Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 279, 2001 г.

А. А. Иванов

МЕТРИЧЕСКАЯ АКСИОМАТИКА ЕВКЛИДОВА ПРОСТРАНСТВА

§1. Введение

Здесь будет приведена некоторая система аксиом для обычного (3-х мерного) евклидова пространства, основанная на понятии метрики, как единственном исходном понятии. Эта система состоит из аксиом, являющихся простыми геометрическими утверждениями, справедливость которых будет здесь доказана. Обратная процедура вывода аксиом Гильберта (см. [1]) из метрических аксиом тоже достаточно проста. Однако переход от обычной аксиоматики евклидова пространства к метрической аксиоматике позволяет по другому взглянуть на геометрию, а также рассматривать различные обобщения евклидова пространства за счет ослабления соответствующих метрических аксиом. Еще одним преимуществом предлагаемой здесь метрической аксиоматики евклидова пространства является ее финитность, позволяющая, по-существу, ограничиваться конечными объектами: отрезками, треугольниками, тетраэдрами (ср. [3]).

Как уже было сказано, понятие метрики является здесь исходным понятием. Мы будем считать, что задано некоторое множество X и расстояние $d(x, y)$, являющееся неотрицательной функцией точек x, y этого множества.

Определение. *Функция $d : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}_+$, где $\mathbb{R}_+$ – множество неотрицательных вещественных чисел, называется метрикой на X, если*

1. $d(x, y) = 0 \iff x = y$ *(аксиома тождества).*
2. $d(x, y) = d(y, x)$ *(аксиома симметрии).*
3. $d(x, z) \leqslant d(x, y) + d(y, z)$ *(аксиома треугольника).*

Пара (X, d) называется метрическим пространством.

Определение. *Взаимно однозначное отображение f метрического пространства (X, d) на метрическое пространство (X', d') называется изометрией, если $d(x, y) = d'(f(x), f(y))$. В этом случае* *говорят, что эти пространства изометричны.*

Замечание. При построении метрической аксиоматики евклидова пространства сами аксиомы метрики в нее не включаются.

§2. Линейные множества метрических пространств

Мы рассмотрим сначала общее понятие линейного множества в произвольном метрическом пространстве (X, d).

Определение. *Пусть A, B, C – три точки метрического пространства (X, d). Будем говорить, что эти точки образуют в (X, d) линейное множество, если*

$$\pm d(A, C) \pm d(C, B) = d(A, B).$$

Если при этом в альтернированной сумме, стоящей в левой части этого равенства, оба слагаемых отличны от нуля и берутся со знаком плюс, то говорят, что точка C лежит между точками A и B.

Замечание. Если различные точки A, B, C образуют линейное множество, то одна из них лежит между двумя другими. Чтобы убедиться в этом достаточно в равенстве

$$\pm d(A, C) \pm d(C, B) = d(A, B).$$

перенести член с отрицательным знаком (если такой есть) из левой части в правую. Заметим также, что в [2] такие точки назывались расположенными прямолинейно.

Определение. *Множество называется линейным в (X, d), если любые его три точки образуют линейное множество.*

Определение. *Отрезком $[AB]$ с концами A, B называют множество, состоящее из точек A, B и всех точек C, лежащих между точками A и B. Расстояние $d(A, B)$ между точками A и B называют длиной отрезка $[AB]$. Будем обозначать эту длину через $|AB|$.*

Замечание. Так как точки A и B равноправны в определении отрезка, то $[AB]$ и $[BA]$ обозначают один и тот же отрезок.

Определение. *Прямой (линией) AB, проходящей через две точки A и B, называют объединение всех отрезков, содержащих отрезок $[AB]$.*

Замечание. Если указание на точки A, B несущественно, то говорят просто о прямой.

Определение. *Если не существует прямой, содержащей точки A, B, C, то говорят, что эти точки не лежат на одной прямой.*

Определение. *Пусть $A \neq B$. Лучом $[AB$ прямой AB, выходящим из точки A в сторону точки B, называют множество, состоящее из отрезка $[AB]$ и всех точек C, для которых $|AC| - |BC| = |AB|$, лучом $A]B$ прямой AB, выходящим из точки A в сторону противоположную точке B, называют множество, состоящее из всех точек C, для которых $|CB| - |CA| = |AB|$.*

Теория линейных множеств метрического пространства без дополнительных предположений оказывается довольно скудной. Например в общей ситуации отрезок не обязательно является линейным множеством, как показывает следующий пример.

Пример. Пусть $X = \{A, B, C, D\}$, $d(A, B) = 1$, $d(A, C) = 3$, $d(A, D) = 5$, $d(B, C) = 3$, $d(B, D) = 4$, $d(C, D) = 2$. Нетрудно проверить, что аксиомы метрики здесь выполняются и $[AD] = X$. С другой стороны, множество $\{B, C, D\}$ не является линейным множеством, поэтому не является линейным множеством и отрезок $[AD]$.

Замечание. Из этого примера следует, что в общем случае три точки могут лежать на одной прямой и тогда, когда они не образуют линейное множество. Используя тот же пример, можно показать, что прямая не обязательно является объединением лучей, идущих из одной точки в противоположных направлениях. Действительно, в этом примере прямая AB совпадает с отрезком $[AB]$, но $[CD = \{C, D\}$, $C]D = \{A, C\}$ и поэтому $AB \neq [CD \cup C]D$.

С другой стороны, можно доказать, что если *некоторая конечная совокупность точек образует линейное множество, то существует отрезок которому все эти точки принадлежат, причем его концами являются точки рассматриваемого множества.* Действительно, среди всех пар точек принадлежащих этой совокупности есть пара с наибольшим расстоянием. Обозначим эту пару через A, B и пусть точка C любая другая точка рассматриваемой совокупности точек. Тогда точки A, B, C образуют линейное множество и поэтому одна из этих точек лежит между двумя другими. Но так как $|AB|$ – наибольшая из величин $|AB|, |AC|, |BC|$, то $|AC| + |CB| = |AB|$, то есть $C \in [AB]$.

К сожалению, из линейности метрического пространства (X, d) не следует единственность точек M, удовлетворяющих соотношению $\pm|AM| \pm |MB| = |AB|$ (имеется в виду, что знаки фиксированы). Действительно, пусть $X = \{A, B, C, D\}$, $d(A, C) = d(B, D) = 2$, $d(A, B) = d(B, C) = d(C, D) = d(D, A) = 1$. Здесь любые три точки составляют линейное множество, так как одно из расстояний между ними равно 2, а остальные два равны 1. С другой стороны, точки B, D лежат между точками A, C и, одновременно, $d(A, B) = d(A, D)$, $d(B, C) = d(D, C)$. Естественно, поэтому, ввести следующее условие.

Аксиома $E1$. *Для любых точек A и B точка M, удовлетворяющая условию $\pm|AM| \pm |MB| = |AB|$ ($|AM|$, $|MB|$ и знаки фиксированы), определена однозначно (аксиома единственности).*

Очевидно, что в евклидовом пространстве это условие выполняется.

Другое условие связано с понятием линейной сцепленности множеств.

Определение. *Два множества называются линейно сцепленными, если их пересечение состоит не менее чем из двух точек.*

Определение. *Конечная система множеств в (X, d) называется линейно сцепленной, если эти множества можно так перенумеровать, возможно с повторениями, что любые соседние множества окажутся линейно сцепленными.*

Аксиома $E2$. *Объединение множеств любой линейно сцепленной системы линейных множеств является линейным множеством (аксиома линейности).*

Теорема. *В евклидовом пространстве аксиома $E2$ имеет место.*

Доказательство. Заметим, прежде всего, что в евклидовом пространстве любое линейное множество содержится в какой-нибудь прямой. Действительно, если это множество одноточечно, то наше утверждение тривиально. Пусть рассматриваемое множество содержит по крайней мере две точки A и B а C – произвольная точка этого множества. Тогда, в силу линейности,

$|AB| = \pm|AC| \pm |CB|$ и потому $C \in AB$. Отсюда следует, что все рассматриваемое множество содержится в прямой AB. Если, теперь, два линейных множества линейно сцеплены, то их пересечение содержит какие-то две точки A и B и потому оба эти множества содержатся в прямой AB и их объединение является линейным множеством. Рассматривая произвольную линейно сцепленную систему линейных множеств мы можем перейти к соответствующей конечной последовательности линейных множеств у которой любые соседние множества линейно сцеплены. Заменив два первые множества этой последовательности на их объединение, мы получим аналогичную последовательность. Повторяя эту процедуру, мы будем получать все более короткую последовательность и, в конечном счете, одно линейное множество, являющееся объединением исходных множеств. $\square$

При выполнении аксиомы $E2$ для метрического пространства можно доказать, что для его отрезков справедливы некоторые свойства обычных евклидовых отрезков.

Теорема. *Если для некоторого метрического пространства (X, d) выполняется аксиома линейности, то имеют место следующие утверждения:*

1. *любой его отрезок является линейным множеством,*
2. *если точки C, D принадлежат отрезку $[AB]$, то $[CD] \subset [AB]$,*
3. *обведининие двух линейно сцепленных отрезков содержится в некотором отрезке, концами которого являются некоторые из концов исходных отрезков,*
4. *каждая прямая является обведининием вложенных друг в друга отрезков.*

Доказательство. 1. Рассмотрим произвольный отрезок $[AB]$ этого метрического пространства. Можно считать, что $A \neq B$, так как одноточечное множество всегда линейно. Рассмотрим три любые точки C, D, E этого отрезка. По определению отрезка, тройки $\{A, C, B\}$, $\{A, D, B\}$ и $\{A, E, B\}$ являются линейно сцепленными линейными множествами, поэтому, в силу аксиомы $E2$, линейно их объединение $\{A, B, C, D, E\}$ и его подмножество $\{C, D, E\}$. Первый пункт теоремы доказан.

2. Пусть точки C, D принадлежат отрезку $[AB]$ и M – произвольная точка отрезка $[CD]$. Нетрудно понять, что достаточно рассмотреть случай $A = C$ или $D = B$. Рассмотрим для опре-

деленности случай $D = B$. В этом случае $|AC| + |CB| = |AB|$ и $|CM| + |MB| = |CB|$, если $M \in [CB]$. Из этих равенств получаем $|AC|+|CM|+|MB| = |AB|$, откуда следует, что $|AM|+|MB| = |AB|$ и поэтому $M \in [AB]$. Второй пункт теоремы доказан.

3. Рассмотрим два линейно сцепленных отрезка $[AB]$ и $[CD]$. Так как они являются линейно сцепленными линейными множествами, то их объединение является линейным множеством. В частности является линейным и множество $\{A, B, C, D, \}$. Но тогда это множество содержится в некотором отрезке, концами которого являются точки из $\{A, B, C, D, \}$. Без нарушения общности можно считать, что это либо точки A, B либо точки A, D. В первом случае $[CD] \subset [AB]$, во втором случае $[AB] \subset [AD]$ и $[CD] \subset [AD]$.

4. Рассмотрим произвольную прямую AB. По определению прямой, она состоит из отрезков, содержащих отрезок $[AB]$. В силу пункта 3, каждые два таких отрезка содержатся в некотором отрезке этой прямой. Среди систем вложенных друг в друга отрезков, содержащих отрезок $[AB]$ найдется максимальная система, которую мы фиксируем в дальнейших рассуждениях. Произвольный отрезок этой системы обозначим через $[DE]$. Пусть M – некоторая точка прямой AB. Тогда либо найдется отрезок $[DE]$, для которого $|DE| \geq |DM|$ и $|DE| \geq |EM|$ либо для каждого отрезка $[DE]$ или $|DE| < |DM|$ или $|DE| < |EM|$. В первом случае $M \in [DE] \subset AB$, во втором же случае отрезок $[DE]$ строго содержится или в отрезке $[DM]$ или в отрезке $[EM]$, то есть строго содержится, в силу пункта 3, в некотором отрезке содержащем отрезок $[AB]$, что противоречит максимальности рассматриваемой системы отрезков. $\square$

Важными для развертывания соответствующей теории является также следующее условие.

Аксиома $E3$. *Для любых двух точек A, B и равенства*

$$\pm d_1 \pm d_2 = d(A, B), d_1 \geqslant 0, d_2 \geqslant 0,$$

существует точка C, для которой

$$d(A, C) = d_1,\ d(C, B) = d_2 \text{ (аксиома заполнения прямой).}$$

Теорема. *В евклидовом пространстве аксиома $E3$ имеет место.*

Доказательство. Рассмотрим три возможных случая:

$$d_1 + d_2 = d(A, B), \quad d_1 - d_2 = d(A, B), \quad -d_1 + d_2 = d(A, B).$$

В первом случае на отрезке $[AB]$ прямой AB найдется однозначно определенная точка C, для которой $d_1 = |AC|$, $d_2 = |CB|$, во втором случае на луче $[AC$ прямой AB найдется однозначно определенная точка C, для которой $d_1 = |AC|$, $d_2 = |BC|$, наконец в третьем случае на луче $AB]$ прямой AB нфйдется однозначно определенная точка C, для которой $d_1 = |CA|$, $d_2 = |CB|$. □

Замечание. Одна аксиома $E3$ не обеспечивает линейность прямой. Действительно, точки A, B, C, D, приведенного выше примера, можно дополнить до метрического пространства, удовлетворяющего этой аксиоме.

Можно доказать даже более сильное утверждение.

Теорема. *Любое метрическое пространство можно расширить до метрического пространства, удовлетворяющего аксиоме $E3$.*

Доказательство. Рассмотрим произвольное метрическое пространство (X, d). Каждой паре a, b различных точек этого пространства сопоставим изометричное числовой прямой множество $L_{a,b}$ так, что расстояние между точками a и b в (X, d) и в $L_{a,b}$ совпадают, а $L_{a,b} \cap L_{c,d} = \{a, b\} \cap \{c, d\}$ для любых точек a, b, c, d. Положим $X' = \bigcup L_{a,b}$, где объединение распространяется на все $a \in X, b \in X, a \neq b$. Определим на X' метрику d'.

Пусть $x \in L_{a,b}, y \in L_{c,d}$. Мы можем рассмотреть четыре суммы $|xa| + |ac| + |cy|$, $|xa| + |ad| + |dy|$, $|xb| + |bc| + |cy|$, $|xb| + |bd| + |dy|$, наименьшую из эти сумм и будем считать расстоянием $d'(x, y)$. Нетрудно доказать, что d' является метрикой.

В пространстве (X', d') аксиома $E3$ может и не выполняться, но она выполняется для точек из X. Теперь мы можем повторить такую процедуру расширения уже для пространства (X', d'), получив метрическое пространство (X'', d'') и так далее. Повторив эту процедуру n раз, мы получим метрическое пространство $(X^{(n)}, d^{(n)})$. Объединение этих метрических пространств, взятых для всех $n \in \mathbb{N}$, и будет расширением пространства (X, d), удовлетворяющим аксиоме $E3$. □

Аксиомы $E1$, $E2$ и $E3$ достаточны для евклидовости линейной геометрии.

Теорема. *Если для метрического пространства (X,d) выполняются аксиомы $E1$, $E2$ и $E3$, то любая прямая этого пространства изометрична числовой прямой с обычной метрикой.*

Доказательство. Рассмотрим в X произвольную прямую AB и сопоставим точкам A, B точки $\phi(A)=0$, $\phi(B)=d(A,B)$ числовой прямой. Для произвольной точки M прямой AB положим

$$\phi(M)=\begin{cases} d(A,M), & \text{если } M\in[A,B] \\ d(A,B)+d(B,M), & \text{если } M\in A[B \\ -d(M,A), & \text{если } M\in A]B. \end{cases}$$

Это определение корректно, так как аксиома $E2$ обеспечивает представление прямой AB в виде объединения $A]B\cup[AB]\cup A[B$. Аксиома $E1$ обеспечивает взаимную однозначность отображения ϕ, аксиома $E3$ обеспечивает совпадение ϕ-образа прямой AB с $\mathbb{R}$.

Отображение ϕ является изометрией прямой AB на $\mathbb{R}$. Действительно, пусть M,N – произвольные точки из X. Достаточно рассмотреть следующие шесть случаев:

$$\begin{cases} M\in A]B, & N\in A]B \text{ или } N\in[AB] \text{ или } N\in A[B \\ M\in[AB], & N\in[AB] \text{ или } N\in A[B \\ M\in A[B, & N\in A[B. \end{cases}$$

Все эти случаи рассматриваются одинаково. Например, в первом случае мы имеем $\phi(M)=-d(M,A)$, $\phi(N)=-d(N,A)$. Без нарушения общности можно считать, что $d(M,A)>d(N,A)$, поэтому $d(M,N)=d(M,A)-d(N,A)=\phi(N)-\phi(M)$. $\square$

§3. Плоские множества метрических пространств

Мы рассмотрим теперь понятие плоского множества в произвольном метрическом пространстве (X,d).

Определение. *Пусть A,B,C – произвольные точки метрического пространства. Будем говорить, что они определяют треугольник $[ABC]$. Отрезки $[AB]$, $[BC]$, $[CA]$ будем называть сторонами треугольника, сами точки A,B,C – его вершинами. Число $|ABC|=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, где a,b,c – длины сторон, а $p=\frac{1}{2}(a+b+c)$ – полупериметр треугольника, будем называть площадью треугольника $[ABC]$. Если площадь некоторого треугольника равна нулю, то треугольник называется вырожденным.*

Замечание. Нетрудно заметить, что если треугольник ABC вырожденный, то точки A, B, C образуют линейное множество. Действительно, в этом случае хоть один из сомножителей произведения $p(p-a)(p-b)(p-c)$ равен нулю. Пусть, например, $p-a=0$, тогда $a=b+c$. Без ограничения общности можно считать, что $a=|BC|$, $b=|CA|$, $c=|AB|$. В этом случае будем иметь соотношение $|CB|=|CA|+|AB|$, то есть точка A лежит между точками C и B.

Определение. *Будем говорить, что точка M пространства (X,d) принадлежит треугольнику $[ABC]$, если $|ABC|=|MAB|+|MBC|+|MCA|$. Под треугольником будем понимать теперь множество всех принадлежащих ему точек.*

Замечание. В соответствии с предыдущим определением, каждая вершина A, B, C треугольника $[ABC]$ этому треугольнику принадлежит. Например $A \in [ABC]$, так как $|AAB|=0$, $|ACA|=0$, поэтому $|AAB|+|ACA|+|ABC|=|ABC|$. Несколько сложнее ситуация относительно сторон треугольника, здесь потребуется дополнительное условие.

Аксиома $E4$. *Для произвольно фиксированной прямой l и фиксированной точки C имеет место соотношение $|ABC|=h|AB|$, где h не зависит от выбора отрезка $[AB]$ на прямой l.*

Теорема. *В евклидовом пространстве аксиома $E4$ имеет место.*

Доказательство. В соотношении $|ABC|=h|AB|$ число h является высотой треугольника $[ABC]$ с основанием $[AB]$, равной расстоянию от точки C до прямой l. $\square$

Замечание. Если для метрического пространства (X,d) выполняется аксиома $E4$, то точки сторон треугольника $[ABC]$ ему принадлежат. Действительно, пусть, например, $M \in [AB]$. Тогда $|AM|+|MB|=|AB|$ и, в силу аксиомы $E4$, $|AMC|+|MBC|=|ABC|$. Так как $|AMB|=0$, то $|AMB|+|AMC|+|MBC|=|ABC|$ и потому, по определению треугольника, $M \in [ABC]$.

Определение. *Плоскостью ABC, проходящую через точки A, B, C, не лежащие на одной прямой, называют объединение всех треугольников, содержащих треугольник $[ABC]$.*

Замечание. Если указание на точки A, B, C несущественно, то говорят просто о плоскости.

Определение. *Пусть A, B, C, D – четыре точки метрического пространства (X, d). Будем говорить, что эти точки образуют плоское множество, если*

$$\pm|DAB| \pm |DBC| \pm |DCA| = |ABC|.$$

Если при этом точки A, B, C не лежат на одной прямой и в альтернированной сумме, стоящей в левой части этого равенства, все слагаемые отличны от нуля и входят со знаком плюс, то говорят, что точка D лежит между точками A, B, C.

Определение. *Множество называется плоским в (X, d), если любые его четыре точки образуют плоское множество.*

Определение. *Два множества называются плоско сцепленными, если их пересечение содержит три точки, не лежащие на одной прямой.*

Определение. *Конечная система множеств в (X, d) называется плоско сцепленной, если эти множества можно так перенумеровать, возможно с повторениями, что любые соседние множества окажутся плоско сцепленными.*

Как и для линейных множеств, большую роль играет следующее условие:

Аксиома $E5$. *Объединение множеств любой плоско сцепленной системы плоских множеств является плоским множеством (аксиома плоскости).*

Теорема. *В евклидовом пространстве аксиома $E5$ имеет место.*

Доказательство. Аналогично доказательству справедливости аксиомы $E3$. □

Замечание. Используя эту аксиому, можно доказать, что любой треугольник является плоским множеством. Действительно, для любой точки $M \in [ABC]$ имеет место, по определению треугольника, соотношение $|ABC| = |MAB| + |MBC| + |MCA|$ и поэтому точка M образует с точками A, B, C плоское множество. Для произвольного множества $\{M_1, M_2, M_3, M_4\}$ мы можем рассмотреть плоско сцепленную систему множеств $\{A, B, C.M_i\}$. Объединение множеств этой системы будет, в силу аксиомы $E4$, плоским множеством $\{A, B, C, M_1, M_2, M_3, M_4\}$, поэтому будет плоским и множество $\{M_1, M_2, M_3, M_4\}$.

Аксиома $E6$. *Для любых трех точек A, B, C, не лежащих на одной прямой, и любых неотрицательных чисел S_1, S_2, S_3, удовлетворяющих условию*

$$\pm S_1 \pm S_2 \pm S_3 = |ABC|,$$

существует единственная точка M, для которой $S_1 = |MAB|, S_2 = |MBC|, S_3 = |MCA|$ (аксиома заполнения плоскости).

Замечание. Аксиому $E6$, как и в линейном случае можно заменить на две аксиомы, выделив отдельно условие единственности.

Теорема. *В евклидовом пространстве аксиома $E6$ имеет место.*

Доказательство. Это простое утверждение из планиметрии.

Рассмотрим точки A, B, C, не лежащие на одной прямой, плоскость ABC и лежащий в этой плоскости треугольник $[ABC]$. Каждая из прямых AB, BC, CA разбивает плоскость ABC на две полуплоскости. Остановимся сначала на прямой AB. Площади $|MAB|$ треугольника $[MAB]$ будем приписывать знак $+$, если отрезок $[SM]$ не пересекает прямую AB и знак $-$, если отрезок $[CM]$ нересекает прямую AB. Аналогичные знаковые условия формулируются для площадей треугольников $[MBC]$ и $[MCA]$. Нетрудно проверить, что эти правила знаков можно сформулировать в терминах полуплоскостей, на которые плоскость ABC разбивается прямыми AB, BC, CA. Например для прямой AB, полуплоскости содержащей точку C (положительной полуплоскости), приписывается знак $+$, а второй (отрицательной) полуплоскости, не содержащей точку C, приписывается знак $-$. Аналогичные знаковые условия формулируются для полуплоскостей, образуемых на плоскости ABC прямыми BC и CA. Для произвольно фиксированной точки M плоскости ABC можно рассмотреть знаки, приписываемые треугольникам MAB, MBC, MCA. Возможны следующие случаи: все знаки плюсы, два знака плюс и один минус, один знак плюс и два знака минус. Доказательство получается аккуратным разбором этих случаев (случай, когда все знаки минусы, невозможен). По сути дела, доказываемое утверждение означает, что барицентрические координаты устанавливают взаимно-однозначное соответствие между точками плоскости и тройками чисел с единичной суммой.

Замечание. При выполнении аксиомы $E6$ каждая прямая AB разбивает содержащую ее плоскость на две части. Эти части выделяются фиксацией какой-нибудь точки C этой плоскости, не принадлежащей рассматриваемой прямой. Для этого рассматривается треугольник ABC и произвольная точка M плоскости. В силу аксиомы $E6$, для этой точки имеется соотношение $\pm|MAB| \pm |MBC| \pm |MCB| = |ABC|$. Если $|MAB|$ входит в альтернированную сумму со знаком $+$, то точка M принадлежит полуплоскости, содержащей точку C, в противном случае она принадлежит второй полуплоскости.

К плоским аксиомам относится также и следующее условие:

Аксиома $E7$. *Пусть*

$$d(A,A') + d(A',O) = d(A,O), \; d(B,B') + d(B',O) = d(B,O),$$

причем все входящие сюда расстояния отличны от нуля, и

$$\frac{d(A',O)}{d(A,O)} = \frac{d(B',O)}{d(B,O)}$$

тогда

$$\frac{d(A',O)}{d(A,O)} = \frac{d(B',O)}{d(B,O)} = \frac{d(A',B')}{d(A,B)} \text{ (аксиома подобия).}$$

Теорема. *В евклидовом пространстве аксиома $E7$ имеет место.*

Доказательство. Следует из соответствующего признака подобия треугольников и пропорциональности их сторон. □

Эта аксиома играет важную роль в теории параллельности прямых и плоскостей.

§4. Аксиомы объемности

Объемная группа метрических аксиом обычного (3-х мерного) евклидова пространства отличается по своей структуре от двух предыдущих. Заметим, прежде всего, что соответствующая теория будет содержательной, если выполняется следующее условие.

Аксиома $E8$. *Существуют четыре точки A, B, C, D, не образующие плоское множество.*

Очевидно, что в евклидовом пространстве эта аксиома имеет место. Основными объектами здесь являются тетраэдры

$[ABCD]$, определяемые четверками точек. Каждому такому тетраэдру можно сопоставить его объем $|ABCD|$, определяемый в евклидовой геометрии как функция длин $|AB|$, $|AC|$, $|AD|$, $|BC|$, $|BD|$, $|CD|$ его ребер. Таким образом объем тетраэдра является метрическим понятием. Мы сформулируем еще одну аксиому, входящую в эту группу.

Аксиома $E9$. *Для любых четырех точек A, B, C, D, не лежащих в одной плоскости, и любых неотрицательных чисел V_1, V_2, V_3, V_4, удовлетворяющих условию*

$$\pm V_1 \pm V_2 \pm V_3 \pm V_4 = |ABCD|,$$

существует единственная точка M, для которой $V_1 = |MBCD|$, $V_2 = |AMCD|$, $V_3 = |ABMD|$, $V_4 = |ABCM|$ и такие точки составляют все пространство (аксиома заполнения пространства).

Доказательство справедливости этой аксиомы для евклидова пространства аналогично доказательству справедливости аксиомы $E6$.

§5. Аксиомы конгруэнтности

Определение. *Пусть (X, d) – метрическое пространство. Отображение f называется изометрией (X, d) на (X, d), если $|AB| = |f(A)f(B)|$ для любых точек A, B из X. Два множества в (X, d) называются конгруэнтными или равными, если существует изометрия (X, d) на (X, d), переводящая одно из этих множеств в другое.*

Аксиома $E10$. *Пусть отрезки $[AB]$ и $[A'B']$ имеют одинаковую длину. Тогда существует изометрия (X, d) на себя, переводящая концы отрезка $[AB]$ в соответствующие им концы отрезка $[A', B']$ ($f(A) = A'$, $f(B) = B'$).*

Замечание. Если изометрия (X, d) на себя переводит концы отрезка $[AB]$ в соответствующие им концы отрезка $[A', B']$, то *она переводит отрезок $[AB]$ в отрезок $[A'B']$*. Действительно, если $f(A) = A'$, $f(B) = B'$ и $C \in [AB]$, то есть $|AC| + |CB| = |AB|$, то $|f(A)f(C)| + |f(C)f(B)| = |f(A)f(B)|$ и поэтому $f(C) \in [f(A)f(B)]$.

Аксиома $E11$. *Пусть плоскости α и β пересекаются по прямой l и $A \in \alpha$, тогда существует изометрия (X, d) на себя тождественная на l, переводящая точку A в некоторую точку $B \in \beta$. При этом* *точка B может находиться в любой половине плоскости β относительно прямой l.*

Аксиомы $E10$ и $E11$ имеют, очевидно, место для евклидова пространства.

Замечание. По аналогии с системой метрических аксиом 3-х мерного евклидова пространства может быть сформулирована система аксиом n-мерного евклидова пространства.

§6. Первая группа аксиом Гильберта

Мы перейдем теперь к доказательству того, что из метрических аксиом 3-х мерного евклидова пространства следуют все аксиомы Гильберта. Мы начнем, естественно, с первой группы, с аксиом соединения (принадлежности). Эта группа состоит из восьми аксиом.

Аксиома I_1. *Для любых двух точек A, B существует прямая, проходящая через эти точки.*

Доказательство. Утверждение следует из того, что существует метрически определенная прямая, содержащая отрезок $[AB]$ и, следовательно, проходящая через точки A, B. $\square$

Аксиома I_2. *Для любых двух точек A, B существует не более одной прямой, проходящей через эти точки.*

Доказательство. По определению понятия прямой, любая прямая, проходящая через точки A и B, например прямая AB, содержит отрезок $[AB]$. Если прямая CD также содержит отрезок $[AB]$, то существует отрезок этой прямой, содержащий и $[AB]$ и $[CD]$. Поэтому можно ограничиться случаем $[CD] \subset [AB]$. В этом случае мы будем иметь включение $AB \subset CD$. Докажем обратное включение. Пусть $M \in CD$, тогда точки C, D, M образуют линейное множество. С другой стороны и точки A, B, C, D образуют линейное множество, линейно сцепленное с множеством $\{C, D, M\}$, и поэтому, в силу аксиомы $E2$, множество $\{A, B, C, D, M\}$ также линейно. Но тогда и множество $\{A, B, M\}$ будет линейным, то есть одна из этих точек лежит между двумя другими. Если M лежит между A и B, то $M \in [AB] \subset AB$, если же A лежит между M и B, то $[AB] \subset [BM]$ и поэтому $M \in AB$. Аналогично рассматривается случай, в котором B лежит между M и A. $\square$

Аксиома I_3. *На прямой существуют по крайней мере две точки. Существуют по крайней мере три точки, не лежащие на одной прямой.*

Доказательство. Следует из определения прямой и аксиомы $E8$. □

Аксиома I_4. *Для любых трех точек A, B, C, не лежащих на одной и той же прямой существует плоскость, содержащая каждую из этих точек. Для любой плоскости всегда существует принадлежащая ей точка.*

Доказательство. Следует из определения понятия плоскости. □

Аксиома I_5. *Для любых трех точек A, B, C, не лежащих на одной и той же прямой, существует не более одной плоскости, проходящей через эти точки.*

Доказательство. Рассмотрим плоскость ABC и какую-нибудь плоскость DEF, содержащую точки A, B, C. Как и в линейной ситуации, можно считать, что $[DEF] \subset [ABC]$ и поэтому $ABC \subset DEF$. Докажем обратное включение. Пусть $M \in DEF$, тогда множество $\{M, D, E, F\}$ – плоское множество. Но плоским является и множество $\{A, B, C, D, E, F\}$, содержащееся в плоскости ABC. Пересечение $\{D, E, F\}$ этих плоских множеств является по условию плоским множеством, а потому, в силу аксиомы $E5$, и их объединение $\{A, B, C, D, E, F, M, \}$ является плоским множеством. Отсюда следует, что $M \in ABC$. Тем самым доказано, что $DEF \subset ABC$. □

Аксиома I_6. *Если две точки прямой лежат в некоторой плоскости, то и проходящая через них прямая лежит в этой плоскости.*

Доказательство. Пусть точки A, B и C лежат в плоскости α, причем точка C не принадлежит прямой AB. Рассмотрим произвольную точку M прямой AB. Тогда точки A, B, M образуют лнейное множество, то есть $\pm|AM|\pm|MB|) = |AB|$. В силу аксиомы $E4$ имеет тогда место соотношение $\pm|AMC|\pm|MBC| = |ABC|$. Так как $|ABM| = 0$, мы получаем соотношение $\pm|ABM|\pm|AMC|\pm |MBC| = |ABC|$ откуда, в силу аксиомы $E6$, следует, что $M \in \alpha$. □

Аксиома I_7. *Если две плоскости α и β имеют общую точку M, то они имеют еще одну общую точку N.*

Доказательство. Пусть точка M, принадлежит плоскостям α и β. Рассмотрим в плоскости α какой-нибудь треугольник $[ABC]$, содержащий внутри себя точку M, и точку D в плоскости β, не принадлежащую плоскости α. Тогда лучи с начальной точкой D, достаточно близкие к лучу $[DM$, пересекают треугольник $[ABC]$ в точках M'. Но среди таких лучей будут и лучи, содержащиеся в плоскости β, следовательно найдется точка N, принадлежащая обеим плоскостям и не совпадающая с точкой M. $\square$

Аксиома I_8. *Существуют по крайней мере четыре точки, не лежащие в одной плоскости.*

Доказательство. Непосредственно следует из аксиомы $E8$. $\square$

§7. Вторая группа аксиом Гильберта

Аксиомы этой группы определяют понятие “между”.

Аксиома II_1. *Если точка B лежит между точкой A и точкой C, то A, B, C суть различные точки прямой, а B лежит также между C и A.*

Доказательство. Непосредственно следует из метрического определения понятия “между”. $\square$

Аксиома II_2. *Для любых двух точек A и C на прямой AC существует по крайней мере одна точка B такая что точка B лежит между A и C.*

Доказательство. Возьмем любое число d, $0 < d < |AC| \neq 0$, тогда по аксиоме E_3 найдется точка B, для которой $|AB| = d$ и $|AB| + |BC| = |AC|$, то есть точка B лежит между A и C. $\square$

Аксиома II_3. *Среди любых трех точек прямой существует не более одной точки, лежащей между двумя другими.*

Доказательство. Пусть A, B, C – какие-то точки прямой. Без нарушения общности можно предположить, что точка B лежит между точками A и C, то есть $|AB| + |BC| = |AC|$. Так как оба слагаемых здесь не равны нулю, то $|AB| < |AC|$ и $|BC| < |AC|$. Отсюда следует невозможность равенств $|AC| + |CB| = |AB|$ и

$|BA| + |AC| = |BC|$, то есть точка C не лежит между точками A и B, а точка A не лежит между точками B и C. □

Для доказательства последней аксиомы этой группы, которую называют аксиомой Паша, нам понадобятся следующие утверждения.

Теорема. *Пусть a – некоторая прямая в плоскости α, B – точка в плоскости α, не лежащая на этой прямой. Тогда через точку B проходит прямая b в этой плоскости, не имеющая общей точки с прямой a.*

Доказательство. Пусть a – некоторая прямая, A – точка на этой прямой, B – точка не лежащая на прямой a, O – какая-нибудь точка на луче $[AB$, не принадлежащая отрезку $[AB]$, $k = \frac{|OB|}{|OA|}$. Для произвольной точки M на прямой a однозначно определена точка $D = D(M)$ на прямой MO, для которой $\frac{|OD|}{|OM|} = k$. Нетрудно доказать, что множество $b = \{D(M)|M \in a\}$ является прямой, проходящей через точку B. Действительно, пусть D_1, D_2, D_3 – произвольные точки этого множества, соответствующие точкам M_1, M_2, M_3 на прямой a. Без нарушения общности можно считать, что $|M_1M_2| + |M_2M_3| = |M_1M_3|$. Тогда, в силу аксиомы подобия, $|D_1D_2| + |D_2D_3| = k|M_1M_2| + k|M_2M_3| = k|M_1M_3| = |D_1D_3|$, то есть точки D_1, D_2, D_3 образуют линейное множество. Отсюда, в силу произвольности этих точек, следует, что b является прямой, а если $M_2 = A$, то $D_2 = B$, то есть $B \in b$. Прямая b не пересекается с прямой a. Действительно, пусть N – точка пересечения прямых a и b. Тогда точка $D(N)$ прямой b лежит на прямой ON, следовательно эта прямая, имея две общие точки с прямой b, совпадает с ней. Но это невозможно, так как в этом случае точка O будет также принадлежать прямой b, что противоречит выбору O. □

Определение. *Не имеющие общих точек прямые a и b называются параллельными друг другу.*

Замечание. Выше было доказано, что через каждую точку B, не принадлежащую некоторой прямой a, можно провести прямую параллельную этой прямой. Мы не можем пока утверждать, что такая прямая единственна, поэтому, говоря о параллельных прямых, мы будем иметь в виду те, которые определяются при доказательстве предыдущей теоремы. Точку O, используемую при этом, будем называть центром подобия.

Теорема. *Пусть a – некоторая прямая в плоскости α, B – точка в плоскости α, не лежащая на этой прямой, b – прямая проходящая через точку B параллельно прямой a. Тогда полоса между прямыми a и b в плоскости α заполнена прямыми параллельными прямой a.*

Доказательство. Пусть M – произвольная точка этой полосы, не лежащая на прямых a и b. Отрезок $[MO]$, где O – центр подобия, пересекает прямую b в некоторой точке M' и, следовательно, прямая MO пересекает, по построению прямой b, и прямую a. Пользуясь подобием с центром O, мы можем провести через точку M прямую параллельную прямой a. $\square$

Теорема. *Пусть две прямые плоскости α пересекаются в точке A. Тогда для каждой из этих прямых противоположно направленные лучи с начальной точкой A содержатся в различных полуплоскостях, на которые другая прямая разбивает эту плоскость.*

Доказательство. Допустим, что противоположно направленные лучи прямой b, о которых идет речь, находятся в одной из полуплоскостей прямой a. Тогда в этой полуплоскости найдется прямая c параллельная прямой a, пересекающая оба луча в точках C и C'. Но прямые b и c, содержащие несовпадающие точки C и C', совпадают, что невозможно, так как c параллельна a, а b с a пересекается. $\square$

Аксиома II_4 (Аксиома Паша). *Пусть A, B, C – три точки, не лежащие на одной прямой, и l – прямая в плоскости ABC, не проходящая ни через одну из точек A, B, C. Если при этом прямая l проходит через одну из точек отрезка AB, то она должна пройти чез одну из точек отрезка AC или через одну из точек отрезка BC.*

Доказательство. Обозначим через a прямую AB. Через точку C проведем прямую c параллельную прямой a. Тогда полоса между прямыми c и a будет заполнена прямыми параллельными прямой a. Рассмотрим теперь произвольную прямую l, не содержащую ни одну из вершин треугольника ABC, но проходящую через какую-нибудь точку M отрезка $[AB]$. Тогда лучи, на которые точка M разбивает прямую l, лежат на плоскости ABC по разные стороны от прямой a. Таким образом, один из этих лучей прямой l проходит по ту же сторону прямой a, что и треугольник $[ABC]$. Через каждую точку этого луча проходит прямая параллельная прямой a. Среди этих точек выделим те, которые принадлежат отрезкам этих параллельных прямых с концами на сторонах $[AC]$ и $[BC]$. Нетрудно доказать, что эти точки образуют некоторый отрезок $[MN]$, конец которого принадлежит либо отрезку $[AC]$ либо отрезку $[BC]$, но не обоим этим отрезкам одновременно. Точка N и будет точкой пересечения прямой l с одной из сторон $[AC]$ или $[BC]$ треугольника $[ABC]$. □

§8. Третья группа аксиом Гильберта

Аксиомы этой группы определяют понятие конгруэнтности и тем самым понятие движения.

Аксиома III_1. *Если отрезок $[AB]$ лежит на прямой a и A' – точка на той же прямой или другой прямой a', то всегда можно найти на ней такую точку B', лежащую по указанную сторону от точки A', что отрезок $[A'B']$ конгруэнтен отрезку $[AB]$ ($[A'B'] = [AB]$).*

Доказательство. Мы можем найти на прямой a' такую точку B', лежащую по указанную сторону от точки A', что $|AB| = |A'B'|$. Дальнейшее является следствием аксиомы $E10$. □

Аксиома III_2. *Если два отрезка конгруэнтны третьему, то они конгруэнтны друг другу.*

Доказательство. Пусть изометрии f, g переводят отрезки $[AB]$, $[CD]$ в отрезок $[EF]$, тода изометрия $g^{-1}f$ переводит отрезок $[AB]$ в отрезок $[CD]$. □

Аксиома III_3. *Если отрезки $[AB]$ и $[BC]$ лежат на прямой a по разные стороны от точки B и отрезки $[A'B']$ и $[B'C']$ лежат на прямой a' по разные стороны от точки B', то из конгруэнтностей $[AB] = [A'B']$ и $[BC] = [B'C']$ следует конгруэнтность $[AC] = [A'C']$.*

Доказательство. Из указанных конгруэнтностей следует равенство длин $|AB| = |A'B'|$ и $|BC| = |B'C'|$. Отсюда следует равенство длин $|AC| = |A'C'|$ и, следовательно, конгруэнтность отрезков $[AC]$ и $[A'C']$. □

Аксиома III_4. *Пусть даны угол $\angle lm$ в плоскости α, прямая a' в плоскости α' и указана некоторая сторона плоскости α' относительно прямой a'. Пусть l' обозначает луч прямой a', исходящий* *из точки O'. Тогда в плоскости α' существует один и только один луч m', обладающий следующим свойством: угол $\angle l'm'$ конгруэнтен углу $\angle lm$, и вместе с тем все внутренние точки угла $\angle l'm'$ находятся в плоскости α' по данную сторону от прямой a'.*

Доказательство. Аксиома $E10$ позволяет перевести луч l посредством соответствующей изометрии в луч l', исходящий из точки O'. При этом луч m может перейти в луч, лежащий не в плоскости α' а в какой-то другой плоскости β. Применив аксиому $E11$, мы переведем этот луч в луч m'. □

Аксиома III_5. *Если для двух треугольников $[ABC]$ и $[A'B'C']$ имеют место конгруэнтности $AB = A'B'$, $AC = A'C'$, $\angle BAC = \angle B'A'C'$, тогда имеет место и конгруэнтность $[ABC] = [A'B'C']$.*

Доказательство. Применив аксиому $E10$ мы переведем соответствующей изометрией отрезок $[AB]$ в отрезок $[A'B']$. При этом треугольник $[ABC]$ перейдет в треугольник $[A'B'C'']$. Затем применим аксиому $E10$ и переведем точку C'' в точку C', оставив отрезок $[A'B']$ неподвижным. Так как в обоих случаях мы использовали изометрии, то треугольник $[ABC]$ перейдет в треугольник $[A'B'C']$. □

§9. Четвертая группа аксиом Гильберта

Эта группа состоит всего из одной аксиомы, фигурирующей у Евклида (в другой формулировке), как пятый постулат – знаменитый пятый постулат Евклида, более 2000 лет привлекавший к себе особое внимание многих математиков и просто любителей .

Аксиома IV. *Пусть a – произвольная прямая, O – точка вне ее, тогда в плоскости, определенной прямой a и точкой O, существует не более одной прямой, проходящей через точку O и не пересекающей прямую a.*

Доказательство. Рассмотрим произвольную точку $A \in a$ и точку O, как центр подобия при построении прямых параллельных прямой a. Эти параллельные l_B строились ранее для всех точек B отрезка $[AO]$ кроме самой точки O. Однако можно провести прямую l_O, не пересекающую a, и через точку O, как предельную прямую для прямых l_B. Полоса между прямыми a и l_O, будет теперь целиком заполнена прямыми l_B, определенными для всех

$B \in [AO]$. Рассмотрим любую прямую c, проходящую через точку O. Если эта прямая не есть прямая l_O, то она проходит через некоторую точку $C \in l_B$ для какой-нибудь точки $B \in [AO]$. Но каждая точка на прямой l_B лежит на некотором отрезке $[OA']$, где $A' \in a$ и поэтому прямая c пересекается с прямой a. Тем самым доказано, что l_O – единственная прямая, проходящая через точку O и не пересекающаяся с прямой l. □

§10. Пятая группа аксиом Гильберта

Эта группа состоит из двух аксиом.

Аксиома V_1 (аксиома Архимеда). *Пусть AB и CD – два какие-нибудь отрезка прямой a. Тогда на прямой a существует конечное число точек $A_1, A_2, ..., A_n$ таких, что отрезки $AA_1, A_1A_2, ..., A_{n-1}$ A_n конгруэнтны отрезку CD и точка B лежит между точками A и A_n.*

Доказательство. Непосредственно следует из того факта, что два отрезка конгруэнтны, тогда и только тогда когда их длины равны. □

Аксиома V_2 (аксиома линейной полноты). *Точки любой прямой образуют систему, не допускающую расширения с сохранением линейного порядка, первой аксиомы о конгруэнтности и аксиомы Архимеда.*

Доказательство. Непосредственно следует из того, что любая прямая изометрична числовой прямой с обычной метрикой. □

§11. Заключение

Здесь была описана система метрических аксиом, определяющая евклидово пространство. Возможно, что можно найти и более простую систему и более простой переход от метрических аксиом к классическим, однако описанная здесь система аксиом проще аксиоматики Гильберта. Изложение евклидовой геометрии на основе метрической аксиоматики непривычно, но стоит попробовать. Интересно также посмотреть, что получится, если мы отбросим или ослабим какую-нибудь из метрических аксиом.

Литература

1. Д. Гильберт, *Основания геометрии.* Перевод с седьмого немецкого издания, ОГИЗ, М.-Л. 1948.

2. В. Ф. Каган, *Очерки по геометрии.* Издательство МГУ, 1963.
3. А. Д. Александров, Н. Ю. Нецветаев, *Геометрия.* М., Наука, 1990.

Ivanov A. A. Metric axioms of Euclidean space.

A version of axioms of Euclidean space based on the sole intial notion, namely on the notion of distance, is considered. The notions of straight line and plane are introduced in the terms of distance. Thus, Euclidean space is considered here as a metric space with metric satisfying the corresponding axioms.

Санкт-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН

Поступило 9 января 2001 г.