Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 279, 2001 г.

Г. А. Карпунин

УНИВЕРСАЛЬНЫЕ ГРАНИЧНЫЕ МНОЖЕСТВА В ОБОБЩЕННОЙ ПРОБЛЕМЕ ШТЕЙНЕРА

§1. Введение

В работе рассматривается задача об универсальном граничном множестве, входящая в круг вопросов, объединенных названием *обобщенная проблема Штейнера*. Обобщенная проблема Штейнера состоит в том, чтобы по заданному граничному множеству $\mathcal{A}$ описать все локально минимальные сети, затягивающие $\mathcal{A}$. В таком виде она была впервые сформулирована А. О. Ивановым и А. А. Тужилиным [1]. В серии их работ эта проблема была достаточно изучена для случая плоскости $\mathbb{R}^2$. Однако в случае $n > 2$ практически ничего неизвестно, кроме нескольких примеров [2, 3].

Мы ограничимся рассмотрением локально минимальных сетей без циклов. Известно, что любая такая сеть однозначно разбивается на локально минимальные подсети, представляющие собой бинарные деревья. Если граничное множество не фиксировано, то любое бинарное дерево реализуется на плоскости локально минимальной сетью [1]. В случае фиксированного граничного множества $\mathcal{A}$ это, вообще говоря, уже не так. Возникает естественный вопрос [1]: *существует ли универсальное граничное множество?* Т.е. такое множество $\mathcal{A}$, что любое затягивающее его бинарное дерево G реализуется локально минимальной сетью с границей $\mathcal{A}$.

В случае плоскости ($n = 2$) ответ по-видимому отрицательный. Например, для множества $\mathcal{A}$ общего положения, состоящего из 4 точек, локально минимальных сетей, затягивающих $\mathcal{A}$, может быть не более 2 [4]. В то же время имеется 3 дерева, затягивающих $\mathcal{A}$. А для множества $\mathcal{A}$ общего положения, состоящего из 5 точек, локально минимальных сетей, затягивающих $\mathcal{A}$, может быть не более 8. Хотя бинарных деревьев, затягивающих $\mathcal{A}$, – 15.

Иванов и Тужилин выдвинули гипотезу о том, что для granичного множества $\mathcal{A}$, состоящего из вершин правильного n-мерного симплекса, любое бинарное дерево, затягивающее $\mathcal{A}$, реализуется локально минимальной сетью. Оказывается имеет место даже более сильный результат (см. §3).

Основная теорема. *Любое простое, т.е. без вершин степени 2, дерево, затягивающее вершины правильного n-мерного симплекса, реализуется невырожденной минимальной параметрической сетью.*

Заметим, что в случае бинарного дерева невырожденная минимальная параметрическая сеть является локально минимальной сетью.

Доказательству этой теоремы и посвящена данная работа.

Пользуясь случаем, автор хотел бы выразить глубокую благодарность д.ф.-м.н. А. О. Иванову и д.ф.-м.н. А. А. Тужилину за постановку задач и помощь в работе.

§2. Основные определения

Напомним основные определения из общей теории минимальных сетей (большая их часть взята из [5] и [6]).

2.1. Топологические графы. *Топологическим графом* G назовем произвольный конечный одномерный клеточный комплекс с фиксированным клеточным разбиением. Клетки размерности 0 называются *вершинами* графа G, а клетки размерности 1 – *ребрами*.

Замечание. Ясно, что мы получили топологическое представление абстрактных графов самого общего вида, т.е. графов с петлями и кратными ребрами, поэтому на топологические графы непосредственно переносится вся терминология как теории абстрактных графов, так и теории топологических пространств. Поэтому далее для краткости будем называть топологические графы просто *графами*.

Пусть e – ребро графа G. Объявим все точки ребра e в графе G эквивалентными. Про фактор-граф $\widetilde{G} = G/e$ будем говорить, что он получен из G *редукцией по ребру* e.

Предположим, что в графе G выделено некоторое подмножество M множества его вершин. Пару (G, M) будем называть *графом с границей* M. Иногда неформально будем говорить, что G *имеет границу* M и обозначать ее ∂G.

Вершины из ∂G будем называть *граничными* или *неподвижными*, а все остальные вершины графа G – *внутренними* или *подвижными*. Ребра, инцидентные граничным вершинам, называются *граничными*, а все остальные ребра графа G – *внутренними*.

Пусть G – произвольный граф с границей ∂G (возможно, пустой) и $P \in G$ (P не обязательно является вершиной графа G, см. замечание выше). *Допустимой окрестностью* $U \subset G$ точки P называется замыкание связной окрестности этой точки, не содержащее вершин графа G, отличных от P, если P – вершина, и не содержащее петель из G.

Наделим допустимую окрестность U структурой графа, объявив вершинами все точки из $\partial U \cup \{P\}$, а ребрами – отрезки в U, их соединяющие. Полученное дерево G_U будем называть *локальным графом с центром в точке* P. Определим *каноническую границу* ∂G_U локального графа G_U, включив в нее все вершины из ∂U, а также вершину P, если P – граничная вершина графа G.

2.2. Параметрические сети. Пусть G – связный граф. Кусочно-гладкое отображение $\Gamma : G \to \mathbb{R}^n$ – *параметрической сетью* (или просто *сетью*), а подмножество $\operatorname{Im}\Gamma \subset \mathbb{R}^2$, называется *следом* параметрической сети Γ. При этом граф G называется *параметризующим графом* сети Γ а класс графов, изоморфных G, называется *топологией сети* Γ.

Ограничение отображения Γ на вершину графа G назовем *вершиной*, а ограничение на ребро – *ребром* этой параметрической сети. Под *длиной* сети будем понимать сумму длин ее ребер.

Далее будем использовать следующие обозначения: $\Gamma[G]$ – сеть с параметризующим графом G; $\Gamma[e]$ – ее ребро, соответствующее ребру e графа G.

Пусть $\Gamma[G]$ – параметрическая сеть, а ∂G – граница графа G. Сужение $\Gamma\big|_{\partial G}$ является подмножеством множества вершин сети Γ, которое мы называем *границей сети* Γ и обозначаем $\partial\Gamma$. При этом если $\mathcal{A}$ – произвольное конечное подмножество в $\mathbb{R}^n$, и Γ – сеть с границей $\partial\Gamma$, образ которой совпадает с $\mathcal{A}$, то будем говорить, что Γ *затягивает* $\mathcal{A}$ по граничному отображению $\partial\Gamma$. $\mathcal{A}$ называется *граничным множеством* для Γ.

Вершины сети Γ, принадлежащие границе $\partial\Gamma$, называются *граничными* или *неподвижными*, а все остальные вершины из Γ – *внутренними* или *подвижными*. Ребра сети, инцидентные граничным вершинам, будем называть *граничными*, а ребра, не инцидентные никаким граничным вершинам, – *внутренними*.

Пусть $\Gamma[G]$ – произвольная сеть, P – любая точка графа G, и G_U – локальный граф с центром в P. Сеть с границей $\Gamma\big|_{G_U}$ называется *локальной сетью с центром в точке* P и обозначается через Γ_U. При этом $\Gamma\big|_{\partial G_U}$ называется *канонической границей* локальной сети Γ_U и обозначается через $\partial\Gamma_U$.

2.3. Локально минимальные сети. Сеть Γ, затягивающая конечное множество $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}^n$, называется *абсолютно минимальной*, если ее длина – наименьшая среди длин всех сетей, затягивающих $\mathcal{A}$.

Сеть Γ, затягивающая множество $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}^n$, называется *локально минимальной*, если для любой ее точки P некоторая локальная сеть с центром в P является абсолютно минимальной сетью.

Ребро $\Gamma[e]$ сети $\Gamma[G]$ называется *вырожденным*, если его длина равна 0. Соответствующее ребро e графа G также называется *вырожденным*. Очевидно, что вырожденное ребро e целиком переводится отображением Γ в точку. Сети, не имеющие вырожденных ребер, назовем *невырожденными*.

Следующая теорема (доказательство см., например, в [7]) полностью описывает локальное устройство невырожденных локально минимальных сетей.

Теорема 2.1. *Невырожденная сеть* Γ *с границей* $\mathcal{A}$ *локально минимальна в том и только в том случае, если:*

1) *ребра сети* Γ *– прямолинейные отрезки;*
2) *угол между любыми двумя смежными ребрами не меньше* $120°$*;*
3) *все вершины степени* 1 *являются граничными;*
4) *если вершина степени* 2 *не граничная, то угол между выходящими из нее ребрами равен* $180°$.

Пункты 1), 3) и 4) типичны для критериев различных понятий минимальности сетей. Ими мотивируются изначальные ограничения, накладываемые на классы рассматриваемых сетей, и нижеследующие определения.

Определение. *Сеть* Γ *называется линейной, если все ее ребра – прямолинейные отрезки. Множество всех линейных сетей* Γ *с фиксированной топологией* G*, граничным множеством* $\mathcal{A}$ *и граничным отображением* $b : \partial G \to \mathcal{A}$ *обозначим через* $\mathcal{L}[G, \mathcal{A}, b]$.

Определение. *Связный топологический граф, являющийся деревом и не имеющий вершин степени 2, называется простым деревом. В данной работе, если не оговорено противное, все рассматриваемые параметризующие графы сетей будут предполагаться простыми деревьями.*

Как следует из условия 2) теоремы 2.1, степень любой вершины невырожденной локально минимальной сети не превосходит 3. Выделим среди простых деревьев один важный класс графов, называемых *бинарными деревьями (или 2-деревьями)*, у которых любая вершина имеет степень 1 или 3.

Будем считать, что у всех простых деревьев все вершины степени 1 являются *граничными*, а остальные – *подвижными*.

2.4. Критерий минимальности параметрической сети. Пусть $\Gamma[G]$ – параметрическая сеть, и $\Gamma[e]$ – ее вырожденное ребро. Пусть граф $\widetilde{G}$ получен из графа G редукцией по ребру e. Тогда корректно определено отображение $\widetilde{\Gamma}[\widetilde{G}]$, такое, что $\widetilde{\Gamma}\circ\pi = \Gamma$, где $\pi : G \to \widetilde{G}$ – стандартная проекция на фактор-пространство. Ясно, что $\widetilde{\Gamma}$ – кусочно-гладкое и поэтому определяет параметрическую сеть $\widetilde{\Gamma}[\widetilde{G}]$. Будем говорить, что сеть $\widetilde{\Gamma}$ получена из Γ *редукцией по вырожденному ребру* $\Gamma[e]$. След сети $\widetilde{\Gamma}$ очевидно совпадает со следом сети Γ.

Связные компоненты множества всех вырожденных ребер графа G назовем *компонентами вырождения* параметризующего графа сети Γ. Каждая компонента вырождения, очевидно, является подграфом в G, целиком отображающимся в точку. Ясно, что компоненты вырождения графа G попарно дизъюнктны.

Редуцируем сеть Γ по всем вырожденным ребрам. Полученную сеть $\widetilde{\Gamma}$ будем называть *приведенной параметрической сетью* для Γ. Она уже не содержит вырожденных ребер. След приведенной сети $\widetilde{\Gamma}$ совпадает, очевидно, со следом сети Γ.

Пусть Γ – параметрическая сеть с границей $\partial\Gamma : \partial G \to \mathbb{R}^2$, и $\widetilde{\Gamma}$ – соответствующая приведенная сеть. Вершину приведенной сети назовем *подвижной*, если ее прообраз при редукции содержит хотя бы одну подвижную вершину сети Γ; вершину приведенной сети назовем *чисто подвижной*, если ее прообраз при редукции не содержит граничных вершин сети Γ. Остальные вершины сети $\widetilde{\Gamma}$ будут считаться *граничными*.

Введем еще одно понятие – ветки дерева. Выкинем из множества ребер дерева G произвольное ребро e. Тогда G распадется на два поддерева G_1 и G_2, которые и будем называть *ветками* дерева G, *инцидентными* ребру e.

Определение. *Линейная сеть* $\Gamma \in \mathcal{L}[G, \mathcal{A}, b]$ *называется минимальной параметрической сетью, если она является точкой абсолютного минимума функции длины среди всех сетей из* $\mathcal{L}[G, \mathcal{A}, b]$.

Сформулируем критерий того, что данная линейная сеть Γ является минимальной параметрической. Обозначим через $G_d^{\widetilde{v}}$ компоненту вырождения вершины $\widetilde{v} \in \widetilde{\Gamma}$, а через $\mathbf{N}_v$ – сумму единичных направляющих векторов невырожденных ребер, выходящих из вершины $v \in \Gamma$.

Утверждение 2.1 [4]. *Для того, чтобы* Γ *была минимальной параметрической сетью, необходимо и достаточно, чтобы для каждой подвижной вершины* $\widetilde{v}$ *приведенной сети* $\widetilde{\Gamma}$ *выполнялись следующие условия:*

- *для каждой не содержащей граничных вершин графа* G *ветки* G_b *дерева* $G_d^{\widetilde{v}}$ *выполняется неравенство* $|\sum\limits_{v \in G_b} \mathbf{N}_v| \leqslant 1$;
- *если, к тому же,* $\widetilde{v}$ *– чисто подвижная вершина, то* $\sum\limits_{v \in G_d^{\widetilde{v}}} \mathbf{N}_v = 0$.

§3. Основная теорема

Будем говорить, что граф G *затягивает* множество $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}^2$, если задано граничное отображение $b : \partial G \to \mathcal{A}$. Граф G, затягивающий $\mathcal{A}$, *реализуется сетью, со свойством* $\mathfrak{P}$, если существует сеть Γ топологии G с $\partial\Gamma = b : \partial G \to \mathcal{A}$, обладающая свойством $\mathfrak{P}$.

Далее мы будем иметь дело со свойством сети быть невырожденной минимальной параметрической сетью.

Основная теорема. *Любое простое дерево, затягивающее вершины правильного* n*-мерного симплекса, реализуется невырожденной минимальной параметрической сетью.*

Поскольку, как следует из теоремы 2.1 и утверждения 2.1, в случае бинарных деревьев невырожденная минимальная параметрическая сеть является локально минимальной, то из основной теоремы получаем следствие.

Следствие 3.1. *Любое бинарное дерево, затягивающее вершины правильного n-мерного симплекса, реализуется невырожденной локально минимальной сетью.*

Доказательство основной теоремы.

3.1. Приведем здесь идею доказательства, детали которого излагаются начиная с п. 3.2. Очевидно, что любое простое дерево G может быть реализовано как минимальная параметрическая сеть в соответствующем классе линейных сетей $\mathcal{L}[G, \mathcal{A}, b]$. Однако у такой сети, вообще говоря, могли бы быть вырожденные ребра. Покажем, что в случае, когда граничное множество состоит из вершин правильного n-мерного симплекса, все ребра – невырожденные.

Доказательство будет вестись от противного. Пусть Γ – некоторая минимальная параметрическая сеть, затягивающая вершины правильного n-мерного симплекса Δ. Предположим, что у Γ имеются вырожденные ребра и $e = (uv)$ – одно из них. Рассмотрим две ветки $\Gamma_u \ni u$ и $\Gamma_v \ni v$, инцидентные e. Через Δ_u обозначим грань симплекса Δ, образованную граничными вершинами, принадлежащими ветке Γ_u, а через Δ_v – грань, образованную граничными вершинами, принадлежащими ветке Γ_v. Единичные направляющие векторы невырожденных ребер, принадлежащих ветке Γ_u (соответственно, Γ_v) и инцидентных компоненте вырождения ребра e, “смотрят” в грань Δ_u (соответственно, в Δ_v), (лемма 3.1). Одна из сумм этих единичных векторов, соответствующих вершине u или вершине v, по модулю будет строго больше 1 (следствие утверждения 3.1), что противоречит критерию минимальности параметрических сетей, данному в п. 2.4.

3.2. Пусть $\mathbf{e}$ – единичный направляющий вектор некоторого невырожденного ребра, инцидентного компоненте вырождения, содержащей вершину u.

Лемма 3.1. *Луч, проведенный через u в направлении вектора $\mathbf{e}$, пересекает грань Δ_u.*

Доказательство. Рассмотрим приведенную ветку $\widetilde{\Gamma}_u$. Мы рассматриваем ее как дерево с корнем $\widetilde{u}$, где $\widetilde{u}$ – естественная проекция вершины u.

Далее проведем индукцию снизу вверх по глубине вершины $\widetilde{u}'$ в ветке $\widetilde{\Gamma}_u$. Пусть $\widetilde{u}''$ – некоторая вершина глубины k, а $\mathbf{e}''$

– направляющий вектор некоторого ребра, соединяющего $\widetilde{u}''$ с вершиной глубины $k+1$. Предположим, что для всех таких вершин $\widetilde{u}''$ и векторов $\mathbf{e}''$ доказано, что луч, проведенный через $\widetilde{u}''$ в направлении $\mathbf{e}''$, пересекает грань Δ_u.

Заметим, что если $\mathbf{e}'$ – сумма всех единичных направляющих векторов ребер, соединяющих $\widetilde{u}''$ с вершинами глубины $k+1$, то луч, проведенный через $\widetilde{u}''$ в направлении $\mathbf{e}'$, также пересекает грань Δ_u.

Возьмем вершину $\widetilde{u}'$ глубины $k-1$. Пусть $\mathbf{e}'$ – единичный направляющий вектор ребра, соединяющего $\widetilde{u}'$ с $\widetilde{u}''$. Согласно критерию 2.1 минимальности параметрических сетей вектор $\mathbf{e}'$ равен сумме всех единичных направляющих векторов ребер, соединяющих $\widetilde{u}''$ с вершинами глубины $k+1$. Следовательно луч, проведенный через $\widetilde{u}'$ в направлении $\mathbf{e}'$, проходит через вершину $\widetilde{u}''$ в направлении $\mathbf{e}'$ и по уже доказанному пересекает грань Δ_u.

Двигаясь так снизу (с самых глубоких вершин) вверх, мы за конечное число шагов доберемся и до вершины $\widetilde{u}$. Лемма доказана. $\square$

3.3. Обозначим через $\mathbf{s}_u$ и $\mathbf{s}_v$ суммы единичных направляющих векторов невырожденных ребер, инцидентных компонентам вырождения вершин u и v в ветках Γ_u и Γ_v, соответственно. Тогда согласно теореме 2.1 имеем $|\mathbf{s}_u| \leqslant 1$ и $|\mathbf{s}_v| \leqslant 1$.

Отвлечемся от минимальной параметрической сети и немного упростим картину. Поскольку мы предположили, что ребро (uv) – вырожденное, то точки, соответствующие вершинам u и v, совпадают в пространстве $\mathbb{R}^n$. Обозначим через O точку их совпадения. Проведем из O лучи в направлениях невырожденных ребер, инцидентных компонентам вырождения вершин u и v. Согласно лемме 3.1 лучи, которые отвечают ребрам, связанным с u, пересекут грань Δ_u, а лучи, которые отвечают ребрам, связанным с v, пересекут грань Δ_v. Ограничимся рассмотрением отрезков этих лучей от точки O до пересечений с гранями.

Забудем теперь про сеть Γ, и у нас останется следующая картина. Из O выходят две совокупности отрезков: $OU_1, \ldots, OU_r$, вторые концы которых лежат в грани Δ_u, и $OV_1, \ldots, OV_m$, вторые концы которых лежат в грани Δ_v. Отметим, что сумма единичных направляющих векторов отрезков OU_i равна $\mathbf{s}_u$, а сумма единичных направляющих векторов отрезков OV_j равна $\mathbf{s}_v$. Напомним, что $|\mathbf{s}_u| \leqslant 1$ и $|\mathbf{s}_v| \leqslant 1$. Чтобы прийти к противоречию, покажем, что эти неравенства не могут выполнятся одновременно.

3.4. Далее, если не оговорено противное, ребро правильного симплекса будет считаться равным $\sqrt{2}$ (удобно считать вершинами правильного симплекса концы единичных векторов стандартного ортонормированного базиса). *Центром* правильного симплекса будем называть его центр масс.

Приведем здесь формулировку ключевой леммы, доказательство которой будет дано в §4.

Пусть дан правильный $(q-1)$-мерный симплекс $\Delta \subset \mathbb{R}^n$. Проведем гиперплоскость π, параллельную симплексу Δ, через d обозначим расстояние между π и Δ. Рассмотрим произвольную точку $O \in \pi$ и проведем из нее k отрезков, оканчивающихся в Δ, $k \leqslant q$. Пусть $\mathbf{s}$ – сумма их единичных направляющих векторов. Обозначим через O' точку на плоскости π, ближайшую к центру C какой-нибудь $(k-1)$-мерной грани Δ' симплекса Δ. Заметим, что длина отрезка CO' равна d и он перпендикулярен как плоскости π, так и симплексу Δ'.

Лемма 3.2. *Минимум модуля вектора* $\mathbf{s}$, *взятый по всем* $O \in \pi$ *и по всем расположениям вторых концов отрезков в симплексе* Δ, *равен*

$$\min |\mathbf{s}| = \sqrt{\frac{k^3 d^2}{k-1+kd^2}}.$$

Он достигается, например, в ситуации, когда $O = O'$, *а вторые концы* k *отрезков совпадают с различными вершинами грани* Δ'.

3.5. Выберем произвольно $(r-1)$-мерную подгрань Δ'_u в грани Δ_u и $(m-1)$-мерную подгрань Δ'_v в грани Δ_v. Пусть U и V – центры граней Δ'_u и Δ'_v. Несложно проверить, что прямая (UV) перпендикулярна обеим этим граням. Проведем через O гиперплоскость π перпендикулярно прямой (UV). Она будет параллельна как грани Δ'_u, так и грани Δ'_v. Пусть O' – точка пересечения гиперплоскости π и прямой (UV).

Применим лемму 3.2 к грани Δ_u (которая выступает здесь в качестве самостоятельного правильного симплекса) и совокупности отрезков $OU_1, \dots, OU_r$, чтобы минимизировать модуль вектора $\mathbf{s}_u$. Для этого заменим отрезки $OU_1, \dots, OU_r$ совокупностью отрезков $O'U'_1, \dots, O'U'_r$, где $U'_1, \dots, U'_r$ – различные вершины грани Δ'_u. Тогда модуль суммы $\mathbf{s}'_u$ единичных направляющих векторов отрезков $O'U'_1, \ldots, O'U'_r$ будет не больше модуля вектора $\mathbf{s}_u$:

$$|\mathbf{s}'_u| \leqslant |\mathbf{s}_u| \leqslant 1.$$

Аналогично, заменим отрезки $OV_1, \ldots, OV_m$ совокупностью отрезков $O'V'_1, \ldots, O'V'_m$, где $V'_1, \ldots, V'_m$ – различные вершины грани Δ'_v, и обозначим через $\mathbf{s}'_v$ сумму единичных направляющих векторов отрезков $OV'_1, \ldots, OV'_m$. Тогда, как следует из леммы 3.2,

$$|\mathbf{s}'_v| \leqslant |\mathbf{s}_v| \leqslant 1.$$

Ограничимся теперь рассмотрением отрезков $O'U'_1, \ldots, O'U'_r$, $O'V'_1, \ldots, O'V'_m$ и симплекса Δ' с вершинами $U'_1, \ldots, U'_r, V'_1, \ldots, V'_m$. Дальнейшая наша цель – показать, что одновременное выполнение двух неравенств $|\mathbf{s}'_u| \leqslant 1$ и $|\mathbf{s}'_v| \leqslant 1$ невозможно.

3.6. Рассмотрим $(q'-1)$-мерный правильный симплекс Δ' и точку O' на серединном перпендикуляре к Δ'. Обозначим через d расстояние от O' до Δ. Соединим точку O' отрезком с каждой вершиной симплекса Δ'. Пусть $\mathbf{s}$ – сумма единичных направляющих векторов этих q' отрезков, направленных к вершинам симплекса. Согласно второму утверждению леммы 3.2

$$|\mathbf{s}| = \sqrt{\frac{{q'}^3 d^2}{q' - 1 + q' d^2}}.$$

Из этой формулы видно, что $|\mathbf{s}|$ монотонно возрастает с ростом d. Найдем такое $d(q')$, при котором $|\mathbf{s}| = 1$. Имеем

$$d(q') = \frac{1}{\sqrt{q'(q'+1)}}.$$

Это расстояние мы назовем *критическим.*

Лемма 3.3. *Сумма критического расстояния до грани Δ'_u и критического расстояния до грани Δ'_v строго меньше длины отрезка UV.*

Доказательство. Пусть грань Δ'_u имеет размерность $r-1$, а грань Δ'_v – размерность $m-1$. Тогда длина отрезка UV равна $\sqrt{\frac{r+m}{rm}}$, а критические расстояния до граней Δ'_u и Δ'_v равны $\frac{1}{\sqrt{r(r+1)}}$ и $\frac{1}{\sqrt{m(m+1)}}$, соответственно. Нужно доказать неравенство

$$\frac{1}{\sqrt{r(r+1)}} + \frac{1}{\sqrt{m(m+1)}} < \sqrt{\frac{r+m}{rm}},$$

эквивалентное неравенству

$$4(rm + r + m + 1) < rm\left((r - m)^2 + 4(rm + r + m + 1)\right),$$

которое всегда верно, если хотя бы одно из чисел r, m строго больше 1. Лемма доказана. □

3.7. Из определения критического расстояния в п. 3.6 и леммы 3.3 непосредственно вытекает следующее утверждение.

Утверждение. *Для любой точки O', принадлежащей отрезку UV, хотя бы один из векторов $\mathbf{s}'_u$ или $\mathbf{s}'_v$ по модулю строго больше 1.*

Учитывая неравенства $|\mathbf{s}'_u| \leqslant |\mathbf{s}_u|$ и $|\mathbf{s}'_v| \leqslant |\mathbf{s}_v|$ из п. 3.5, получаем, что хотя бы один из векторов $\mathbf{s}_u$ или $\mathbf{s}_v$ по модулю строго больше 1. Таким образом мы пришли к противоречию с критерием 2.1 минимальности параметрических сетей и доказали основную теорему. □

§4. Доказательство леммы 3.2

4.1. Поскольку точки $U_1, \ldots, U_k$ принадлежат правильному симплексу с ребром $\sqrt{2}$, то, очевидно, попарные расстояния между ними не превосходит $\sqrt{2}$. Можно считать, что все эти k точек лежат в некотором $(k-1)$-мерном шаре, в который можно вписать правильный $(k-1)$-мерный симплекс с ребром $\sqrt{2}$. Радиус такого шара равен $\sqrt{2}\cdot\sqrt{\frac{k-1}{2k}}$. В самом деле, достаточно воспользоваться теоремой Юнга [8] (ср. [9, с. 111]).

Теорема 4.1. *Пусть $D \subset \mathbb{R}^{k-1}$. Существует $(k-1)$-мерный шар радиуса $\operatorname{diam}(D) \cdot \sqrt{\frac{k-1}{2k}}$, содержащий D.*

4.2. Рассмотрим вспомогательную задачу. Пусть $B \subset \mathbb{R}^n$ $(k-1)$-мерный шар радиуса R. Проведем на расстоянии d от шара B параллельную ему гиперплоскость π. Рассмотрим произвольную точку $O \in \pi$ и проведем из нее k отрезков $OU_1, \ldots, OU_k$, оканчивающихся в B. Пусть вектор $\mathbf{s}$ равен сумме их единичных направляющих векторов. Пусть $O' \in \pi$ – точка, ближайшая к центру U шара B. Заметим, что длина отрезка UO' равна d, и он перпендикулярен как π, так и плоскости шара B.

Лемма 4.2. *Минимум модуля вектора* $\mathbf{s}$, *взятый по всем* $O \in \pi$ *и по всем расположениям точек* $U_1, \dots, U_k$ *в шаре* B, *равен*

$$\min |\mathbf{s}| = \sqrt{\frac{k^2 d^2}{R^2 + d^2}}.$$

Он достигается, например, когда $O = O'$, *а точки* $U_1, \dots, U_k$ *образуют правильный* $(k-1)$*-мерный симплекс, вписанный в* B.

Доказательство. Доказательство содержится в пп. 4.2.1–4.2.4.

4.2.1. Заметим, что лемму 4.2 достаточно доказать в случае $n = k$. В самом деле, гиперплоскость π расслаивается на $(k-1)$-мерные аффинные подпространства σ, параллельные шару B. Для каждого такого σ решаем задачу минимизации модуля вектора $\mathbf{s}$. Ответ в каждой отдельной задаче зависит только от расстояния между B и σ, причем минимальное значение $|\mathbf{s}|$ является монотонно возрастающей функцией от этого расстояния. Следовательно, минимум в целом будет достигаться тогда, когда точка O принадлежит ближайшему к шару аффинному подпространству.

4.2.2. Покажем, что задачу можно свести к случаю, когда $O = O'$, а вторые концы отрезков $U_1, \dots, U_k$, как и раньше, произвольно расположены в шаре B.

Рассмотрим конус C над B с вершиной O. Все направляющие векторы отрезков $OU_1, \dots, OU_k$ лежат в конусе C. Его граница ∂C также является конусом, но над границей шара B, и представляет собой поверхность второго порядка. Ее ось симметрии обозначим через (OM), $M \in B$. Если провести двумерную плоскость σ через прямую (OM), то в пересечении σ с ∂C образуется угол, и $[OM)$ будет его биссектрисой.

Проведем через точку K, находящуюся на луче $[OM)$ на расстоянии d от точки O, гиперплоскость π_1, перпендикулярную лучу $[OM)$. Рассмотрим в гиперплоскости π_1 шар B_1 с центром в точке K и радиусом R. Конус с вершиной в точке O над шаром B_1 обозначим через C_1, а его границу, также являющуюся конусом, но над границей шара B_1, – через ∂C_1.

Утверждение. C *лежит внутри* C_1.

Доказательство. Рассмотрим точку $P \in B$ и проведем через нее и прямую (OM) двумерную плоскость σ (см. рис. 1) Достаточно

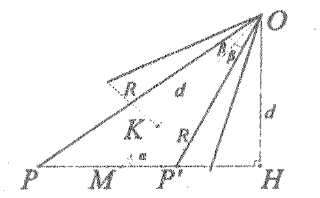

Рис. 1.

показать, что $\operatorname{tg}\beta \leqslant R/d$. В обозначениях рис. 1 имеем

$$\begin{aligned} OH &= d,\\ PH - P'H &= PP' = 2R,\\ P'H &= d\cdot \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha-\beta\right),\\ PH &= d\cdot \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha+\beta\right),\\ OM &= \frac{d}{\sin\alpha}, \end{aligned}$$

откуда

$$\frac{(\operatorname{ctg}^2\alpha+1)\operatorname{ctg}\beta}{\operatorname{ctg}^2\beta-\operatorname{ctg}^2\alpha}=\frac{R}{d}.$$

Учитывая, что при $\pi/2>\alpha>\beta>0$ выполнено $\operatorname{ctg}^2\beta-\operatorname{ctg}^2\alpha>0$, после элементарных преобразований получим, что доказываемое неравенство $\operatorname{tg}\beta \leqslant R/d$ эквивалентно неравенству

$$\operatorname{ctg}^2\alpha \quad \operatorname{ctg}^2\beta+\operatorname{ctg}^2\alpha \geqslant 0,$$

которое, очевидно, выполняется при всех α и β. $\square$

Поскольку нас интересует сумма единичных направляющих векторов отрезков, лежащих в конусе C, а значит, и в C_1, исходная задача на минимум эквивалентна задаче, в которой точка O фиксирована и совпадает с O', а вторые концы отрезков, как и раньше, произвольно расположены в шаре B.

4.2.3. Можно считать, что вторые концы отрезков $U_1, \ldots, U_k$ лежат на границе шара B. В самом деле, предположим, что конец какого-то отрезка лежит не на границе шара. Обозначим через $\mathbf{e}$

его направляющий единичный вектор, а через $\mathbf{s}'$ – сумму направляющих векторов всех остальных отрезков. Тогда этот отрезок можно пошевелить так, чтобы увеличить угол между $\mathbf{e}$ и $\mathbf{s}'$, а значит уменьшить модуль их суммы, т.е. уменьшить $|\mathbf{s}|$. Следовательно такое расположение не минимизирует $|\mathbf{s}|$.

4.2.4. Наша задача минимизации сводится к задаче минимизации $|\mathbf{s}|$ в случае, когда отрезки исходят не из O', а из центра U шара B. Покажем это и получим ответ.

Введем для краткости обозначения:

$$\mathbf{u}_i = \overrightarrow{O'U_i}, \quad \mathbf{e}_i = \frac{\mathbf{u}_i}{|\mathbf{u}_i|}, \quad \mathbf{x}_i = \overrightarrow{UU_i}.$$

Тогда

$$\mathbf{u}_i = \mathbf{x}_i + \overrightarrow{O'U}, \quad |\mathbf{x}_i| = R, \quad |\overrightarrow{O'U}| = d.$$

Поскольку $\mathbf{x}_i \perp \overrightarrow{O'U}$, то $|\mathbf{u}_i| = \sqrt{R^2+d^2}$. Расписывая $|\mathbf{s}|^2$, получим

$$|\mathbf{s}|^2 = |\mathbf{e}_1 + \cdots + \mathbf{e}_k|^2 = \sum_{i,j} \frac{\langle \mathbf{u}_i, \mathbf{u}_j\rangle}{|\mathbf{u}_i||\mathbf{u}_j|}$$

$$= \frac{1}{R^2+d^2}\sum_{i,j}\langle \mathbf{u}_i, \mathbf{u}_j\rangle = \frac{1}{R^2+d^2}\sum_{i,j}\left(\langle \mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j\rangle + d^2\right)$$

$$= \frac{k^2d^2}{R^2+d^2} + \frac{1}{R^2+d^2}\sum_{i,j}\langle \mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j\rangle = \frac{k^2d^2}{R^2+d^2} + \frac{1}{R^2+d^2}|\mathbf{x}_1 + \cdots + \mathbf{x}_k|^2.$$

Минимум выражения $|\mathbf{x}_1+\cdots+\mathbf{x}_k|^2$ равен 0 и достигается, в частности, когда концы векторов $\mathbf{x}_i$, т.е. точки $U_1, \ldots, U_k$, являются вершинами правильного симплекса. $\square$

4.3. Подставляя теперь в лемме 4.2 вместо R выражение $\sqrt{2}\cdot\sqrt{\frac{k-1}{2k}}$ из теоремы Юнга 4.1, получим утверждение основной леммы 3.2. $\square$

Литература

1. А. О. Иванов, А. А. Тужилин, *Геометрия минимальных сетей и одномерная проблема Плато.* — УМН **47**, No. 2 (1992), 53–115.
2. E. N. Gilbert, H. O. Pollak, *Steiner minimal trees.* — SIAM J. Appl. Math. **16** (1968), 1–29.
3. W. D. Smith, *How to find Steiner minimal trees in Euclidean d-space.* — Algorithmica **7** (1992), 137–177.

4. Г. А. Карпунин, *Аналог теории Морса для плоских линейных сетей и обобщенная проблема Штейнера.* — Мат. сб. **191**, No. 2 (2000), 64.
5. А. О. Иванов, А. А. Тужилин, *Геометрия множества минимальных сетей данной топологии с фиксированной границей.* — Изв. РАН. Сер. матем. **61**, No. 6 (1997), 119–152.
6. А. О. Иванов, *Геометрические свойства локально минимальных сетей.* Докт. дисс., МГУ, М. (1998).
7. A. O. Ivanov, A. A. Tuzhilin, *Minimal Networks. The Steiner Problem and Its Generalizations.* CRC Press (1994).
8. H. W. E. Jung, *Über die kleinste Kugel, die eine räumliche Figur einschliesst.* — J. reine u. angew. Math. **123** (1901), 241–257.
9. H. G. Eggleston, *Convexity.* — Cambridge Tracts in Math. and Math. Phys. No. 47 (1992).

Karpunin G. A. Universal boundary sets in the generalized Steiner problem.

It is proved that every simple binary tree is realized by a nondegenerate minimal parametric net spanning the vertices of a regular simplex.

Московский
государственный
университет
им. М. В. Ломоносова

Поступило 20 декабря 2000 г.