар" (G, i), где G – конечно порожденная абелева группа и i – неотрицательное целое число, удовлетворяющих условиям:

(1) $\operatorname{Tors} G$ имеет вид $T \oplus T$ или $T \oplus T \oplus \mathbf{Z}_2$;

(2) во втором случае всегда $i = 1$.

Это дает "окончательный" набор инвариантов 5-мерного многообразия M в работе Бардена: группа $H_2(M)$ и число $i(M)$.

Что касается теоремы B, то она – в том виде, как это сформулировано выше – вообще отсутствует в работе [1]; вместо этого Барден приводит явную конструкцию многообразий, реализующих описанные выше "простейшие тройки" M_k и X_j (откуда теорема B, конечно, сразу же следует). Таким образом, Барден доводит свои классификационные результаты до более "конструктивного" вида, чем приведенные выше теоремы A и B. (Конструктивность эта, впрочем, довольно условная, так как построение многообразий M_k и X_j основано на результатах Уолла о существовании некоторых диффеоморфизмов 4-мерных многообразий [3].)

Приведенное в работе [1] доказательство теоремы A опирается на следующую ключевую (и вполне очевидным образом доказываемую) лемму.

Лемма C [1, Лемма 4.4]. *Пусть V – односвязный кобордизм между односвязными 5-мерными многообразиями M_1 и M_2, удовлетворяющий следующему условию: гомоморфизмы $i_1 : H_2(M_1) \to H_2(V)$ и $i_2 : H_2(M_2) \to H_2(V)$, индуцированные вложениями, являются изоморфизмами. Тогда кобордизм V может быть превращен перестройками индекса 4 в h-кобордизм (и, следовательно, изоморфизм $i_2 \circ i_1^{-1} : H_2(M_1) \to H_2(M_2)$ индуцируется сохраняющим ориентацию диффеоморфизмом).*

Эта лемма сводит доказательство теоремы A к построению соответствующего (удовлетворяющего условиям леммы) кобордизма, что и удается автору работы [1] в результате довольно хитроумного рассуждения, занимающего почти целиком последние три части работы.

Лемме C нетрудно придать другую форму, в которой она оказывается "более приспособленной" к алгебро-топологическим вычислениям. Пусть G – конечно порожденная абелева группа, $w : G \to \mathbf{Z}_2$ – некоторый гомоморфизм. Мы будем рассматривать отображения $f : M \to K(G, 2)$, удовлетворяющие следующим условиям: многообразие M односвязно и $f^*(w) = w_2(M)$. Для $i \geqslant 4$ мы обозначаем через $\Omega_i^{\mathrm{spin}}(G, 2; w)$ соответствующую n-мерную группу бордизмов (это определение можно распространить и на случай $n < 4$, но для этого нужно рассматривать неодносвязные многообразия и "отображения со спинорной структурой"; см. ниже).

Через $\mathcal{M}_n(G, w)$ мы обозначаем множество пар вида (M, φ), где M – замкнутое односвязное n-мерное ориентированное многообразие и $\varphi : H_2(M) \to G$ – изоморфизм, профакторизованное по очевидному отношению "ориентированного диффеоморфизма". Очевидно, что мы имеем естественное отображение

$$\theta : \mathcal{M}_n(G, w) \to \Omega_n^{\mathrm{spin}}(G, 2, w) \ ,$$

и легко убедиться, что лемма C эквивалентна следующему утверждению.

Лемма D. *При $n = 5$ отображение θ инъективно.*

В самом деле, если $g : V \to K(G, 2)$ – бордизм между (M_1, f_1) и (M_2, f_2) (в $\Omega_5^{\mathrm{spin}}(G, 2, w)$), то, убив подгруппу $\operatorname{Ker}[g_* : H_2(V) \to G]$ перестройками индекса 3, мы получим кобордизм, удовлетворяющий предположениям леммы C.

Цель настоящей статьи – продемонстрировать, что приведенная выше форма леммы 4.4 работы [1] (лемма D) позволяет довольно легко свести доказательство теорем A и B к вычислению групп $\Omega_5^{\mathrm{spin}}(G, 2, w)$ и, таким образом, получить "альтернативное" доказательство классификационных результатов Бардена, не требующее, с одной стороны, "ручного" (и довольно нетривиального) построения кобордизмов, требующихся для леммы C, а с другой – не использующее результаты Уолла о диффеоморфизмах 4-мерных многообразий. При этом, правда, мы теряем некоторую "конструктивную компоненту" результатов Бардена (являющуюся, как отмечалось выше, довольно условной).

Заметим в заключение, что лемма D в некотором ослабленном варианте имеет место и в размерности 6, и это послужило основой подхода к классификации 6-мерных многообразий, реализованного в работах [5–9]; возникающие при этом технические проблемы оказываются неизмеримо более трудными, чем в размерности 5.

§1. Предварительные результаты

1.1. Некоторые обозначения. Стандартную проекцию $\mathbf{Z}_m \to \mathbf{Z}_n$ (где m делится на n или бесконечно) мы обозначаем через ρ_n; стандартное вложение $\mathbf{Z}_m \to \mathbf{Z}_{mn}$ (не исключается случай $m = \infty$) – через ι_n. Эти же символы будут служить для обозначения гомологических и когомологических гомоморфизмов, индуцированных действием ρ_n и ι_n на коэффициенты.

Для любого натурального n мы обозначаем через δ_n гомоморфизм Бокштейна $H^i(X;\mathbf{Z}_n) \to H^{i+1}(X)$, отвечающий точной последовательности коэффициентов

$$0 \to \mathbf{Z} \xrightarrow{\iota_n} \mathbf{Z} \xrightarrow{\rho_n} \mathbf{Z}_n \to 0.$$

При этом для любых $x \in H^i(X;\mathbf{Z}_n)$, $y \in H^j(X;\mathbf{Z}_n)$ выполнено "правило Лейбница"

$$\rho_n\delta_n(xy) = \delta_n x \cdot y + (-1)^i x \cdot \delta_n y. \tag{2}$$

Через δ (без индекса) мы обозначаем гомоморфизм Бокштейна $H^i(X;\mathbf{Q}/\mathbf{Z}) \to H^{i+1}(X)$, отвечающий точной последовательности

$$0 \to \mathbf{Z} \to \mathbf{Q} \to \mathbf{Q}/\mathbf{Z} \to 0 .$$

Операции δ и δ_n связаны очевидным соотношением

$$\delta_n(x) = \delta\left(\frac{x}{n}\right) \tag{3}$$

для всех $x \in H^i(X;\mathbf{Z}_n)$.

Через P обозначается нестабильная когомологическая операция "квадрат Понтрягина"

$$H^{2i}(X;\mathbf{Z}_n) \to H^{4i}(X;\mathbf{Z}_{2n}) ,$$

где $n \equiv 0 \pmod 2$. Нам будет удобно распространить это обозначение на случай нечетного n, понимая в этом случае под P

обычный когомологический квадрат. Для любого $x \in H^{2i}(X; \mathbf{Z}_{2^m})$ имеет место соотношение

$$\rho_{2^m}\delta_{2^{m+1}}P(x) = x \cdot \delta_{2^m} x + \iota_{2^{m-1}}\mathrm{Sq}^{2i}\delta_{2^m} x \tag{4}$$

(см. [9, стр. 148]).

1.2. Группы бордизмов $\Omega_i^{\mathrm{spin}}(X, f)$ и $\Omega_i^{\mathrm{spin}}(G, 2, w)$. Эти группы определены в [8, 9]. Они не представляют собой ничего существенно нового – это просто специальный случай так называемых (B, f)-бордизмов, описанных в [4]. Для удобства читателя повторим здесь вкратце определения из [8, 9]. Мы считаем раз навсегда заданным расслоение

$$\pi : \mathrm{BSO} \to K(\mathbf{Z}_2, 2)$$

со слоем BSpin. Для произвольного непрерывного отображения $f : X \to K(\mathbf{Z}_2, 2)$ мы называем spin(f)-*многообразием* тройку (M, g, α), где M – многообразие, $g : M \to X$ – непрерывное отображение и $\alpha : \nu_M \to \gamma_{\mathrm{BSO}}$ – гомотопический класс морфизмов векторных расслоений (нормального расслоения многообразия M в универсальное SO-расслоение), "накрывающих" отображение $f \circ g$ (мы называем α *спинорной структурой на отображении* g). Через $\Omega_i^{\mathrm{spin}}(X, f)$ обозначаются группы бордизмов i-мерных spin(f)-многообразий.

1.3. Группы $\Omega_i^{\mathrm{spin}}(G, 2; w)$ и категория $\mathcal{G}$. Если пространство X односвязно и $i \geqslant 4$, то многообразие M в предыдущем пункте можно также взять односвязным, а тогда спинорная структура на отображении g однозначно определяется гомотопическими классами отображений f, g (см. [8, 9]); взяв здесь $X = K(G, 2)$, мы получаем те самые группы $\Omega_i^{\mathrm{spin}}(G, 2; w)$, о которых шла речь во введении. Из определения очевидным образом следует отождествление

$$\Omega_i^{\mathrm{spin}}(\mathbf{Z}_2, 2; \mathrm{id}) = \Omega_i^{\mathrm{SO}}. \tag{5}$$

Нам будет удобно рассматривать гомоморфизмы $w : G \to \mathbf{Z}_2$ как объекты некоторой категории, обозначаемой через $\mathcal{G}$; морфизм объекта (G, w) в объект (G', w') – это, конечно, коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{w} & \mathbf{Z}_2 \\ \downarrow & & \downarrow \\ G' & \xrightarrow{w'} & \mathbf{Z}_2 \end{array}$$

Группы $\Omega_i^{\mathrm{spin}}(G, 2; f)$ образуют, очевидно, ковариантный функтор на категории $\mathcal{G}$.

1.4. Спектральная последовательность. Определение групп $\Omega_i^{\mathrm{spin}}(X, f)$ можно вполне очевидным образом распространить на случай пар, и поэтому обычная конструкция, основанная на фильтрации остовами, дает для CW-пространства X спектральную последовательность (Атьи–Хирцебруха)

$$\mathcal{E}_{p,q}^r \Rightarrow \Omega_{p+q}^{\mathrm{spin}}(X, f) \tag{6}$$

с $\mathcal{E}_{p,q}^2 = H_p(X;\, \Omega_q^{\mathrm{spin}})$ (детали см. в [8]).

Группы Ω_q^{spin} известны (см. [4]); в первых 8 размерностях они совпадают с $\pi_q(\mathrm{BSO})$. Мы имеем поэтому следующее утверждение о группах $\mathcal{E}_{p,q}^2$:

1.4.1. Группы $\mathcal{E}_{p,q}^2$ с $q \leqslant 7$. *Указанные группы отождествляются с $H_p(X)$ при $q = 0, 4$, $H_p(X;\, \mathbf{Z}_2)$ при $q = 1, 2$ и тривиальны при остальных q.*

Дифференциалы

$$d_{p,0}^2 : \mathcal{E}_{p,0}^2 = H_p(X) \to \mathcal{E}_{p-2,1}^2 = H_{p-2}(X;\, \mathbf{Z}_2)$$

и

$$d_{p,1}^2 : \mathcal{E}_{p,1}^2 = H_p(X;\, \mathbf{Z}_2) \to \mathcal{E}_{p-2,2}^2 = H_{p-2}(X;\, \mathbf{Z}_2)$$

вычислены в работе [8]. Чтобы сформулировать результат этого вычисления, обозначим, для $w \in H^2(X;\, \mathbf{Z}_2)$, через $\mathrm{Sq}^2 + w$ гомоморфизм $H^{p-2}(X;\, \mathbf{Z}_2) \to H^p(X;\, \mathbf{Z}_2)$, действующий по формуле $x \mapsto \mathrm{Sq}^2 x + wx$, и через $(\mathrm{Sq}^2 + w)^*$ – ему алгебраически сопряженный (т.е. $\mathrm{Hom}\,(\mathrm{Sq}^2 + w, \mathrm{id}(\mathbf{Z}_2))$).

1.4.2. Теорема [8, п. 3.2]**.** *Дифференциал $d_{p,1}^2$ спектральной последовательности (6) совпадает с гомоморфизмом $(\mathrm{Sq}^2 + w)^*$, а дифференциал $d_{p,0}^2$ – с $(\mathrm{Sq}^2 + w)^* \circ \rho_2$, где w – когомологический класс, соответствующий отображению f.*

1.5. Группы $\mathcal{E}^r_{p,q}(G,w)$ с $p+q=5$, $q>0$. Через $\mathcal{E}^r_{p,q}(G,w)$, для $(G,w)\in\mathcal{G}$, мы обозначаем члены спектральной последовательности (6) с $X=K(G,2)$ и отображением f, индуцирующим гомоморфизм w.

Как показывает легкая проверка, группы $\mathcal{E}^3_{4,1}(G,w)$ и $\mathcal{E}^3_{3,2}(G,w)$ тривиальны: ввиду теоремы 1.4.2, для этого достаточно убедиться в точности последовательностей

$$H^2(G,2;\mathbf{Z}_2)\xrightarrow{\mathrm{Sq}^2+w}H^4(G,2;\mathbf{Z}_2)\xrightarrow{\rho_2^*\circ(\mathrm{Sq}^2+w)}\mathrm{Hom}\,(H_6(G,2),\mathbf{Z}_2)$$

и

$$0\to H^3(G,2;\mathbf{Z}_2)\xrightarrow{\mathrm{Sq}^2+w}H^5(G,2;\mathbf{Z}_2)$$

(детали см. в [8, п. 5.5–5.6]).

Что касается групп $\mathcal{E}^r_{p,q}$ для остальных значений (p,q), указанных в заголовке этого пункта (т. е. $\mathcal{E}^r_{2,3}$, $\mathcal{E}^r_{1,4}$ и $\mathcal{E}^r_{0,5}$), то они являются тривиальными уже при $r=2$ ввиду 1.4.1.

1.6. Гомоморфизм μ. Мы обозначаем через μ естественный гомоморфизм

$$\Omega_5^{\mathrm{spin}}(G,2;w)\to H_5(G,2)\ , \tag{7}$$

действующий по формуле $\mu(M,g)=g_*[M]$. Из сказанного в предыдущем пункте, вместе со стандартными свойствами спектральной последовательности Атьи–Хирцебруха, вытекает следующее утверждение.

1.6.1. Теорема. *Гомоморфизм μ является изоморфизмом на группу $\mathcal{E}^\infty_{5,0}$.*

1.7. Дифференциал $d^3_{5,0}$. К сожалению, в работе [8] не приведено вычисление дифференциала $d^3_{5,0}$ (там это вычисление выглядело бы очень естественно), и мы приводим его ниже.

1.7.1. Лемма. *Дифференциал $d^3_{5,0}:\mathcal{E}^3_{5,0}(G,w)\to\mathcal{E}^3_{2,2}(G,w)$ тривиален.*

Доказательство. Группа $\mathcal{E}^3_{2,2}(G,w)$ вычислена в работе [8]; результат этого вычисления может быть записан в виде

$$\mathcal{E}^3_{2,2}(G,w)=\begin{cases}\mathbf{Z}_2 & \text{при } w\neq 0\\ 0 & \text{при } w=0\end{cases}$$

или, в более "функториальной" форме, в виде

$$\mathcal{E}^3_{2,2}(G,w) = \mathrm{Im}\,(w)$$

[8, п. 5.4]. Собственно, это вычисление вполне тривиально: ввиду теоремы 1.4.2 группа $\mathrm{Hom}\,(\mathcal{E}^3_{2,2}(G,w), \mathbf{Z}_2)$ отождествляется с ядром гомоморфизма

$$\mathrm{Sq}^2 + w : H^2(G,2;\,\mathbf{Z}_2) \to H^4(G,2;\,\mathbf{Z}_2)\ ,$$

которое порождается классом w.

Таким образом, мы можем в дальнейшем считать, что $w \neq 0$. Рассмотрим коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc}
\mathcal{E}^3_{5,0}(G,w) & \xrightarrow{d^3_{5,0}} & \mathcal{E}^3_{2,2}(G,w) = \mathbf{Z}_2 \\
\Big\downarrow{\scriptstyle w_*} & & \Big\downarrow{\scriptstyle \mathrm{id}} \\
\mathcal{E}^3_{5,0}(\mathbf{Z}_2,\mathrm{id}) & \xrightarrow{d^3_{5,0}} & \mathcal{E}^3_{2,2}(\mathbf{Z}_2,\mathrm{id}) = \mathbf{Z}_2
\end{array}$$

индуцированную морфизмом $(G,w) \to (\mathbf{Z}_2,\mathrm{id})$. Из этой диаграммы следует, что достаточно установить тривиальность дифференциала $d^3_{5,0}$ для $(G,w) = (\mathbf{Z}_2,\mathrm{id})$. В этом случае, с одной стороны, группа $\mathcal{E}^3_{5,0}$ содержится в $\mathcal{E}^2_{5,0} = H_5(\mathbf{Z}_2,2) = \mathbf{Z}_2$, а с другой – группа $\mathcal{E}^\infty_{5,0} = \Omega^{\mathrm{spin}}_5(\mathbf{Z}_2,2;\mathrm{id})$, ввиду (5), совпадает с $\Omega^{\mathrm{SO}}_5 = \mathbf{Z}_2$; следовательно, все дифференциалы $d^r_{5,0}$ – нулевые, что и требовалось доказать. □

1.8. Вычисление группы $\Omega^{\mathrm{spin}}_5(G,2;w)$. Согласно теореме 1.6.1, оно сводится к вычислению $\mathcal{E}^\infty_{5,0}(G,w)$. Заметим, во-первых, что группа $\mathcal{E}^2_{5,0}(G,w) = H_5(G,2)$ конечна (как и вообще все группы $H_{2k+1}(G,2)$), поэтому дифференциал

$$d^5_{5,0} : \mathcal{E}^5_{5,0}(G,w) \to \mathcal{E}^5_{0,4} = \Omega^{\mathrm{spin}}_4 = \mathbf{Z}$$

тривиален. Таким образом, ввиду леммы 1.7.1, все дифференциалы $d^r_{5,0}$ с $r \geqslant 3$ тривиальны и, значит, группа $\mathcal{E}^\infty_{5,0}(G,w)$ совпадает с $\mathcal{E}^3_{5,0}(G,w)$. Сопоставляя это с теоремой 1.4.2, приходим к следующей окончательной формулировке.

1.8.1. Теорема. *Гомоморфизм* (7) *является изоморфизмом на группу*

$$\mathrm{Ker}\,[(\mathrm{Sq}^2 + w)^* \circ \rho_2 : H_5(G,2) \to H_3(G,2;\,\mathbf{Z}_2)]\ .$$

§2. Группа $H_5(G,2)$ и формы зацеплений

2.1. Группы $H^i(\mathbf{Z}_n,2)$ с $i \leqslant 6$ и $H_i(\mathbf{Z}_n,2)$ с $i \leqslant 5$. Группы $H^i(\mathbf{Z}_n,k)$ известны для всех i,n,k [10]; в интересующих нас случаях они задаются нижеследующей таблицей

i	0	1	2	3	4	5	6
$H^i(\mathbf{Z}_n,2)$ $(n<\infty)$	$\mathbf{Z}$	0	0	$\mathbf{Z}_n$	0	$\mathbf{Z}_{n\cdot(2,n)}$	$\mathbf{Z}_{(2,n)}$
$H^i(\mathbf{Z},2)$	$\mathbf{Z}$	0	$\mathbf{Z}$	0	$\mathbf{Z}$	0	$\mathbf{Z}$

(здесь (m,n) – наибольший общий делитель чисел m,n). Образующими групп $H^3(\mathbf{Z}_n,2)$, $H^5(\mathbf{Z}_n,2)$ и $H^6(\mathbf{Z}_n,2)$ служат, соответственно, классы $\delta_n\kappa_n$, $\delta_{n\cdot(2,n)}P(\kappa_n)$ и $\delta_2\mathrm{Sq}^2\delta_n\kappa_n$, где κ_n обозначает универсальный $(\mathbf{Z}_n,2)$-класс когомологий – образующую группы $H^2(\mathbf{Z}_n,2;\,\mathbf{Z}_n)$.

Из сказанного следует, что группы $H_i(\mathbf{Z}_n,2)$ с $i \leqslant 5$ устроены в соответствии с таблицей

i	0	1	2	3	4	5
$H_i(\mathbf{Z}_n,2)$	$\mathbf{Z}$	0	$\mathbf{Z}_n$	0	$\mathbf{Z}_{n\cdot(2,n)}$	$\mathbf{Z}_{(2,n)}$

(которая пригодна и для $n=\infty$, если положить $(2,\infty)=1$). При этом в качестве "детектирующих" классов когомологий в размерностях 2, 4 и 5 ("свертка" с которыми и дает соответствующие изоморфизмы) служат, соответственно, κ_n, $P(\kappa_n)$ и (в случае четного n) $\mathrm{Sq}^2\delta_n\kappa_n$.

2.2. Группа $H^3(G,2)$. Представим G в виде прямой суммы циклических групп:

$$G = \bigoplus_i \mathbf{Z}_{n_i} \tag{8}$$

(где некоторые n_i могут быть равны ∞). Нам будет удобно рассматривать проекции $x_i : G \to \mathbf{Z}_{n_i}$ как классы когомологий:

$$x_i \in H^2(G,2;\,\mathbf{Z}_{n_i}) = \mathrm{Hom}(G, Z_{n_i}) \ .$$

Из сказанного в предыдущем пункте сразу следует, что набор классов

$$\{\delta_{n_i}x_i,\ n_i<\infty\}$$

образуют "базис" группы $H^3(G,2)$, и что $H^3(G,2)$ совпадает с $H^3(\operatorname{Tors} G,2)$.

2.3. Несколько обозначений и стандартных изоморфизмов. Для конечной абелевой группы G обозначаем группу $\operatorname{Hom}(G,\mathbf{Q}/\mathbf{Z})$ короче через $\widehat{G}$ (или, в некоторых случаях, через $G\widehat{\ }$), и для любого гомоморфизма $\varphi : G \to H$ соответствующий индуцированный гомоморфизм $\widehat{H} \to \widehat{G}$ – через $\widehat{\varphi}$. (Соответствие $G \mapsto \widehat{G}$ – не что иное как специальный случай "двойственности Понтрягина".)

Для произвольной конечно порожденной абелевой группы G мы обозначаем ее периодическую часть $\operatorname{Tors} G$ короче через tG. Как легко видеть, гомоморфизм Бокштейна

$$\delta : H^2(tG,2;\,\mathbf{Q}/\mathbf{Z}) \to H^3(tG,2)$$

есть изоморфизм. Отождествляя $H^2(tG,2;\mathbf{Q}/\mathbf{Z})$ с $\operatorname{Hom}(G,\mathbf{Q}/\mathbf{Z}) = \widehat{tG}$, а $H^3(tG,2)$ – с $H^3(G,2)$ (см. замечание в конце предыдущего пункта), окончательно получаем изоморфизм $\widehat{tG} \to H^3(G,2)$, который также обозначаем через δ.

2.4. Группа $H_5(G,2)$. Представив группу tG в виде (8) и применяя к сказанному в п. 2.1 формулу Кюннета, мы получаем изоморфизм

$$H_5(G,2) = \bigoplus_{\substack{i \\ n_i \equiv 0(2)}} \mathbf{Z}_2 \oplus \bigoplus_{i<j} \mathbf{Z}_{(n_i,n_j)}\ . \tag{9}$$

Удобно дополнительно предположить, что (8) – каноническое разложение группы tG, т. е. что каждое n_i делит n_{i+1}. В этом случае разложение (9) принимает чуть более простой вид

$$H_5(G,2) = \bigoplus_{\substack{i \\ n_i \equiv 0(2)}} \mathbf{Z}_2 \oplus \bigoplus_{i<j} \mathbf{Z}_{n_i}\ . \tag{10}$$

Будем обозначать соответствующие этому разложению образующие группы $H_5(G,2)$ через u_i и $v_{i,j}$. "Детектирующие" их классы когомологий (свертка с которыми дает соответствующие разложению (10) проекции) – это, соответственно, $\operatorname{Sq}^2\delta_{n_i}(x_i)$ и $x_i \cdot \delta_{n_j}(x_j)$: легкая проверка показывает, что, за исключением

$$\langle \operatorname{Sq}^2\delta_{n_i}(x_i), u_i\rangle = \langle x_i \cdot \delta_{n_j}(x_j), v_{i,j}\rangle = \rho_{n_i}(1),$$

все остальные свертки равны нулю.

Для произвольного класса гомологий $\mu \in H_5(G,2) = H_5(tG,2)$ мы обозначаем через D_μ гомоморфизм

$$H^3(G,2) = H^3(tG,2) \to H_2(tG,2) = tG \ , \tag{11}$$

действующий по формуле $x \mapsto \mu \frown x$.

2.5. Формы зацеплений. Пусть G – конечная абелева группа. *Формой зацеплений* на G будем называть произвольный гомоморфизм вида

$$l : G \otimes G \to \mathbf{Q}/\mathbf{Z} \ , \tag{12}$$

или, что равносильно, гомоморфизм

$$G \to \widehat{G} \tag{13}$$

(также обозначаемый через l). Заметим, что сопряженный к (13) гомоморфизм $\widehat{l}$ действует так же, как и l – из G в $\widehat{G}$. Очевидно, что форма (12) невырождена в том и только том случае, если (13) – изоморфизм, и что она симметрична (кососимметрична) в том и только том случае, если $\widehat{l} = l$ (соответственно, $\widehat{l} = -l$).

2.6. Форма l_μ. Пусть G – конечно порожденная абелева группа и $\mu \in H_5(G,2)$. Мы обозначаем через l_μ форму зацеплений

$$H^3(G,2) \otimes H^3(G,2) \to \mathbf{Q}/\mathbf{Z} \ , \tag{14}$$

заданную формулой $l_\mu(x,y) = \langle x{\cdot}\delta^{-1}y, \mu\rangle$. Представив класс y в виде $\delta_n(a)$, где $a \in H^2(tG,2;\mathbf{Z}_n)$ (что возможно в случае, если $ny = 0$), имеем, в соответствии с соотношением (3), $y = \delta(a/n)$ и, следовательно,

$$l_\mu(x,y) = \frac{1}{n}\langle ax, \mu\rangle \ . \tag{15}$$

2.6.1. Лемма. *Форма l_μ кососимметрична.*

Доказательство. Оно стандартно: выбрав такие $a, b \in H^2(tG,2;\mathbf{Z}_n)$, что $x = \delta_n(a)$ и $y = \delta_n(b)$ (для этого достаточно взять в качестве n наименьшее общее кратное порядков x и y), имеем

$$l_\mu(x,y) + l_\mu(y,x) = \frac{\langle \delta_n(a){\cdot}b + a{\cdot}\delta_n(b), \mu\rangle}{n} = \frac{\langle \delta_n(ab), \mu\rangle}{n} = 0. \quad \square$$

2.6.2. Следствие. *$l_\mu(x,x)$ – линейная функция, принимающая значения 0 и $\frac{1}{2}$.*

2.6.3. Лемма. *Для любого $x \in H^3(G,2)$ имеет место равенство*

$$l_\mu(x,x) = \frac{1}{2}\langle \mathrm{Sq}^2 x, \mu\rangle \ .$$

Доказательство. Ввиду 2.6.2 мы можем игнорировать "нечетную компоненту" класса x и, таким образом, считать, что $x = \delta_{2^m}(a)$, где $a \in H^2(tG,2;\mathbf{Z}_{2^m})$. Тогда, в соответствии с равенством (15) будем иметь

$$l_\mu(x,x) = 2^{-m}\langle a\cdot\delta_{2^m}(a),\mu\rangle \ .$$

Применяя к правой части соотношение (4), получаем требуемое равенство. □

2.7. Теорема. *Отображение $\mu \mapsto l_\mu$ группы $H_5(G,2)$ на множество кососимметрических форм зацеплений на группе $H^3(G,2)$ является биекцией.*

Доказательство. Мы можем, не теряя общности, считать группу G конечной. Рассмотрим, как в пп. 2.2, 2.4, разложение группы G в прямую сумму циклических групп $\mathbf{Z}_{n_i}$ с $n_i|n_{i+1}$ и соответствующие этому разложению классы когомологий $x_i \in H^2(G,2;\mathbf{Z}_{n_i})$. Как было отмечено в п. 2.2, классы $z_i = \delta_{n_i}(x_i)$ образуют базис группы $H^3(G,2)$. Для произвольной $\mathbf{Q}/\mathbf{Z}$-формы l рассмотрим ее "матрицу" относительно этого базиса – набор целых чисел ε_i и λ_{ij}, $i<j$, определенных условиями

$$l(z_i,z_i) = \frac{\varepsilon_i}{2},\ \ \varepsilon_i = 0,1$$

(где ε_i может быть отлично от нуля только в случае $n_i \equiv 0 \pmod 2$) и

$$l(z_j,z_i) = \frac{\lambda_{ij}}{n_i},\ \ \lambda_{ij} = 0,1,\dots,n_i-1.$$

Нетрудно видеть, что и обратно, всякий набор чисел ε_i, λ_{ij}, удовлетворяющий вышеприведенным условиям, определяет таким образом кососимметрическую $\mathbf{Q}/\mathbf{Z}$-форму на группе $H^3(G,2)$.

Теперь положим

$$\mu = \sum_i \varepsilon_i u_i + \sum_{i<j}\lambda_{ij}v_{ij}$$

и рассмотрим соответствующую форму l_μ. Ввиду леммы 2.6.3 и равенства (15), имеем

$$l_\mu(z_i, z_i) = \frac{1}{2}\langle \mathrm{Sq}^2 \delta_{n_i} x_i, \mu\rangle = \frac{\varepsilon_i}{2}$$

и

$$l_\mu(z_j, z_i) = \frac{1}{n_i}\langle x_i \cdot \delta_{n_j} x_j, \mu\rangle = \frac{\lambda_{ij}}{n_i},$$

так что $l_\mu = l$. Единственность класса μ следует из приведенного рассуждения очевидным образом. □

2.8. Гомоморфизм $\widehat{\delta} \circ l_\mu$. Напомним, что мы можем смотреть на форму l_μ как на гомоморфизм

$$l_\mu : H^3(G, 2) \to H^3(G, 2)\widehat{\ }$$

(п. 2.5). Далее, изоморфизм

$$\delta : \widehat{tG} \to H^3(G, 2)$$

(п. 2.3) индуцирует дуальный изоморфизм

$$\widehat{\delta} : H^3(G, 2)\widehat{\ } \to tG\ .$$

Таким образом, получаем суперпозицию

$$\widehat{\delta} \circ l_\mu : H^3(G, 2) \to tG \subset H_2(G, 2)\ .$$

2.8.1. Лемма. *Гомоморфизм $\widehat{\delta} \circ l_\mu$ совпадает со сверткой* (11).

Доказательство. Для произвольных $x, y \in H^3(G, 2)$ имеем

$$\widehat{\delta}^{-1} D_\mu(x) \cdot y = D_\mu(x) \cdot \delta^{-1}(y)$$

(понимая здесь классы $\widehat{\delta}^{-1} D_\mu(x)$ и $D_\mu(x)$ как элементы групп $\mathrm{Hom}(H^3(G, 2), \mathbf{Q/Z})$ и $\mathrm{Hom}(\widehat{tG}, \mathbf{Q/Z})$, соответственно). Далее, в соответствии с определением D_μ и l_μ,

$$D_\mu(x) \cdot \delta^{-1}(y) = \langle x \cdot \delta^{-1}(y), \mu\rangle = l_\mu(x, y) = l_\mu(x) \cdot y\ .$$

Таким образом, $\widehat{\delta}^{-1} D_\mu = l_\mu$, что и требовалось доказать. □

2.8.2. Следствие. *Форма l_μ невырожденна в том и только том случае, если D_μ является изоморфизмом.*

2.9. Невырожденные формы. Если форма l_μ невырождена, то, ввиду 2.8.2, мы можем перенести ее, посредством изоморфизма D_μ, на группу tG, т.е. рассмотреть форму зацеплений

$$l_\mu \circ (D_\mu^{-1} \otimes D_\mu^{-1}) : tG \otimes tG \to \mathbf{Q}/\mathbf{Z} \ .$$

Полученный таким образом "гомологический" вариант формы зацеплений мы по-прежнему обозначаем l_μ.

2.10. Формы l_μ и зацепления на 5-мерных многообразиях. Пусть M – связное (не обязательно односвязное) замкнутое ориентированное 5-мерное многообразие, G – конечно порожденная абелева группа и $\varphi : H_2(M) \to G$ – произвольный гомоморфизм. Выбрав какое-либо отображение $f : M \to K(G,2)$, индуцирующее гомоморфизм φ, получаем индуцированные гомоморфизмы

$$f_* : H_i(M) \to H_i(G,2) \quad \text{и} \quad f^* : H^i(G,2) \to H^i(M),$$

которые, вообще говоря, не определяются только гомоморфизмом φ, а могут зависеть от выбора f (в случае, когда $\mathrm{Ext}\,(H_1(M),G) \neq 0$). Тем не менее, как показывает следующее утверждение, по крайней мере некоторые из этих индуцированных гомоморфизмов от выбора f в действительности не зависят.

2.10.1. Лемма. *Гомоморфизмы*

$$f^* : H^3(G,2) \to H^3(M) \tag{16}$$

и

$$f_* : H_5(M) \to H_5(G,2) \tag{17}$$

определяются гомоморфизмом φ.

Доказательство. Для гомоморфизма (16) это очевидно: его можно отождествить с гомоморфизмом

$$\mathrm{Ext}\,(\varphi,\mathrm{id}) : H^3(G,2) = \mathrm{Ext}\,(G,\mathbf{Z}) \to \mathrm{Ext}\,(H_2(M),\mathbf{Z}) = \mathrm{Tors}\, H^3(M) \ .$$

Для гомоморфизма (17) утверждение непосредственно следует из следствия 2.10.3 ниже. □

Ввиду вышесказанного будем обозначать гомоморфизмы (16) и (17) через φ^* и φ_*, соответственно.

Рассмотрим теперь форму (14), где в качестве μ взят класс гомологий $\varphi_*[M] \in H_5(G,2)$. По очевидным причинам имеем равенство $l_\mu = l_M \circ (\varphi^* \otimes \varphi^*)$, где l_M – форма зацеплений многообразия M в "когомологическом" варианте:

$$l_M : \operatorname{Tors} H^3(M) \otimes \operatorname{Tors} H^3(M) \to \mathbf{Q}/\mathbf{Z} \ , \quad l_M(x,y) = \langle ax, [M] \rangle \ ,$$

где $a \in H^2(M; \mathbf{Q}/\mathbf{Z})$, $\delta(a) = y$. Таким образом, имеет место следующее утверждение.

2.10.2. Лемма. *Форма l_μ совпадает с $(\varphi^*)^{-1}(l_M)$ – прообразом формы зацеплений многообразия M относительно гомоморфизма φ^*.*

2.10.3. Следствие. *Форма l_μ (а вместе с ней, согласно теореме* 2.7*, и класс μ) определяется многообразием M и гомоморфизмом φ.*

В частности, мы получаем, что форма зацеплений многообразия M определяет класс гомологий $\mu \in H_5(H_2(M),2)$ (и, в свою очередь, определяется этим классом).

2.11. Теорема о расщеплении. Пусть опять M – связное замкнутое ориентированное 5-мерное многообразие, G – конечно порожденная абелева группа и $\varphi : H_2(M) \to G$ – гомоморфизм. Как выше, через μ мы обозначаем класс гомологий $\varphi_*[M] \in H_5(G,2)$.

2.11.1. Теорема. *Если форма l_μ невырождена, то ядро гомоморфизма φ является прямым слагаемым в $H_2(M)$.*

Доказательство. Все сводится, как обычно, к построению "сечения" – гомоморфизма

$$\psi : \operatorname{Im}(\varphi) \to H_2(M)$$

с $\varphi \circ \psi = \mathrm{id}$. Проблема при этом, конечно, сосредоточена в подгруппе $\operatorname{Tors}\operatorname{Im}(\varphi)$; мы докажем в действительности чуть больше, чем требуется – а именно, что существует такой гомоморфизм

$$\psi : tG \to H_2(M) \ , \tag{18}$$

что $\varphi \circ \psi$ совпадает с включением $tG \subset G$ (откуда, кроме требуемого утверждения относительно $\operatorname{Ker}\varphi$, следует дополнительно, что группа tG целиком лежит в образе гомоморфизма φ).

Чтобы доказать существование требуемого гомоморфизма (18), рассмотрим коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc} H^3(G,2) & \xrightarrow{\varphi^*} & \mathrm{Tors}\, H^3(M) \\ \downarrow D_\mu & & \downarrow D \\ tG & \xleftarrow{\varphi} & \mathrm{Tors}\, H_2(M) \end{array}$$

(D обозначает изоморфизм Пуанкаре). В силу предположений теоремы и следствия 2.8.2 гомоморфизм D_μ обратим, и мы можем положить

$$\psi = D \circ \varphi^* \circ D_\mu^{-1}\ . \ \square$$

§3. Доказательства теорем A и B

После проведенной подготовки эти доказательства могут быть изложены совсем коротко.

3.1. Доказательство теоремы A. Пусть M_1, M_2 и $\eta : H_2(M_1) \to H_2(M_1)$ – многообразия и изоморфизм, о которых идет речь в формулировке теоремы A, пусть G – группа, изоморфная $H_2(M_1) \approx H_2(M_2)$, и пусть $\varphi : H_2(M_i) \to G$ – некоторые изоморфизмы, связанные соотношением

$$\varphi_1 = \varphi_2 \circ \eta \tag{19}$$

(например, мы можем выбрать φ_2 произвольным, а φ_1 – в соответствии с указанным соотношением). Пусть гомоморфизм (класс когомологий) $w \in \mathrm{Hom}\,(G, \mathbf{Z}_2) = H^2(G,2;\mathbf{Z}_2)$ определен условиями $\varphi_i^*(w) = w_2(M_i)$.

Тогда мы имеем $(M_i, \varphi_i) \in \mathcal{M}_5(G,w)$, $i = 1,2$. Согласно 2.10, класс $\mu_i = \varphi_{i*}[\mathcal{M}] \in H_5(G,2)$ определяется формой $(\varphi_i^*)^{-1}(l_{M_i})$, а в силу соотношения (19) (и предположений относительно изоморфизма η) эти формы совпадают. Следовательно, мы имеем $\mu_1 = \mu_2$, а тогда, по теореме 1.8.1 (или 1.6.1) и $\theta(M_1,\varphi_1) = \theta(M_2,\varphi_2)$, и нам остается сослаться на лемму D. $\square$

3.2. Доказательство теоремы B. Пусть (G,w,l) – допустимая тройка, и пусть класс μ определен условием $l_\mu = l$. Записывая условие (1) теоремы B в когомологической форме как

$$\langle wx, \mu\rangle = 2l(x,x)\ , \quad x \in H^3(G,2),$$

и используя лемму 2.6.3, это условие можно записать в виде

$$\langle wx + \mathrm{Sq}^2 x, \mu\rangle = 0\ .$$

Согласно теореме 1.8.1, класс μ лежит в образе гомоморфизма (7), т.е. существуют замкнутое 5-мерное многообразие M и отображение $f : M \to K(G,2)$, удовлетворяющие условиям:

(1) $f^*(w) = w_2(M)$;

(2) $f_*[M] = \mu$.

Все, что теперь требуется – перестроить многообразие M и отображение f (сохраняя условия 1 и 2) таким образом, чтобы M стало односвязным, а $f_* : H_2(M) \to G$ – изоморфизмом. Заметим прежде всего, что мы, очевидно, можем легко сделать многообразие M связным, а гомоморфизм f_* – эпиморфизмом. (Чтобы добиться второго, можно выбрать некоторую систему образующих g_i группы G, реализовать каждую из них отображением $h_i : A_i \to K(G,2)$, где в качестве A_i берется либо прямое произведение $S^2 \times S^3$, либо "косое произведение" $S^2 \widetilde{\times} S^3$ в зависимости от значения $w(g_i)$, после чего взять связную сумму (M, f) со всеми (A_i, h_i).)

Наконец, главный пункт доказательства – уничтожение ядра $\mathrm{Ker}\, f_*$ посредством перестроек индекса 3 (именно здесь используется условие невырожденности формы l). Соответствующие рассуждения (для многообразий размерности $4k+1$) хорошо известны (см., например, [11, §5]), и мы напомним, в чем они состоят в нашем случае.

Во-первых, если x – некоторая образующая бесконечного порядка группы $\mathrm{Ker}\, f_*$, то это (ввиду теоремы 2.11) – неделимый элемент группы $H_2(M)$; по стандартным соображениям, его можно "убить" соответствующей сферической перестройкой, не "порождающей" в $H_2(M)$ новых элементов.

Если же x – элемент конечного порядка, то, согласно [11, лемма 5.8] (доказательство этой леммы проходит здесь без каких-либо изменений), "убивая" его аналогичным образом, мы получаем новую образующую бесконечного порядка. Таким образом, мы можем как уменьшать ранг группы $\mathrm{Ker}\, f_*$, не меняя ее периодической части, так и уменьшать периодическую часть (вообще говоря, увеличивая ранг); ясно, что эти два процесса в конце концов дают требуемый результат. □

Заметим в заключение, что вышеприведенное рассуждение позволяет с новой точки зрения взглянуть на условия теоремы В.

Мы видим, что условие Уолла (1) – это не что иное как равенство $d^2_{5,0}(\mu) = 0$, необходимое и достаточное для реализуемости класса $\mu \in H_5(G,2)$ элементом группы бордизмов $\Omega_5^{\mathrm{spin}}(G,2;w)$. (В частности, мы получаем новое доказательство этого соотношения.) Что касается второго условия – невырожденность формы l – то, как мы видели, его нарушение является единственным препятствием к реализации вышеупомянутого класса бордизмов μ посредством “3-эквивалентности” – отображения, индуцирующего изоморфизм $H_2(M) \to G$.

Литература

1. D. Barden, *Simply connected five-manifolds.* Ann. Math., **75** (1965), 365–385.
2. C. T. C. Wall, *Killing the middle homotopy group of odd dimensional manifolds.* Trans. Am. Math. Soc., **103** (1962), 421–433.
3. C. T. C. Wall, *Diffeomorphisms of* 4*-manifolds.* J. London Math. Soc., **39** (1964), 131–140.
4. R. E. Stong, *Notes on cobordism theory.* Princeton University Press and the University of Tokyo Press (1968).
5. А. В. Жубр, *Классификация односвязных шестимерных спинорных многообразий.* Изв. АН СССР, Сер. матем. **39** (1975), 839–859.
6. А. В. Жубр, *Классификация односвязных* 6*-мерных многообразий.* Докл. Акад. Наук СССР, **255** (1980), 1312–1315.
7. A. V. Žubr, *Classification of simply connected topological* 6*-manifolds.* Topology and Geometry – Rohlin Seminar, Lecture Notes in Math., vol. 1346, Springer, Berlin–New York, 1988, pp. 325–339.
8. A. V. Zhubr, *Spin bordism of oriented manifolds and the Hauptvermutung for* 6*-manifolds.* Topology, Ergodic Theory, Real Algebraic Geometry. Rokhlin's Memorial (V. Turaev, A. Vershik, eds.), Adv. Math. Sci., Am. Math. Soc., Providence, RI (в печати).
9. А. В. Жубр, *Замкнутые односвязные шестимерные многообразия: доказательства классификационных теорем.* Алгебра и анализ, **12**, No. 4 (2000), 126–230.
10. Дж. П. Мэй, *Общий алгебраический подход к операциям Стинрода.* В кн.: Стинрод Н., Эпстейн Д. Когомологические операции. М.: Мир, 1983.
11. M. A. Kervaire, J. Milnor, *Groups of homotopy spheres.* Ann. Math., **77** (1963), 504–537.

Zhubr A. V. On a paper by Barden.

It is shown that an approach earlier used by the author for classification of closed simply connected 6-manifolds (reduction to the problem of calculating certain bordism groups) can also be applied to easily obtain the results of Barden (1965) on classification of closed simply connected 5-manifolds.

Сыктывкарский государственный университет

Поступило 31 декабря 2000 г.