Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 279, 2001 г.

В. В. Макеев

ДЕЛЕНИЕ НА РАВНЫЕ ЧАСТИ НЕПРЕРЫВНО РАСПРЕДЕЛЕННОЙ МАССЫ НА СФЕРЕ И В ПРОСТРАНСТВЕ

Пусть в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$, на единичной сфере $S^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$ или в проективном пространстве $\mathbb{R}P^n$ непрерывно распределена конечная масса $\mathbf{m}$. Верно ли, что найдется конфигурация плоскостей того или иного вида, делящая эту массу на равные части?

§1. Распределения на S^2 и $\mathbb{R}P^2$

Хорошо известно, что всякую непрерывно распределенную на плоскости конечную массу $\mathbf{m}$ можно разделить на 4 равные части парой перпендикулярных прямых. Аналог этого утверждения на двумерной сфере доказал Хадвигер [1]: для всякой непрерывно распределенной на сфере S^2 массы $\mathbf{m}$ найдется пара взаимно перпендикулярных больших окружностей сферы, делящих $\mathbf{m}$ на 4 равные части.

Известно также, что всякую непрерывно распределенную на плоскости конечную массу $\mathbf{m}$ можно разделить на 6 равных частей тремя проходящими через некоторую точку плоскости прямыми [2]. Первая часть нижеследующей теоремы также переносит этот результат на сферу (ср. [3]).

Теорема 1. *Пусть на сфере $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ непрерывно распределены массы $\mathbf{m}$ и $\mathbf{m}'$.*

(1) *Найдутся 3 плоскости, проходящие через некоторую проведенную через центр прямую и делящие массу $\mathbf{m}$ на 6 равных частей.*

(2) *Найдутся 3 полуплоскости, ограниченные общей проходящей через центр сферы прямой и делящие каждую из масс $\mathbf{m}$ и $\mathbf{m}'$ на 3 равные части.*

(3) *Найдутся 5 полуплоскостей, ограниченные общей проходящей через центр сферы прямой, делящих $\mathbf{m}$ на 5 равных частей и делящие $\mathbf{m}'$ на 5 частей, четыре из которых равны между собой и не менее (не превосходят) пятой части.*

Доказательство. (1) Обозначим через G_{23} многообразие Грассмана неориентированных плоскостей, проходящих через центр O сферы S^2. Пусть $\gamma_{23}\colon E_{23} \to G_{23}$ – тавтологическое векторное расслоение над G_{23}, при котором слоем над точкой (т.е. плоскостью) $g \in G_{23}$ служит сама плоскость g, рассматриваемая как двумерное векторное подпространство в $\mathbb{R}^3$.

Из соответствующей теоремы на плоскости [2] следует, что для всякой плоскости $g \in G_{23}$ существуют 3 плоскости, проходящие через некоторую перпендикулярную к плоскости g прямую $l(g)$, делящие массу $\mathbf{m}$ на 6 равных частей. Более того [3] для типичного распределения массы с положительной гладкой плотностью и типичной плоскости $g \in G_{23}$ таких прямых $l(g)$ существует нечетное число. Для вышеописанного типичного распределения массы множество $\bigcup_{g\in G_{23}}(g \cap l(g))$ является носителем ненулевого двумерного гомологического класса в $H_2(E_{23};\mathbb{Z}_2)$, пересекающегося со слоем общего положения $g \in E_{23}$ в нечетном числе точек. Следовательно, индекс пересечения этого класса с нулевым сечением расслоения γ_{23} равен $1 \mod 2$, и для некоторой плоскости $g \in G_{23}$ прямая $l(g)$ проходит через O, что и доказывает п. (1).

(2) Рассмотрим многообразие M упорядоченных ориентированных троек полуплоскостей, ограниченных общей, проходящей через O прямой, и делящих массу $\mathbf{m}$ на 3 равные части. Чтобы ориентировать тройку полуплоскостей $m \in M$, восстановим к их общей прямой l_3 перпендикулярные лучи l_1 и l_2 в первой и второй полуплоскости тройки m и ориентируем l_3 так, чтобы тройка (l_1, l_2, l_3) была правой. Очевидно, что многообразие M гомеоморфно группе $SO(3)$, так как определяется правой ориентированной полуплоскостью тройки, если плотность распределения массы $\mathbf{m}$ положительна.

На многообразии M свободно действует циклическая группа $\mathbb{Z}_3$ циклическими перестановками полуплоскостей тройки. Группа $\mathbb{Z}_3$ также действует на пространстве $\mathbb{R}^3$ циклическими перестановками координат точек. Рассмотрим отображение

$$F\colon M \to \mathbb{R}^3,$$

сопоставляющее с тройкой полуплоскостей $m \in M$ упорядоченный набор из трех масс, на которые эти полуплоскости делят $\mathbf{m}'$.

По построению отображение F непрерывно и сохраняет вышеописанное действие группы $\mathbb{Z}_3$. Но в этом случае, как доказано в [4, 5], при некотором $m \in M$ точка $F(m)$ имеет равные координаты, откуда и следует п. 2.

(3) Рассмотрим аналогичное вышерассмотренному многообразие M упорядоченных ориентированных пятерок полуплоскостей, ограниченных общей, проходящей через O ориентированной прямой, делящих массу $\mathbf{m}$ на 5 равных частей. Как и раньше, $M \cong SO(3)$.

На многообразии M свободно действует циклическая группа $\mathbb{Z}_5$ циклическими перестановками пятерки полуплоскостей. Группа $\mathbb{Z}_5$ также действует на пространстве $\mathbb{R}^5$ циклическими перестановками координат точек. Рассмотрим отображение

$$F\colon M \to \mathbb{R}^5,$$

составляющее с пятеркой полуплоскостей $m \in M$ упорядоченный набор из 5 масс, на которые эти полуплоскости делят массу $\mathbf{m}'$.

По построению отображение F непрерывно и сохраняет вышеописанное действие группы $\mathbb{Z}_5$. Тогда, как показано в [6], $F(M)$ или содержит точку с пятью равными координатами, или же содержит две точки вида (x, x, x, x, y), где $x > y$ для одной точки и $x < y$ для другой. •

Теорема 2. *Пусть на проективной плоскости $\mathbb{R}P^2$ непрерывно распределены массы $\mathbf{m}$ и $\mathbf{m}'$.*

(1) *Найдутся 3 прямые, делящие каждую из масс $\mathbf{m}$ и $\mathbf{m}'$ на 4 равные части.*

(2) *Найдутся 3 взаимно-перпендикулярные прямые, делящие массу $\mathbf{m}$ на 4 равные части.*

(3) *Найдутся 4 прямые, три из которых пересекаются в одной точке и перпендикулярны четвертой, делящие массу $\mathbf{m}$ на 6 равных частей.*

(4) *Найдутся 3 пересекающиеся в одной точке прямые, делящие каждую из масс $\mathbf{m}$ и $\mathbf{m}'$ на 3 равные части.*

(5) *Найдутся 5 проходящих через некоторую точку прямых, делящие массу $\mathbf{m}$ на 5 равных частей, а массу $\mathbf{m}'$ – на 5 частей, из которых четыре равны между собой и не менее (более) пятой части.*

Доказательство. Утверждения (1) и (2) по существу доказаны в [3].

(1) Всякое непрерывное распределение массы на проективной плоскости индуцирует центрально симметричное распределение

массы на двумерной сфере. Поэтому утверждение 1 можно переформулировать следующим образом. Пусть на S^2 непрерывно и центрально-симметрично распределены две массы. Тогда существуют 3 плоскости, проходящие через O и делящие каждую из этих масс на 8 равных частей (см. [3], теорема 5).

(2) Достаточно рассмотреть в качестве $\mathbf{m}'$ равномерно распределенную на проективной плоскости массу и воспользоваться п. (1).

(3) Третье утверждение теоремы можно переформулировать следующим образом: пусть на сфере S^2 непрерывно и *центрально-симметрично* распределена масса $\mathbf{m}$. Тогда найдутся 4 плоскости, проходящие через O и делящие массу $\mathbf{m}$ на 12 равных частей, причем три из этих плоскостей перпендикулярны четвертой,

Для всякой проходящей через O ориентированной плоскости Π рассмотрим тройки плоскостей, проходящих через некоторую перпендикулярную к плоскости Π прямую l, и делящих на 6 равных частей массу, распределенную на верхней (относительно плоскости Π) полусфере. Обозначим через $s(\Pi)$ множество точек пересечения плоскости Π со всевозможными вышеописанными прямыми l. По построению $s(-\Pi) = -s(\Pi)$, где $-\Pi$ обозначает плоскость Π с обращенной ориентацией. Как и ранее, для типичного распределения массы с положительной дифференцируемой плотностью множество $\{s(\Pi) \mid \Pi \in G^+_{23}\}$ является двумерным циклом в пространстве тавтологического расслоения $\gamma^+_{23} \colon E^+_{23} \to G^+_{23}$ над многообразием Грассмана G^+_{23} ориентированных плоскостей, проходящих через O. Этот цикл пересекает типичный слой расслоения γ^+_{23} в нечетном числе точек. Профакторизуем E^+_{23} по инволюции, отождествляющей плоскости с противоположной ориентацией при помощи симметрии относительно O. Мы получим пространство касательного расслоения над проективной плоскостью $\mathbb{R}P^2$ с выделенным двумерным циклом, пересекающим типичную касательную к $\mathbb{R}P^2$ плоскость в нечетном числе точек. Как известно, индекс пересечения такого цикла с нулевым сечением касательного расслоения над $\mathbb{R}P^2$ равен $1 \mod 2$. Следовательно, построенный двумерный цикл пересекается с нулевым сечением касательного расслоения над $\mathbb{R}P^2$, что и доказывает, что одна из рассматриваемых прямых l проходит через O.

Пункты (4) и (5) доказываются точно так же, как п. (2) и (3) теоремы 1. •

§2. Распределения на S^3 и в $\mathbb{R}^3$

Теорема 3.

(1) *Пусть на единичной сфере $S^3 \subset \mathbb{R}^4$ с центром $O \in \mathbb{R}^4$ непрерывно распределена конечная масса* $\mathbf{m}$. *Тогда существуют 7 трехмерных полуплоскостей, ограниченные общей, проходящей через O двумерной плоскостью, разбивающие сферу S^3 на 7 равных секторов $A_1, \ldots, A_7$ с*

$$\mathbf{m}(A_1) = \mathbf{m}(A_2) = \cdots = \mathbf{m}(A_6) \geqslant \mathbf{m}(A_7).$$

(2) *Пусть в $\mathbb{R}^3$ непрерывно распределена конечная масса* $\mathbf{m}$. *Тогда существуют 7 двумерных полуплоскостей, ограниченных общей прямой разбивающие пространство на 7 равных двугранных углов $A_1, \ldots, A_7$ с*

$$\mathbf{m}(A_1) = \mathbf{m}(A_2) = \cdots = \mathbf{m}(A_6) \geqslant \mathbf{m}(A_7).$$

Доказательство. Вторая часть теоремы является предельным случаем первой, при условии, что носитель массы стягивается к точке, поэтому остается доказать лишь первую часть.

Рассмотрим многообразие M таких упорядоченных семерок лучей, которые лежат в одной плоскости, имеют общее начало в точке $O \in \mathbb{R}^4$ и разбивают содержащую их плоскость на 7 равных углов величиной $2\pi/7$. Ясно, что M гомеоморфно многообразию Штифеля $V_{2,4}$ 2-реперов в $\mathbb{R}^4$.

Определим непрерывное отображение

$$F\colon M \to \mathbb{R}^7.$$

Пусть $l_1, \ldots, l_7$ – набор лучей из M, а P – ортогональное дополнение к плоскости, в которой лежат эти лучи. Тогда трехмерные полупространства $l_i \oplus P$, $1 \leqslant i \leqslant 7$, ограничены общей плоскостью P и разбивают пространство $\mathbb{R}^4$ на 7 равных двугранных углов $A_1, \ldots, A_7$. Положим

$$F(l_1, \ldots, l_7) = (\mathbf{m}(A_1), \ldots, \mathbf{m}(A_7)).$$

На многообразии M и в пространстве $\mathbb{R}^7$ действует циклическая группа $\mathbb{Z}_7$ циклическими перестановками лучей $(l_1, \ldots, l_7)$ и циклическими перестановками координат точки из $\mathbb{R}^7$ соответственно. По построению отображение F сохраняет вышеописанное действие группы $\mathbb{Z}_7$. Как следует из [6], образ $F(M)$ содержит точку $(x_1, \dots, x_7) \in \mathbb{R}^7$ с $x_1 = x_2 = \dots = x_6 \geqslant x_7$. $\bullet$

Замечания. Кажется правдоподобным, что теорема сохраняется при замене семи полуплоскостей шестью, делящими сферу (пространство) на 6 равных секторов (двугранных углов) $A_1, \dots, A_6$ с $\mathbf{m}(A_1) = \mathbf{m}(A_2) = \dots = \mathbf{m}(A_6)$. Нашими средствами нетрудно добиться того, чтобы

$$\mathbf{m}(A_1) = \mathbf{m}(A_3) = \mathbf{m}(A_5) \quad \text{и} \quad \mathbf{m}(A_2) = \mathbf{m}(A_4) = \mathbf{m}(A_6).$$

В [7] имеется сходный результат о возможности разбить непрерывно распределенную в $\mathbb{R}^3$ конечную массу на 6 равных частей конусами над гранями некоторого куба с вершиной в его центре, а также шестью конусами над гранями правильной треугольной бипирамиды наперед заданной формы с вершиной в точке, делящей высоту этой бипирамиды в наперед заданном отношении. Близкие к теореме 3 результаты имеются в [6, 8].

Ромбододекаэдром называется двенадцатигранник, ограниченный плоскостями, которые проходят через ребра некоторого куба и составляют равные углы с гранями куба, сходящимися в этих ребрах.

Полным ориентированным флагом в $\mathbb{R}^n$ будем называть вложенную последовательность ориентированных подпространств возрастающей размерности:

$$O \subset L_1 \subset L_2 \subset \dots \subset L_n = \mathbb{R}^n,$$

где ориентация внешнего пространства фиксирована.

Теорема 4. *Пусть L – полный ориентированный флаг в $\mathbb{R}^3$, а $K_1, \dots, K_{12}$ – конусы над гранями правильного додекаэдра или ромбододекаэдра с общей вершиной в его центре O. Для любой конечной массы $\mathbf{m}$ в $\mathbb{R}^3$, распределенной непрерывно и симметрично относительно точки O, найдется такое сохраняющее ориентацию линейное преобразование a, что*

$$\mathbf{m}(a(K_1)) = \mathbf{m}(a(K_2)) = \dots = \mathbf{m}(a(K_{12})),$$

а флаг $a(L)$ – любой наперед заданный.

Доказательство. Ограничимся случаем додекаэдра. Рассмотрим непрерывное отображение

$$F = SL(3) \to \mathbb{R}^6, \quad a \mapsto (\mathbf{m}(a(K_1)), \ldots, \mathbf{m}(a(K_6))),$$

где $SL(3)$ – группа линейных преобразований пространства $\mathbb{R}^3$ с единичным определителем, а K_1, K_2, ..., K_6 – не симметричные относительно $O \in \mathbb{R}^3$ конусы над гранями правильного додекаэдра с общей вершиной в его центре $O \in \mathbb{R}^3$.

Докажем теорему для распределений массы, имеющих симметричную относительно точки O гладкую плотность p с компактным выпуклым носителем. В остальных случаях теорема получается предельным переходом. В рассматриваемом случае отображение F является гладким.

Пусть $l \subset \mathbb{R}^6$ – прямая, состоящая из точек с равными координатами. Для открытого и плотного в C^1-топологии множества плотностей p множество $F^{-1}(l)$ является трехмерным гладким компактным подмногообразием в $SL(3)$.

Для доказательства компактности множества $F^{-1}(l) \subset SL(3)$ достаточно проверить, что длины больших осей эллипсоидов, являющихся образами единичного шара D с центром в точке $O \in \mathbb{R}^3$, равномерно ограничены. Действительно, пусть преобразование $a_n \in SL(3)$ переводит шар D в эллипсоид E_n с длиной наибольшей оси, стремящейся к бесконечности. Пусть l_n – прямая, проходящая через $O \in \mathbb{R}^3$ и такая, что на $a_n(l_n)$ лежит большая ось эллипсоида E_n. Прямая l_n принадлежит одному из конусов $K_i(n)$. Тогда легко проверить, что $\lim_{n\to\infty} \mathbf{m}(a(K_i(n))) = 0$.

Поскольку плотность p, а значит, и отображение F, определены с точностью до гладкой деформации, то многообразие $F^{-1}(l)$ определено с точностью до внутреннего кобордизма в $SL(3)$. Рассмотрим отображение G многообразия $F^{-1}(l)$ в множество полных ориентированных флагов в $\mathbb{R}^3$, определенное по формуле $G(a) = a(L)$. Из вышесказанного следует, что для открытого и плотного в C^1-топологии множества плотностей p, которые назовем *типичными*, однозначно определен класс сингулярных бордизмов отображения G.

Покажем, что для таких p отображение G имеет степень один. Для этого рассмотрим сферически-симметричную плотность p, которая, как нетрудно проверить, является типичной. В этом случае $F^{-1}(l)$ состоит из сохраняющих ориентацию поворотов вокруг $O \in \mathbb{R}^3$, и отображение G является гомеоморфизмом. Теорема 4 доказана. $\bullet$

Ромбододекаэдр имеет три перпендикулярных диаметра, соединяющих пары вершин, в которых сходятся по четыре грани. Назовем прямые, на которых лежат эти диаметры, *осями* ромбододекаэдра.

Теорема 5. *Пусть конечная масса* $\mathbf{m}$ *распределена в* $\mathbb{R}^3$ *симметрично относительно точки* O. *Тогда найдется такой ромбододекаэдр* D *с центром в точке* O *и такое линейное преобразование* a, *сводящееся к сжатиям в направлении двух осей* D *с некоторыми коэффициентами, что*

$$\mathbf{m}(a(K_1)) = \mathbf{m}(a(K_2)) = \cdots = \mathbf{m}(a)K_{12})),$$

где $K_1, \ldots, K_{12}$ *– конусы над гранями ромбододекаэдра* D *с вершиной в точке* O.

Иначе говоря, в формулировке теоремы условие на флаг заменяется условием, что соответствующее аффинное преобразование a оставляет оси ромбододекаэдра D перпендикулярными.

Доказательство. В обозначениях из доказательства теоремы 4, мы должны доказать существование преобразования $a \in F^{-1}(l)$, оставляющего оси ромбододекаэдра D перпендикулярными.

Условие перпендикулярности осей выделяет в трехмерном компактном гладком многообразии $F^{-1}(l)$ нульмерное многообразие A, т. е. конечный набор точек. По использованным выше соображениям для открытого и плотного в C^1-топологии множества плотностей p распределения данной массы многообразие A определено в $SL(3)$ с точностью до внутреннего кобордизма, а значит, в этом случае однозначно определен вычет $\bmod 2$ числа элементов в A. Покажем, что этот вычет равен единице.

Для доказательства рассмотрим распределение с плотностью $p(a(x))$, где плотность p сферически симметрична, а преобразование $a \in SL(3)$ переводит шар с центром в точке $O \in \mathbb{R}^3$ в эллипсоид E с главными осями различной длины. Легко проверить, что в этом случае множество A состоит из одного линейного образа ромбододекаэдра, оси которого совпадают с осями эллипсоида E.

Итак, теорема 5 доказана для открытого и плотного в C^1-топологии множества плотностей p распределения массы. В остальных случаях теорема получается простым предельным переходом. •

Замечание. После факторизации по симметрии относительно точки O из теорем 4 и 5 получаются теоремы о возможности разделить на равные части непрерывно распределенную на проективной плоскости массу надлежащим проективным образом системы из 6 правильных пятиугольников (ромбов), покрывающих проективную плоскость.

§3. Одна гипотеза

В заключение сформулируем гипотезу, обобщающую понятие шестидольной точки на плоскости на случай многомерного пространства. Напомним, что *шестидольной точкой* для непрерывно распределенной на плоскости конечной массы $\mathbf{m}$ называется точка, через которую проходят 3 прямые, делящие данную массу $\mathbf{m}$ на 6 равных частей [2].

Гипотеза. *Пусть $T \subset \mathbb{R}^n$ – правильный симплекс, а*

$$T_1 = T - T = \{x - y \mid x, y \in T\}$$

– его разностное множество. Очевидно, что T_1 – центрально-симметричный выпуклый многогранник с $n^2 + n$ вершинами и с центром в точке $O \in \mathbb{R}^n$. Пусть T_2 – многогранник, полярный T_1 относительно шара с центром O. Ясно, что T_2 – центрально-симметричный выпуклый многогранник с центром O и n^2+n равными старшими гранями. Пусть $K_1, K_2, \ldots, K_{n^2+n}$ – конусы с вершиной O над старшими гранями многогранника T_2.

Верно ли, что для любой непрерывно распределенной в $\mathbb{R}^n$ конечной массы $\mathbf{m}$ найдется такое аффинное преобразование a, что

$$\mathbf{m}(a(K_1)) = \mathbf{m}(a(K_2)) = \cdots = \mathbf{m}(a(K_{n^2+n}))?$$

Нетрудно заметить, что при $n = 2$ мы приходим к понятию шестидольной точки для конечной непрерывно распределенной на плоскости массы [2].

Литература

1. H. Hadwiger, *Simultane Verteilung zweier Körper.* — Arch. Math. **17** (1966), 274–278.

2. R. Buck, E. Buck, *Equipartition of convex sets.* — Math. Mag. **22** (1948/49), 195–198.
3. В. В. Макеев, *Некоторые специальные конфигурации плоскостей, связанные с выпуклыми компактами.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **252** (1998), 165–174.
4. S. A. Kakutani, *A proof that there exists a circumscribing cube around any bounded closed convex set in* $\mathbb{R}^3$. — Ann. Math. **43** (1942), 739–741.
5. В. В. Макеев, *Пространственные обобщения некоторых теорем о выпуклых фигурах.* — Мат. заметки **36** (1984), 405–415.
6. В. В. Макеев, *Задача Кнастера и почти сферические сечения.* — Мат. сб. № 3 (1989), 424–431.
7. В. В. Макеев, *Шестидольные разбиения трехмерного пространства.* — Вестник ЛГУ. № 2 (1988), 31–34.
8. В. В. Макеев, *Вписанные и описанные многогранники выпуклого тела.* — Мат. заметки **55** (1994), 128–130.

Makeev V. V. Equipartition of a mass continuously distributed on a sphere or in space.

Masses continuously distributed on a sphere or in a projective or Euclidean space are considered. Several theorems on equipartition of such a mass by a configuration of planes of this or other type are proved by topological means. Unsolved questions are posed.

С.-Петербургский государственный университет

Поступило 31 мая 2000 г.