Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 279, 2001 г.

В. В. Макеев

О ВОЗМОЖНОСТИ ВПИСАТЬ ПРАВИЛЬНЫЙ ОКТАЭДР В ТРЕХМЕРНОЕ ВЫПУКЛОЕ ТЕЛО С ГЛАДКОЙ ГРАНИЦЕЙ

Под *выпуклым телом* в дальнейшем понимаем компактное выпуклое множество с непустой внутренностью. Многогранник называется *вписанным* в выпуклое тело $K \subset \mathbb{R}^3$, если все его вершины лежат на границе ∂K тела K.

Буквами $AA'BB'CC'$ в дальнейшем обозначаем вершины правильных октаэдров в $\mathbb{R}^3$, причем одинаковые буквы помечают симметричные относительно центра вершины. Отрезки AA', BB' и CC' в дальнейшем называем *диагоналями* октаэдра.

Нижеследующая теорема дает положительный ответ на неоднократно поднимавшийся вопрос [1, с. 140; 2].

Теорема. *Пусть в стандартном евклидовом пространстве $\mathbb{R}^3$ задана некоторая норма $\|\cdot\|$ и выпуклое тело K с гладкой границей. Тогда на границе ∂K лежат вершины $AA'BB'CC'$ такого правильного октаэдра, что $\|AA'\| = \|BB'\| \geqslant \|CC'\|$ (соответственно $\|AA'\| = \|BB'\| \leqslant \|CC'\|$).*

Доказательство проведем для тел K с C^2-регулярной границей, имеющей положительную гауссову кривизну. В остальных случаях теорема получается предельным переходом.

Начнем с известного утверждения.

Лемма [3]**.** *В выпуклое тело $K \subset \mathbb{R}^3$ с гладкой строго выпуклой границей можно вписать аффинный образ правильного октаэдра с диагоналями, параллельными трем наперед заданным не параллельным одной плоскости направлениям l_1, l_2, l_3.*

Доказательство. Построим на выпуклом компакте K непрерывное векторное поле $\overline{v}$. Через каждую точку $O \in K$ проведем три хорды в K, обозначаемые AA', BB', CC', параллельные соответственно прямым l_1, l_2, l_3. Сопоставим точке O вектор

$$\overline{v}(O) = (\overline{OA} + \overline{OA'} + \overline{OB} + \overline{OB'} + \overline{OC} + \overline{OC'}).$$

По построению в граничных точках тела K векторное поле $\overline{v}$ направлено внутрь K. Следовательно в некоторой точке $O \in K$ оно обращается в нуль, а это означает, что $OA = OA'$, $OB = OB'$, $OC = OC'$ и $AA'BB'CC'$ – искомый аффинный образ правильного октаэдра. •

Обозначим M_K множество правых декартовых систем координат с началом во внутренней точке тела K. Ясно, что $M \cong \operatorname{int} K \times SO(3)$, где $SO(3)$, как обычно, обозначает группу сохраняющих ориентацию вращений $\mathbb{R}^3$ вокруг некоторой точки.

Пусть $N_K \subset M_K$ – множество таких систем координат, на осях которых тело K высекает хорды с общей серединой в начале координат. Для открытого плотного в C^2-топологии множества выпуклых компактов $K \subset \mathbb{R}^3$ множество N_K является гладким компактным ориентируемым подмногообразием M_K размерности 3. Такие компакты K в дальнейшем мы называем *типичными*.

Если K – шар или достаточно близкое к нему в C^2-топологии тело, то $N_K \cong SO(3)$.

Для всякого тела K определим непрерывное отображение $F_K : N_K \to \mathbb{R}^6$. Пусть $AA'BB'$ и CC' – хорды тела K, которые оно высекает на осях системы координат $n \in N_K$. Положим

$$F_K(n) = (|AA'|, |BB'|, |CC'|, \|AA'\|, \|BB'\|, \|CC'\|).$$

Группа $\mathbb{Z}_3$ свободно действует в N_K циклическими перестановками осей систем координат, а в $\mathbb{R}^6$ – одновременными циклическими перестановками первой тройки и второй тройки координат точки $(x_1, \dots, x_6) \in \mathbb{R}^6$. По построению отображение F_K $\mathbb{Z}_3$-эквивариантно.

Пусть $L \subset \mathbb{R}^6$ – двумерное подпространство, заданное уравнениями $x_1 = x_2 = x_3$ и $x_4 = x_5 = x_6$. Ортогональное дополнение к L есть четырехмерное подпространство $L_1 \subset \mathbb{R}^6$, заданное уравнениями $x_1 + x_2 + x_3 = 0$ и $x_4 + x_5 + x_6 = 0$. Рассмотрим ортогональную проекцию вдоль L $\mathrm{pr}_1 : \mathbb{R}^6 \to L_1$, определенную по формуле

$$\mathrm{pr}_1(x_1, x_2, \dots, x_6) = \left(\frac{2x_1 - x_2 - x_3}{3}, \frac{2x_2 - x_1 - x_3}{3}, \frac{2x_3 - x_1 - x_2}{3}, \right.$$
$$\left. \frac{2x_4 - x_5 - x_6}{3}, \frac{2x_5 - x_4 - x_6}{3}, \frac{2x_6 - x_4 - x_5}{3} \right).$$

Тогда композиция

$$G_K = \mathrm{pr}_1 \circ F_K : N_K \to L_1$$

также $\mathbb{Z}_3$-эквивариантна.

Мы должны доказать, что для всякого K образ G_K содержит точку из L_1 с координатами $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ и $x_4 = x_5 \geqslant x_6$ (соответственно $x_4 = x_5 \leqslant x_6$). Поэтому можно считать, что образ G_K не содержит точку $O = (0, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^6$. Пусть $\mathrm{pr}_2 : L_1 \setminus O \to S^3$ – проекция на трехмерную сферу

$$S^3 = \left\{ \sum_{i=1}^{6} x_i^2 = 1 \right\} \cap L_1$$

в L_1 вдоль исходящих из O лучей. Тогда сквозное отображение

$$H_K = \mathrm{pr}_2 \circ G_K : N_K \to S^3$$

также $\mathbb{Z}_3$-эквивариантно.

Покажем, что в типичной ситуации, когда N_K – трехмерное компактное гладкое многообразие, отображение $H_K : N_K \to S^3$ имеет ненулевую степень по модулю 3. Для тел K, достаточно близких к шару, когда $N_K \cong SO(3)$, это так [4].

Лемма. *Степень по модулю 3 отображения $H_K : N_K \to S^3$ не зависит от выбора типичного тела K.*

Доказательство. Любое C^2-регулярное тело K с границей положительной гауссовой кривизны можно гладко продеформировать в тело K_1 достаточно близкое к шару в классе вышеуказанных тел. Пусть K_t такая деформация, где $0 \leqslant t \leqslant 1$, $K_0 = K$, которую можно вложить $\mathbb{R}^3 \times [0,1]$, полагая $K_t \subset \mathbb{R}^3 \times t$. Для типичной деформации K_t множество $N = \bigcup_{0 \leqslant t \leqslant 1} N_{K_t} \times t$ является ориентируемым кобордизмом, соединяющим N_{K_0} и N_{K_1} в многообразии $M = \bigcup_{0 \leqslant t \leqslant 1} M_{K_t} \times t$.

Семейство отображений $G_{K_t} : N_{K_t} \to L_1$ индуцирует отображение $G : N \to L_1$, причем $G\big|_{N_{K_0} \times 0} = G_{K_0}$ и $G\big|_{N_{K_1} \times 1} = G_{K_1}$.

Если образ $G(N)$ не содержит $O \in L_1$, то как и выше, можно рассмотреть отображение

$$H = \mathrm{pr}_2 \circ G : N \to S^3,$$

и поэтому сужения $H_{K_0} = H\big|_{N_{K_0} \times 0}$ и $H_{K_1} = H\big|_{N_{K_1} \times 1}$ имеют одинаковые целочисленные степени.

Пусть точка $O \in L_1$ принадлежит $G(N)$. Сгладив малым возмущением норму $\| \cdot \|$, мы можем считать отображение G гладким, а точку $O \in L_1$ – его регулярным значением. Следовательно, прообраз $G^{-1}(O) \subset N$ состоит из $\mathbb{Z}_3$-орбит нескольких точек, которые можно считать лежащими в различных уровнях $N_{K_t} \times t$.

Пусть уровень $N_{K_{t_0}} \times t_0$ содержит одну орбиту прообраза точки из $G^{-1}(O)$. Покажем, что при достаточно малом $\varepsilon > 0$ отображения $H_{K_{(t_0-\varepsilon)}}$ и $H_{K_{(t_0+\varepsilon)}}$ имеют одинаковую степень по модулю 3. Рассмотрим малые непересекающиеся шаровые окрестности V_1, V_2, V_3 в N трех точек, составляющих $G^{-1}(0) \cap N_{K_{t_0} \times t_0}$. Выберем эти окрестности переходящими друг в друга под действием $\mathbb{Z}_3$. Тогда сужения $H\big|_{\partial V_i}$ имеют одинаковую степень ± 1 при $1 \leqslant i \leqslant 3$. Сужение H на край многообразия $\bigcup_{t_0-\varepsilon \leqslant t \leqslant t_0+\varepsilon} N_{K_t \times t} \setminus \bigcup_{i=1}^{3} V_i$ имеет степень 0, поэтому степени $H_{K_{(t_0-\varepsilon)}}$ и $H_{K_{(t_0+\varepsilon)}}$ отличаются на 3, что и требовалось доказать. •

Теперь требуемым вписанным в тело K октаэдром является $H_K^{-1}\left(0, 0, 0, \frac{1}{\sqrt{6}}, -\sqrt{\frac{2}{3}}\right)$ (соответственно $H_K^{-1}\left(0, 0, 0, -\frac{1}{\sqrt{6}}, \sqrt{\frac{2}{3}}\right)$). •

Замечание. Как видно из доказательства, вместо правильного октаэдра в теореме можно взять любую правильную треугольную антипризму – выпуклую оболочку трех равных отрезков с общей серединой, составляющих между собой равные углы.

Литература

1. V. Klee, S. Wagon, *Old and new unsolved problems in plane geometry and number theory.* Dolciani Math. Exp., **11**; Math. Assoc. Am., Washington, DC (1991).
2. T. Hausel, E. Makai, A. Szűcs, *Polyhedra inscribed and circumscribed to convex bodies.* Proc. of the 3rd Intern. Workshop Diff. Geom. (Romania, 1997), General Math., **5**, 1997.
3. H. Hadwiger, D. Larman, P. Mani, *Hyperrhombs inscribed to convex bodies.* J. Comb. Theory **24**, (1978), 290–293.
4. В. Макеев, *Задача Кнастера и почти сферические сечения.* Мат. сб., **180**, No. 3 (1989), 424–431.

Makeev V. V. On inscribing a regular octahedron in a three-dimensional convex body with smooth boundary.

A norm $\|\cdot\|$ and a convex body K with smooth boundary in the standard Euclidean space $\mathbb{R}^3$ are considered. It is proved that the boundary ∂K of K contains the vertices $AA'BB'CC'$ of a regular octahedron with $\|AA'\| = \|BB'\| \geqslant \|CC'\|$ (respectively, $\|AA'\| = \|BB'\| \leqslant \|CC'\|$).

Санкт-Петербургский
государственный университет

Поступило 13 декабря 2000 г.