Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 279, 2001 г.

Д. В. Иванов

ВПОЛНЕ ГЕОДЕЗИЧЕСКИЕ ПОДМНОЖЕСТВА МНОГООБРАЗИЯ НАПРАВЛЕНИЙ ФИЗИЧЕСКОГО ПРОСТРАНСТВА

Введение

В псевдоевклидовом пространстве Минковского $M_0(+,-,-,-)$ с любой инерциальной частицей $x(t)$ $(x'(t) = a = \mathrm{const}, a^2 > 0)$ можно сопоставить ее физическое пространство $M(x) := M_0/\mathrm{Lin}\,(x')$. Каждая двумерная плоскость V, содержащая инерциальную частицу x, задает прямую $\ell = \mathrm{pr}_x(V)$ в физическом пространстве этой частицы. Здесь отображение

$$\mathrm{pr}_x : M_0 \to M(x)$$

есть проекция пространства M на свое фактор-пространство. Поэтому говорят, что двумерная плоскость, содержащая частицу $x(t)$, задает *одномерное направление* в физическом пространстве этой частицы (см. [1]). Любая инерциальная частица x_0, лежащая в плоскости V и отличная от x, однозначно проектируется на прямую ℓ. Если в векторном пространстве Минковского M_0 фиксировать функцию временно́й ориентации Ψ_T (см. [2]), то x_0 приобретает естественную временную ориентацию. Эта ориентация переносится на ℓ отображением проекции. Отсюда видно, что задание ориентации плоскости V эквивалентно выбору направления на ℓ. Класс плоскостей, параллельных V и одинаково с V ориентированных, естественно представлять двумерным подпространством $V_0 \subset M_0$ с соответствующей ориентацией. Причем V_0 задевает внутренность светового конуса $K_0(M_0)$, а значит, является двумерным пространством Минковского. Множество всех таких плоскостей обозначим через G^1.

Рассмотрим ориентированную плоскость $\alpha \in G^1$. В α можно выбрать положительно ориентированный ортогональный базис $e = \{e_0, e_1\}$ с

$$e_0^2 = -e_1^2 = \Psi_T(e_0) = 1. \tag{1}$$

Любой другой базис $\widetilde{e} = \{\widetilde{e}_0, \widetilde{e}_1\}$, удовлетворяющий соотношениям (1), получается из e гиперболическим поворотом

$$\widetilde{e}_0 = \operatorname{ch} t \cdot e_0 + \operatorname{sh} t \cdot e_1, \quad \widetilde{e}_1 = \operatorname{sh} t \cdot e_0 + \operatorname{ch} t \cdot e_1.$$

Тогда

$$e_{01} = e_0 \wedge e_1 = \widetilde{e}_0 \wedge \widetilde{e}_1 = \widetilde{e}_{01} = w \in \Lambda_2(M_0). \tag{2}$$

Скалярное произведение в пространстве Минковского M_0 канонически распространяется на всю внешнюю алгебру $\Lambda_2(M_0)$. Из (1) и (2) следует, что

$$w^2 = e_0^2 \cdot e_1^2 - \langle e_0, e_1 \rangle^2 = -1.$$

Значит каждому элементу $\alpha \in G^1$ однозначно сопоставлен простой мнимо-единичный бивектор $P(\alpha) := w$. Тем самым построено отображение

$$P : G^1 \to K_2 \cap S^- =: \overline{G}^{\,1},$$

где

$$S^- = \{w \in \Lambda_2(M_0) \mid w^2 = -1\}, \quad K_2 \ \text{– конус простых бивекторов.}$$

Отображение P осуществляет канонический диффеоморфизм между многообразием G^1 и подмногообразием $\overline{G}^{\,1} \subset \Lambda_2(M_0)$ (см. [3]), что позволяет отождествить G^1 с $\overline{G}^{\,1}$. Многообразие G^1 (отождествленное с $\overline{G}^{\,1}$) лежит в псевдоевклидовом пространстве $\Lambda_2(M_0)$, поэтому оно несет на себе индуцированную псевдориманову метрику. В дальнейшем, в зависимости от контекста, под элементом $w \in G^1$ мы будем понимать либо двумерное подпространство пространства Минковского M_0, либо бивектор из внешней алгебры $\Lambda(M_0)$.

В настоящей работе (см. §2) мы опишем четыре типа двумерных вполне геодезических подмногообразий в G^1. Любые два таких подмногообразия Φ_1, Φ_2 одного типа конгруэнтны как подмножества псевдоевклидова пространства $\Lambda_2(M_0)$. Это означает, что существует преобразование Лоренца $L \in L(M_0)$, осуществляющее изометрию всего пространства $\Lambda_2(M_0)$, при которой $L(\Phi_1) = \Phi_2$. Подмногообразия различных типов не конгруэнтны, более того не изометричны. Мы предполагаем, что указанные подмногообразия полностью исчерпывают набор полных двумерных вполне геодезических подмногообразий G^1, однако доказательством этой гипотезы пока не располагаем. В модели Кели–Кляйна пространства Лобачевского H^3, построенной в трехмерном диске $D^3 \subset M_0$ (см. [2]), каждый элемент многообразия G^1

интерпретируется как направленная хорда этого шара (см. [3]). В §3 построены модели вышеупомянутых четырех типов подмногообразий в трехмерном диске D^3. В §4 выводится явная формула для тензора кривизны многообразия G^1.

§1. Некоторые сведения из геометрии вложения $G^1 \subset \Lambda_2(M_0)$

Для удобства читателя напомним некоторые свойства псевдоевклидова пространства $\Lambda_2(M_0)$ и его подмножества G^1, описанные в [3].

Каждой тетраде Минковского (в дальнейшем просто *тетраде*)

$$\{e_0, e_1, e_2, e_3\}\ (e_0^2 = -e_1^2 = -e_2^2 = -e_3^3 = 1, \quad \langle e_i, e_j\rangle_{i\neq j} = 0)$$

соответствует ортонормированный базис $\{e_{01}, e_{02}, e_{03}, e_{12}, e_{13}, e_{23}\}$ пространства бивекторов $\Lambda_2(M_0)$. Таким образом, $\Lambda_2(M_0)$ является псевдоевклидовым пространством с сигнатурой $(+,+,+,-,-,-)$. Билинейное отображение

$$\llcorner\colon \Lambda_p(M_0)\times\Lambda_q(M_0)\to\Lambda_{p-q}(M_0), \quad p\geqslant q\geqslant 0,$$

называется *операцией внутреннего умножения*, если для любых $w\in\Lambda_p(M_0)$, $\tau\in\Lambda_q(M_0)$, $\varphi\in\Lambda_{p-q}(M_0)$ справедливо $\langle w\llcorner\tau, \varphi\rangle = \langle w, \tau\wedge\varphi\rangle$.

Зафиксируем временну́ю ориентацию четырехмерного пространства Минковского. В одномерном пространстве $\Lambda_4(M_0)$ выберем один из двух возможных единичных 4-векторов E, $E^2 = -1$. При фиксированной временно́й ориентации Ψ_T этот выбор эквивалентен выбору пространственной ориентации Ψ. Рассмотрим какую-нибудь тетраду $e = \{e_0, e_1, e_1, e_3\}$ с $\Psi_T(e) = \Psi_T(e_0) = \Psi(e) = 1$. Тогда $E = e_0\wedge e_1\wedge e_2\wedge e_3$.

Ранговым пространством бивектора $w\in\Lambda_2(V)$ называется подпространство

$$V_w = w\llcorner V = \{e\in V \mid e = w\llcorner v, v\in V\}\subset V.$$

Ранговое пространство простого бивектора $w = e\wedge f$ совпадает с множеством $\mathrm{Lin}\,(e, f)$. Линейный оператор

$$\circledast : \Lambda_2(M_0)\to\Lambda_2(M_0), \quad \circledast w := E\llcorner w$$

называется *оператором Ходжа*. Для любых $w,\ \widetilde{w} \in \Lambda_2(M_0)$ справедливы соотношения

$$\begin{gathered}\langle \circledast w, \circledast \widetilde{w}\rangle = -\langle w, \widetilde{w}\rangle, \quad \langle \circledast w, \widetilde{w}\rangle = \langle w, \circledast \widetilde{w}\rangle, \quad \circledast\circledast = -\mathrm{id}. \\ w \in K_2 \Longleftrightarrow \langle \circledast w, w\rangle = \langle w, \circledast w\rangle = 0.\end{gathered} \tag{3}$$

Многообразие G^1 является инвариантным подмножеством действия группы Лоренца $L(M_0)$. Эта группа транзитивно действует в G^1 изометриями, поэтому G^1 является псевдоримановым однородным многообразием группы Лоренца $L(M_0)$.

Рассмотрим бивектор $w \in G^1$. Тетрады e с $\Psi_T(e_0) = \Psi(e) = 1$, будем называть *допустимыми*. Пусть для некоторой допустимой тетрады e верно $w = e_{01} := e_0 \wedge e_1$. Тогда бивекторы $\{e_{02}, e_{03}, e_{12}, e_{13}\}$ составляют ортонормированный базис касательного пространства $T_w G^1$. Следовательно, псевдоевклидова метрика многообразия G^1 имеет сигнатуру $(+,+,-,-)$. Из равенств

$$\begin{gathered}\circledast\, e_{01} = -e_{23},\ \circledast e_{02} = e_{13},\ \circledast e_{03} = -e_{12}, \\ \circledast\, e_{12} = e_{03},\ \circledast e_{13} = -e_{02},\ \circledast e_{23} = e_{01}\end{gathered} \tag{4}$$

следует, что $\circledast T_w G^1 = T_w G^1$.

Множество $K_0 = \{x \in \Lambda_2(M_0) : x^2 = 0\}$ называется *изотропным конусом*. Если для пары $(w, X) \in TG^1$ выполнено условие $X \notin K_0 \cap K_2$, то найдутся допустимая тетрада e и числа $\alpha_0,\ \alpha_1 \in \mathbb{R}$ такие, что $w = e_{01}$, $X = \alpha_0 e_{02} + \alpha_1 e_{31}$. Вектор $X = \alpha_0 e_{02}(t) + \alpha_1 e_{31}(t)$ является касательным вектором геодезической

$$w(t) = \exp_w(tX) = e_0(t) \wedge e_1(t), \tag{5}$$

где элементы тетрады $e(t)$ определены равенствами

$$\begin{gathered}e_0(t) = e_0 \mathrm{ch}\,(\alpha_1 t) + e_3 \mathrm{sh}\,(\alpha, t), \quad e_1(t) = e_1 \cos(\alpha_o t) + e_2 \sin(\alpha_0 t), \\ e_2(t) = e_1 \sin(\alpha_0 t) + e_2 \cos(\alpha_0 t), \quad e_3(t) = e_0 \mathrm{sh}\,(\alpha_1 t) + e_3 \mathrm{ch}\,(\alpha, t).\end{gathered} \tag{6}$$

Если для пары $(w, X) \in TG^1$ выполнено условие $X \in K_0 \cap K_2$, то найдутся допустимая тетрада e и число $\lambda \in \mathbb{R}$ такие, что $w = e_{01}$,

$$\begin{gathered}X = \lambda(e_0 \pm e_1) \wedge e_3,\ \lambda \neq 0, \\ w(t) = \exp_w(tX) = w + tX = (e_0 \pm e_1) \wedge (e_1 + te_3).\end{gathered} \tag{7}$$

§2. Четыре типа вполне геодезических подмногообразий в G^1

Равенства (5) и (7) позволяют из всего семейства геодезических на G^1 выделить три специальных вида и сопоставить с геодезической каждого вида некоторое трехмерное подпространство $W(e) \in \Lambda_2(M_0)$, $e \in M_0$, в котором она помещается:

a) Если в (5) $\alpha_1 = 0$, то $e_0(t) = e_0$ и все плоскости $V_{w(t)}$ содержат $\mathrm{Lin}\,(e_0)$.

b) Если в (5) $\alpha_0 = 0$, то $e_1(t) = e_1$ и все плоскости $V_{w(t)}$ содержат $\mathrm{Lin}\,(e_1)$.

c) Если $X \in K_0 \cap K_2$, то из (7) следует, что все плоскости $V_{w(t)}$ содержат $\mathrm{Lin}\,(e_0 \pm e_1)$.

Таким образом, в каждом из случаев a)–c) ранговое пространство любой точки на геодезической $w(t)$ содержит постоянное направление $e = e_0$, e_1, $e_0 \pm e_1$ и сама геодезическая лежит в подмножестве

$$\Phi(e) = W(e) \cap G^1, \tag{8}$$

где

$$W(e) = \big\{w \in \Lambda_2(M_0) \mid w \wedge e = 0,\ e \neq 0\big\} \subset \Lambda_2(M_0) \tag{9}$$

– линейное подпространство в $\Lambda_2(M_0)$.

Утверждение 2.1. *Пусть $\{e_0, e_1, e_2,\ e_3\}$ – допустимая тетрада. Тогда имеют место равенства*

$$\text{a)}\quad \begin{aligned} W(e_0) &= \big\{e_0 \wedge (xe_1 + ye_2 + ze_3) \mid x, y, z \in \mathbb{R}\big\},\\ \Phi(e_0) &= \big\{e_0 \wedge (xe_1 + ye_2 + ze_3) \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\big\}. \end{aligned} \tag{10}$$

$$\text{b)}\quad \begin{aligned} W(e_1) &= \big\{e_1 \wedge (xe_0 + ye_2 + ze_3) \mid x, y, z \in \mathbb{R}\big\},\\ \Phi(e_1) &= \big\{e_1 \wedge (xe_0 + ye_2 + ze_3) \mid x^2 - y^2 - z^2 = 1\big\}. \end{aligned} \tag{11}$$

$$\text{c)}\quad \begin{aligned} W(e_0 \pm e_1) &= \big\{(e_0 \pm e_1) \wedge (xe_1 + ye_2 + ze_3) \mid x, y, z \in \mathbb{R}\big\},\\ \Phi(e_0 \pm e_1) &= \big\{(e_0 \pm e_1) \wedge (xe_1 + ye_2 + ze_3) \mid x = \pm 1\big\}. \end{aligned} \tag{12}$$

Доказательство. a) Разложим элемент $w \in W(e)$ по базису $\{e_{ij}\}$:

$$w = xe_{01} + ye_{02} + ze_{03} + \widetilde{x}e_{12} + \widetilde{y}_{13} + \widetilde{z}e_{23}.$$

Тогда $0 = w \wedge e_0 = \widetilde{x}e_{120} + \widetilde{y}e_{130} + \widetilde{z}e_{230}$. Так как тривекторы e_{120}, e_{130}, e_{230} линейно независимы, то $\widetilde{x} = \widetilde{y} = \widetilde{z} = 0$. Значит левая часть первого равенства (10) лежит в правой. Обратное включение очевидно. Теперь наше утверждение следует из эквивалентности

$$w^2 = \langle xe_{01}+ye_{02}+ze_{03}, xe_{01}+ye_{02}+ze_{03}\rangle = -1 \Longleftrightarrow -x^2-y^2-z^2 = -1.$$

Утверждения b) и c) доказываются аналогично. $\square$

Теорема 2.2. *Подмногообразия $\Phi(e) \subset G^1$ вполне геодезические.*

Доказательство. 1) Множество $\Phi(e_0 \pm e_1)$ состоит из пары параллельных плоскостей. Так как прямые – это геодезические в $\Lambda_2(M_0)$, то эти плоскости вполне геодезические.

2) $\Phi(e_0)$ – сфера в псевдоевклидовом пространстве $W(e_0)$ (сигнатуры $(-,-,-)$) с постоянной секционной кривизной $K_\sigma = -1$ (при смене знака метрики на обратный секционные кривизны меняют знак). Подгруппа преобразований Лоренца L_{e_0} ($\cong O(3)$), оставляющая e_0 неподвижным, транзитивно действует на $\Phi(e_0)$. Кроме того, она совмещает любые два направления. Так как исходная геодезическая $w(t) = \exp_w(te_{03})$ многообразия G^1 лежит на сфере $\Phi(e_0)$, то из сказанного следует вполне геодезичность $\Phi(e_0)$.

3) $\Phi(e_0)$ – сфера в псевдоевклидовом пространстве $W(e_1)$ (сигнатуры $(-,+,+)$). Это риманово многообразие постоянной кривизны $K_\sigma = -1$ (см. [2]). $\Phi(e_1)$ состоит из двух компонент связности (две полости гиперболоида). Подгруппа ограниченных преобразований Лоренца $L_+^\uparrow(e_1)$ (компонента единицы группы Лоренца $L(M_0)$, оставляющая неподвижным вектор e_1, действует транзитивно на каждой из этих полостей, совмещая любые два направления (см. [2]). Так как геодезическая $w(t) = \exp_w(te_{21})$ принадлежит множеству $\Phi(e_1)$, то многообразие $\Phi(e_1)$ вполне геодезично. $\square$

Для всякого элемента (w, X) касательного расслоения $TG_2^+(\mathbb{R}^4)$ существует такой ортонормированный базис $\{e_1, e_2, n_1, n_2\}$ пространства $\mathbb{R}^4$, что

$$w = e_1 \wedge e_2, \quad X = \lambda_1 n_1 \wedge e_2 + \lambda_2 e_1 \wedge n_2, \quad \lambda_1, \quad \lambda_2 \in \mathbb{R}.$$

При этом для площадки $\mathrm{Lin}\,(n_1 \wedge e_2, e_1 \wedge n_2) \subset T_w G_2^+(\mathbb{R}^4)$ множество $\exp_w \sigma$ является плоским вполне геодезическим тором в $G^+(\mathbb{R}^4)$ (см. [4]).

По аналогии с этим можно сформулировать следующую теорему.

Теорема 2.3. *Для некоторой тетрады* $e = \{e_0, e_1, e_2, e_3\}$ *рассмотрим точку* $w = e_{01} \in G^1$ *и площадку* $\sigma = \mathrm{Lin}\,(e_{02}, e_{31}) \in T_w G^1$. *Тогда множество* $\Phi_\sigma = \exp_w \sigma$ *является плоским вполне геодезическим цилиндром в многообразии* G^1.

Для доказательства нам потребуется следующая

Лемма. *В условиях теоремы* 2.3 *справедлива формула*

$$\Phi_\sigma = G^1 \cap \big(\mathrm{Lin}\,(e_{03}, e_{21})\big)^\perp. \tag{13}$$

Доказательство леммы. Из представления геодезической (5) следует, что

$$\exp_w(tX) \subset G^1 \cap \mathrm{Lin}\,(e_{01}, e_{02}, e_{31}, e_{32}) = G^1 \cap \big(\mathrm{Lin}\,(e_{03}, e_{21})\big)^\perp \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \Phi_\sigma \subset G^1 \cap \big(\mathrm{Lin}\,(e_{03}, e_{21})\big)^\perp.$$

Для бивектора $\widetilde{w} = xe_{01} + ye_{02} + ze_{31} + ue_{32}$ из правой части (13) $\circledast\widetilde{w} = -ue_{01} + ze_{02} - ye_{31} + xe_{32}$ и выполняется система

$$\begin{cases} \widetilde{w}^{\,2} = -1 \\ \langle \widetilde{w}, \circledast\widetilde{w} \rangle = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 - z^2 - u^2 = 1 \\ xu - yz = 0. \end{cases}$$

Поэтому найдется такое $\alpha_1 \in \mathbb{R}$, что

$$x^2 + y^2 = \mathrm{ch}^{\,2}\alpha_1, \quad z^2 + u^2 = \mathrm{sh}^{\,2}\alpha_1$$

и такие α_0, $\widetilde{\alpha}_0 \in [0, 2\pi)$, что

$$\begin{aligned}(x, y, z, u) = \big(&\mathrm{ch}\,(\alpha_1)\cos(\alpha_0), \mathrm{ch}\,(\alpha_1)\sin(\alpha_0), \\ &\mathrm{sh}\,(\alpha_1)\cos(\widetilde{\alpha}_0), \mathrm{sh}\,(\alpha_1)\sin(\widetilde{\alpha}_0)\big).\end{aligned} \tag{14}$$

Из условия $xu - yz = 0$ следует, что

$$\mathrm{ch}\,(\alpha_1)\cos(\alpha_0)\mathrm{sh}\,(\alpha_1)\sin(\widetilde{\alpha}_0) - \mathrm{ch}\,(\alpha_1)\sin(\alpha_0)\mathrm{sh}\,(\alpha_1)\cos(\widetilde{\alpha}_0) = 0 \Longrightarrow$$

либо $\alpha_1 = 0$, либо

$$\cos(\alpha_0)\sin(\widetilde{\alpha}_0) - \sin(\alpha_0)\cos(\widetilde{\alpha}_0) = \sin(\alpha_0 - \widetilde{\alpha}_0) = 0 \Longrightarrow \alpha_0 - \widetilde{\alpha}_0 \in \{0, \pi\}.$$

Значит всегда найдутся такие α_1 и $\alpha_0 = \widetilde{\alpha}_0$ при которых справедливо равенство (14). Сравнивая (14) с (5), убеждаемся, что $\widetilde{w} = \exp_w(\alpha_0 e_{02} + \alpha_1 e_{31}) \in \Phi_\sigma$. Поэтому правая часть (13) содержится в левой. $\square$

Доказательство теоремы 2.3. Фиксируем произвольную точку $\widetilde{w} = \exp_w(\alpha_0 e_{02} + \alpha_1 e_{31}) \in \Phi_\sigma$. Преобразование Лоренца $L : M_0 \to M_0$, действующее по правилу:

$$\begin{pmatrix} \widetilde{e}_0 \\ \widetilde{e}_3 \\ \widetilde{e}_1 \\ \widetilde{e}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \operatorname{ch}(\alpha_1) & \operatorname{sh}(\alpha_1) & 0 & 0 \\ \operatorname{sh}(\alpha_1) & \operatorname{ch}(\alpha_1) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos(\alpha_0) & \sin(\alpha_0) \\ 0 & 0 & -\sin(\alpha_0) & \cos(\alpha_0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_0 \\ e_3 \\ e_1 \\ e_2 \end{pmatrix} \tag{15}$$

(4-винт, см. [2]), переводит плоскости $V(e_{03})$ и $V(e_{21})$ сами в себя. Это преобразование индуцирует изометрию пространства $\Lambda_2(M_0)$, переводящую $\Phi_\sigma = \exp_w \sigma = G^1 \cap \big(\operatorname{Lin}(e_{03}, e_{21})\big)^\perp$ в себя, а точку w – в точку $\widetilde{w} = \exp_w(\alpha_0 e_{02} + \alpha_1 e_{31})$ (см. (5)). В силу произвольности выбора $\widetilde{w}$ и вполне геодезичности многообразия Φ_σ в точке $w = e_{01}$ следует вполне геодезичность этой поверхности в целом.

Отображение (14), сопоставляющее с каждой точкой $(\alpha_1, \alpha_0) \in \mathbb{R} \times (\mathbb{R}(\operatorname{mod} 2\pi))$ $(\alpha_0 = \widetilde{a}_0)$ точку $(xe_{01} + ye_{02} + ze_{31} + ue_{32}) \in \Phi_\sigma$ устанавливает гомеоморфность поверхности Φ_σ цилиндру. Кроме того этот факт следует из теоремы 3.1, независимо доказанно ниже. Равенство гауссовой кривизны этой поверхности нулю следует из теоремы 4.2. $\square$

Следствие 2.4. *Пусть $w \in G^1$. Тогда пересечение многообразия G^1 с касательным пространством $T_w G^1$, рассматриваемым как линейное подпространство в $\Lambda_2(M_0)$, есть плоский вполне геодезический цилиндр.*

Доказательство. Заметим, что четырехмерное подпространство $(\operatorname{Lin}(e_{03}, e_{21}))^\perp$ в формуле (13) совпадает с касательным пространством $T_{e_{03}} G^1$. Поэтому для доказательства следствия достаточно применить преобразование Лоренца, совмещающее бивекторы e_{03} и w. $\square$

Для грассманиана $G^+_{2,4}$ пересечение $G^+_{2,4} \cap T_w G^+_{2,4}$ является плоским вполне геодезическим тором (см. [5]).

Из доказательства теоремы 2.3 следует, что поверхность Φ_σ является псевдоримановым однородным многообразием.

§3. Модели вполне геодезических подмногообразий многообразия G^1 в модели Кели–Кляйна

Рассмотрим единичную сферу пространства Минковского M_0:

$$\widetilde{S} = \{r \in M_0 \mid \langle r, r \rangle = 1\}.$$

Зафиксировав тетраду $e = \{e_0, e_1, e_2, e_3\}$, получим уравнение многообразия $\widetilde{S}$ в координатах: $x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 = 1$, где x_i – координаты вектора r в базисе e. Это уравнение задает двуполостный гиперболоид. За S обозначим его верхнюю полость $(x_0 > 0)$. Метрика, индуцированная на S отображением включения в M_0, только знаком отличается от метрики трехмерного пространства Лобачевского H^3 с кривизной (-1). Любой ориентированной геодезической на S однозначно соответствует ориентированная двумерная времениподобная плоскость в M_0, содержащая данную геодезическую и проходящая через начало пространства M_0. Множество, заданное системой

$$\begin{cases} 1 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 > 0, \\ x_0 = 1, \end{cases}$$

является открытым трехмерным единичным диском D^3 (в антиевклидовой метрике), который диффеоморфно отображается на S центральным проектированием из начала координат. D^3 с введенной на нем при помощи этого диффеоморфизма метрикой (с обратным знаком) является моделью Кели–Кляйна пространства Лобачевского H^3. Каждой ориентированной плоскости $\alpha \in G^1$ на S однозначно соответствует направленная хорда $\alpha \cap D^3$ диска D^3. Аналогично, каждой направленной хорде из D^3 однозначно соответствует времениподобная ориентированная плоскость $\alpha \in G^1$, содержащая данную хорду (см. [2, 3]).

В §2 поверхности $\Phi(e_0)$, $\Phi(e_1)$, $\Phi(e_0+e_1)$ и Φ_σ были представлены в виде пересечения многообразия $G^1 \subset \Lambda_2(M_0)$ с некоторым линейным подпространством в $\Lambda_2(M_0)$ специального вида. Исходя из этих представлений, дадим описание поверхностей Φ в модели Кели–Кляйна как некоторых подмножеств направленных хорд диска D^3.

Теорема 3.1. *В модели Кели–Кляйна пространства Лобачевского вполне геодезическому подмногообразию*

1. *$\Phi(e_0)$ соответствует множество направленных хорд диска D^3, проходящих через центр D^3;*
2. *$\Phi(e_1)$ соответствуют направленные хорды диска D^3, параллельные (в пространстве Минковского) вектору e_1;*
3. *$\Phi(e_0 \pm e_1)$ соответствуют направленные хорды диска D^3, проходящие через точку $e_0 \pm e_1$ на границе диска D^3;*
4. *Φ_σ соответствуют направленные хорды диска D^3, ортогонально пересекающие хорду $\ell_\sigma = D^3 \cap \mathrm{Lin}\,(e_0, e_3)$.*[1]

Доказательство. 1. Из утверждения 2.1 следует, что любая плоскость α подмногообразия $\Phi(e_0)$ содержит вектор $e_0 \in D^3$. Следовательно, хорда $D^3 \cap \alpha$ проходит через центр e_0 диска D^3.

Обратно, рассмотрим какую-нибудь направленную хорду ℓ диска D^3, лежащую на прямой $r = e_0 + at$, $a^2 = -1$. Так как векторы e_0 и a ортогональны, то $a = xe_1 + ye_2 + ze_3$, $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. Хорде ℓ соответствует бивектор $e_0 \wedge (xe_1 + ye_2 + xe_3) \in \Phi(e_0)$.

Пункты 2) и 3) доказываются аналогично с учетом того, что все плоскости $\alpha \in \Phi(e_1)$ коллинеарны вектору e_1, а все плоскости $\alpha \in \Phi(e_0 \pm e_1)$ проходят через точку $e_0 \pm e_1$.

4. Для любого бивектора $\widetilde{w} = \exp_w(\alpha_w e_{02} + \alpha_1 e_{31})$ подмногообразия Φ_σ преобразование Лоренца L (15) переводит бивектор w в бивектор $\widetilde{w}$. Преобразование L индуцирует винтовое перемещение $\widetilde{L}$ пространства Лобачевского D^3 (см. [2]), которое имеет инвариантную хорду $\ell = D^3 \cap V(e_{03})$, соответствующую бивектору e_{03}. Хорда, соответствующая бивектору w, ортогонально пересекающая ℓ, переходит в ортогонально пересекающую ℓ хорду, соответствующую бивектору $\widetilde{w}$. Ясно, что при вариации α_1, $\alpha_0 \in \mathbb{R}$ мы получим все направленные хорды ортогонально пересекающие хорду ℓ. $\square$

Любое изохронное преобразование L индуцирует движение $\widetilde{L}$ пространства Лобачевского D^3 (см. [3]). Так как движение $\widetilde{L}$ переводит хорды в хорды, то поверхность $L(\Phi(e_0))$ будет моделироваться в D^3 семейством направленных хорд, проходящих через какую-нибудь точку диска D^3. Поверхности $L(\Phi(e_0 \pm e_1))$ моделируются семейством направленных хорд, проходящих через какую-либо точку граничной сферы диска D^3. Поверхность

[1] Так как хорда проходит через центр диска D^3, то ортогональность в метрике Лобачевского и метрике объемлющего пространства Минковского совпадают [2].

$L(\Phi(e_1))$ моделируется семейством направленных хорд, ортогональных (в метрике Лобачевского) к некоторому плоскому сечению диска D^3. Если это сечение не содержит центра диска D^3, то в силу [2, §6] все прямые этих хорд пересекаются в одной точке, не принадлежащей $\operatorname{clos}(D^3)$. Для поверхностей $\Phi(e_0 \pm e_1)$ и $\Phi(e_1)$ выбор направления "входящих" или "исходящих" из соответствующей точки хорд дает разбиение этих поверхностей на две компоненты связности. Для самих многообразий Φ это полости гиперболоида и плоскости, соответственно.

§4. Вторая основная форма и преобразование кривизны многообразия G^1

Теорема 4.1. *Вторая основная форма многообразия G^1 в $\Lambda_2(M_0)$ в точке w выражается через скалярное произведение и оператор Ходжа*

$$B_w(X,Y) = \langle X, Y\rangle w + \langle X, \circledast Y\rangle \circledast w, \quad \text{где} \quad X, Y \in T_w G^1. \qquad (16)$$

Доказательство. Предположим, что $X \notin K_0 \cap K_2$. Тогда существует такая допустимая тетрада, что $w = e_{01}$ и $X = \alpha_1 e_{03} + \alpha_0 e_{21}$. Рассмотрим геодезическую с началом в точке w и направляющим вектором X. В нашем базисе она примет вид (5) и нормальная составляющая ковариантной производной $\nabla_X X$ будет равна

$$(\nabla_X X)^N = (\alpha_0^2 - \alpha_1^2)e_{01} - 2\alpha_0\alpha_1 e_{23} = \langle X, X\rangle w + \langle X, \circledast X\rangle \circledast w. \quad (17)$$

Если $X \in K_0 \cap K_2$ (т.е. $\langle X, X\rangle = 0$ и $\langle X, \circledast X\rangle = 0$), то $\exp_w(tX)$ – прямая, поэтому равенство (14) выполнено.

В силу произвольности вектора X, билинейности и симметричности второй основной формы из (17) следует (16). □

Теорема 4.2. *Риманова кривизна, тензор и преобразование кривизны многообразия G^1 соответственно равны*

$$k_w(u,v) = \langle u, v\rangle^2 - \langle u, u\rangle\langle v, v\rangle - \langle u, \circledast v\rangle^2 + \langle u, \circledast u\rangle\langle u, \circledast v\rangle, \qquad (18)$$

$$\begin{aligned}\langle R(u,v)w, z\rangle &= \langle u, w\rangle\langle v, z\rangle - \langle v, w\rangle\langle u, z\rangle - \\ &- \langle u, \circledast w\rangle\langle \circledast v, z\rangle + \langle v, \circledast w\rangle\langle \circledast u, z\rangle,\end{aligned} \qquad (19)$$

$$R(u,v)w = \langle u, w\rangle v - \langle v, w\rangle u - \langle u, \circledast w\rangle \circledast v + \langle v, \circledast w\rangle \circledast u. \qquad (20)$$

Доказательство. 1. По обобщенной теореме Гаусса риманова кривизна многообразия G^1 выражается через вторую основную форму по правилу:

$$k_w(u,v) = \langle B(u,u), B(v,v)\rangle - B(u,v)^2 =$$

$$= \big\langle \langle u,u\rangle w + \langle u, \circledast u\rangle \circledast w, \langle v,v\rangle w + \langle v, \circledast v\rangle \circledast w\big\rangle -$$

$$-\big\langle \langle u,v\rangle w + \langle u, \circledast v\rangle \circledast w, \langle u,v\rangle w + \langle u, \circledast v\rangle \circledast w\big\rangle =$$

$$= \langle u,v\rangle^2 - \langle u,u\rangle\langle v,v\rangle - \langle u,\circledast v\rangle^2 + \langle u,\circledast u\rangle\langle v,\circledast v\rangle.$$

Следовательно,

$$K_\sigma = -1 + \frac{\langle v,\circledast u\rangle\langle v,\circledast v\rangle - \langle u,\circledast v\rangle^2}{u^2v^2 - \langle u,v\rangle^2}, \quad u^2v^2 - \langle u,v\rangle^2 \neq 0. \qquad (21)$$

2. Для трилинейного функционала, определенного в (20), при любых u и v верны тождества

$$R(u,v)w = -R(v,u)w, \quad R(u,v)w + R(v,w)u + R(w,u)v = 0,$$

$$\langle R(u,v)w, z\rangle = -\langle R(u,v)z, w\rangle,$$

а также

$$\langle R(u,v)v, u\rangle = \langle u,v\rangle\langle v,u\rangle - \langle v,v\rangle\langle u,u\rangle -$$

$$-\langle u,\circledast v\rangle\langle \circledast v, u\rangle + \langle v,\circledast v\rangle\langle \circledast u, u\rangle = k(u,v).$$

Так как тензор кривизны алгебраически выражается через кривизну Римана (см. [5]), то из последнего равенства следуют формулы (19) и (20). $\square$

Теорема 4.3. *Псевдоримановы многообразия $\Phi(e_0)$, $\Phi(e_1)$ являются пространствами постоянной отрицательной кривизны (-1), а многообразие Φ_σ – плоское.*

Доказательство. Кривизна многообразий $\Phi(e_0)$, $\Phi(e_1)$ вычислена в теореме 2.2. Так как поверхность $\Phi_\sigma = \exp_w(\alpha_0 e_{02} + \alpha_1 e_{31})$ является однородным псевдоримановым вполне геодезическим подмногообразием многообразия G^1, то ее гауссова кривизна может быть вычислена по формуле (21) подстановкой $u = e_{02}$, $v = e_{21}$. $\square$

Литература

1. Г. Минковский, *Пространство время.* Физика, СПб (1911).
2. С. Е. Козлов, *Математические основы специальной теории относительности и пространство Лобачевского.* СПбГУ (1995).
3. С. Е. Козлов, *Топология и лоренц-инвариантная псевдориманова метрика многообразия направлений в физическом пространстве.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **246** (1997), 141–151.
4. С. Е. Козлов, *Геометрия вещественных грассмановых многообразий.* I–III. — Зап. научн. семин. ПОМИ **246** (1997), 84–129.
5. А. Н. Глушаков, *Два вопроса внешней геометрии плюккеровых вложений многообразия Грассмана.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **246** (1997), 5–12.
6. Ю. Д. Бураго, В. А. Залгаллер, *Введение в риманову геометрию.* Наука, СПб (1994).

Ivanov D. V. Totally geodesic subsets in the variety of directions of physical space.

Let M_0 be the Minkowski 4-space, $\Lambda_2(M_0)$ its second exterior power equipped with a structure of a pseudo-Euclidean space with signature (3,3), $K_0(M_0)$ the light cone, $G_1 \subset \Lambda_2(M_0)$ the set of oriented 2-planes meeting the interior of $K_0(M_0)$. In the paper, 4 types of totally geodesic two-manifolds in G_1 are described, such that manifolds of one type are pairwise congruent as subsets in $\Lambda_2(M_0)$, while manifolds of different types are not. Models of such manifolds in the disk D^3 are constructed. An explicit formula for the curvature tensor of G_1 is given.

С.-Петербургский
государственный
университет

Поступило 29 февраля 2000 г.