Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 282, 2001 г.

И. В. Виденский

О НУЛЯХ ПРОИЗВОДНОЙ РАЦИОНАЛЬНОЙ ФУНКЦИИ И КОИНВАРИАНТНЫХ ПОДПРОСТРАНСТВАХ ОПЕРАТОРА СДВИГА В ПРОСТРАНСТВЕ БЕРГМАНА

§1. Критические точки рациональной функции

Классическая теорема Гаусса утверждает, что если все корни комплексного многочлена лежат в полуплоскости, то и все корни его производной лежат в той же полуплоскости. Аналогом этой теоремы для рациональной функции r служит теорема Уолша [1, гл. 4], описывающая множество на плоскости, в котором могут лежать нули производной r', в предположении, что нули функции r лежат в одной полуплоскости, а полюса в некоторой другой полуплоскости. Оказывается, однако, что независимо от расположения полюсов функции r, можно кое-что сказать о расположении нулей функции r'. Основным результатом статьи является следующая теорема.

Теорема 1. (i) *Пусть* $r(z) = p(z)/q(z)$, $\deg p > 1$, *– рациональная функция, все нули которой лежат в замкнутой полуплоскости* H, *а те полюса, которые лежат в* H, *являются простыми. Тогда по крайней мере один ноль производной* r' *лежит в* H.

(ii) *Для любых натуральных чисел* n, m $(n > 1)$ *существуют взаимно простые многочлены* p, q *с простыми нулями,* $\deg p = n$, $\deg q = m$ *такие, что функция* $r = p/q$ *имеет все нули в замкнутой полуплоскости* H, *а ее производная* r' *имеет ровно один ноль в* H.

Ясно, что теорема остается справедливой при замене в формулировке полуплоскости на круг. Обозначим через $W(q,p) = p'q - pq'$ вронскиан многочленов q и p. Тогда первую часть теоремы 1 можно переформулировать так.

Работа частично поддержана грантом РФФИ No. 99-01-00103 и грантом “Ведущие научные школы” No. 00-15-96022.

Следствие 1. *Если все нули одного из многочленов* p, $W(q,p)$ $(\deg p > 1)$ *лежат в полуплоскости* H, *то по крайней мере один ноль другого многочлена лежит в* H.

Классическая теорема Грейса утверждает, что таким же, как в следствии 1, свойством обладают пары аполярных многочленов (см. [2, гл. 4]) или [3, отдел 5, гл. 2]). Отметим, что в нашем случае пара p, $W(q,p)$ будет аполярной лишь при $\deg p = \deg q = 2$. Поэтому свойства аполярных многочленов, вытекающие из теоремы Грейса, переносятся на пары p, $W(q,p)$. Например,

Следствие 2. *Если все корни многочлена* p $(\deg p > 1)$ *лежат в выпуклом множестве* A, *а все корни вронскиана* $W(q,p)$ *лежат в выпуклом множестве* B, *то пересечение* $A \cap B$ *непусто.*

После моего доклада [4] на конференции в июне 2000 г. в Оденсе участник конференции Х. Буфф любезно сообщил мне о следующей переформулировке первой части Теоремы 1, причем он нашел и другое ее доказательство [5].

Следствие 3. *Пусть* r – *рациональное отображение сферы Римана. Если все нули (или все полюса) отображения* r *лежат в замкнутом круге* D, *то* D *содержит хотя бы одну критическую точку отображения* r.

Здесь под критическими точками отображения $r = p/q$ мы понимаем конечные нули вронскиана $W(q,p)$ и точку ∞, если она является нулем или полюсом для r кратности больше, чем 1.

Доказательство теоремы 1 отложим до §3, а сейчас приведем приложение теоремы 1 к задаче из теории пространств Бергмана, которая и послужила исходной точкой настоящего исследования.

§2. Коинвариантные подпространства оператора сдвига в пространстве Бергмана

Сформулируем абстрактную задачу для некоторого гильбертова пространства X функций, аналитических в единичном круге $\mathbb{D}$, $\mathbb{D} = \{z : |z| < 1\}$, а затем применим теорему 1 для решения этой задачи, в случае, когда X является пространством Бергмана. Пусть оператор сдвига M_z, $M_z f = zf$, действует в X, I – конечномерное инвариантное подпространство сопряженного оператора M_z^*, $\dim I = n$. Если f – элемент из I, то что можно сказать о числе нулей функции f в круге $\mathbb{D}$? Легко видеть, что воспроизводящие ядра $k_\lambda(z)$ $((g, k_\lambda) = g(\lambda),\ g \in X)$ являются собственными векторами оператора M_z^*, а воспроизводящие ядра для производных $k_\lambda^{(m)}$ $((g, k_\lambda^{(m)}) = g^{(m)}(\lambda),\ g \in X)$ являются корневыми векторами оператора M_z^*. Следовательно, пространство I является линейной оболочкой содержащихся в нем воспроизводящих ядер, то есть если $f \in I$, то $f = \sum_{j=1}^n c_j k_{\lambda_j}$ (с соответствующими изменениями, если I содержит корневые векторы.)

В простейшем случае, когда X есть пространство Харди H^2, для коинвариантного подпространства I, $\dim I = n$, имеем $I = K_\Theta = H^2 \ominus \Theta H^2$, где Θ – произведение Бляшке с n нулями $\{z_k\}_{k=1}^n$. Тогда включение $f \in I$ означает, что

$$f = \sum_{k=1}^n \frac{c_k}{1 - \bar{z}_k z} = \frac{q(z)}{p(z)},$$

где q – произвольный многочлен, $\deg q < n$, а нули многочлена p находятся в $\mathbb{D}_- = \{z : |z| > 1\}$. Очевидно, в этом случае число нулей многочлена q в круге может принимать любое значение от 0 до $(n-1)$.

Пусть $X = L_a^2(\mathbb{D})$ является пространством Бергмана, то есть это – пространство аналитических в $\mathbb{D}$ функций, для которых

$$\|f\|^2 = \int\limits_{\mathbb{D}} |f(z)|^2 dm_2 < \infty,$$

где m_2 – нормированная плоская мера Лебега. Тогда

$$k_\lambda(z) = \frac{1}{(1 - \bar{\lambda} z)^2}, \quad k_\lambda^{(m)}(z) = \frac{(m+1)! z^m}{(1 - \bar{\lambda} z)^{m+1}}.$$

Обозначим через $Z(f)$ множество нулей функции f.

Теорема 2. (i) *Если I есть инвариантное подпространство оператора M_z^* размерности n, $n > 1$, f – некоторый элемент из I, то*

$$0 \leqslant \operatorname{card}(Z(f) \cap \mathbb{D}) \leqslant 2n - 3.$$

(ii) *Для любого m, $0 \leqslant m \leqslant 2n - 3$, найдутся инвариантное подпространство I размерности n и элемент f из I, для которого $\operatorname{card}(Z(f) \cap \mathbb{D}) = m$.*

Воспользовавшись выражением ядра Бергмана для произвольной односвязной области через конформное отображение этой области на круг и ядро Бергмана для круга, получим

Следствие 4. *Для любой односвязной области G с границей, состоящей более чем из одной точки, число нулей в G линейной комбинации n $(n > 1)$ ядер Бергмана может принимать значения от 0 до $2n-3$.*

Доказательство теоремы 2. Вместо круга $\mathbb{D}$ удобнее будет рассмотреть нижнюю полуплоскость $\mathbb{C}_- = \{z : \operatorname{Im} z < 0\}$. Тогда

$$f = \sum_{k=1}^{n} \frac{c_k}{(z-z_k)^2},$$

где $z_k \in \mathbb{C}_+ = \{z : \operatorname{Im} z > 0\}$. Если подпространство I содержит и корневые векторы, то есть в сумме для f встречаются и слагаемые вида $c_k(z-z_k)^{-m}$, $m > 2$, то степень числителя дроби f будет меньше, чем $(2n-2)$, поэтому можно предположить, что все точки $\{z_k\}_{k=1}^{n}$ различны. Заметим, что

$$f(z) = \left(-\sum_{k=1}^{n} \frac{c_k}{z-z_k}\right)' = \left(\frac{q}{p}\right)', \quad Z(p) \subset \mathbb{C}_+.$$

По следствию 1 по крайней мере один ноль вронскиана $W(q,p)$ лежит в $\mathbb{C}_+$ и, значит, $\operatorname{card}(Z(f) \cap \mathbb{C}_-) \leqslant 2n-3$.

Докажем пункт (ii) индукцией по n. Для $n = 2$ легко указать линейные комбинации, вовсе не имеющие нулей, а также линейные комбинации, имеющие один ноль в $\mathbb{C}_-$. Пусть для $(n-1)$ утверждение верно. Из пункта (ii) теоремы 1 следует, что существуют взаимно простые многочлены p, q, $\deg p = n$, $\deg q = n-1$, такие, что $Z(p) \subset \mathbb{C}_+$, $\operatorname{card}(Z(W(q,p)) \cap \overline{\mathbb{C}_+}) = 1$, где $\overline{\mathbb{C}_+} = \{z : \operatorname{Im} z \geqslant 0\}$. Так как $\deg W(q,p) = 2n-2$, то $\operatorname{card}(Z(W(q,p) \cap \mathbb{C}_-) = 2n-3$. Аналогично, выбрав q, $\deg q = n-2$, получим линейную комбинацию n ядер Бергмана с $(2n-4)$ нулями в $\mathbb{C}_-$, если же $0 \leqslant m \leqslant 2n-5$, то по индукционному предположению найдется элемент f, $f \in I$, $\dim I = (n-1)$, такой, что $\operatorname{card}(Z(f) \cap \mathbb{C}_-) = m$. $\square$

Отметим, что конечные линейные комбинации ядер Бергмана изучаются в [6] в связи с проблемой факторизации в пространстве Бергмана.

§3. Доказательство теоремы 1

Лемма. *Пусть* $g(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \ldots + a_0$ *– многочлен, все нули которого лежат в* $\mathbb{C}_+$*, тогда* $a_1/a_0 \in \mathbb{C}_+$*.*

Доказательство леммы. Обозначим через $c_1, \ldots, c_n$ нули многочлена $g(z)$. Тогда

$$a_0 = (-1)^n c_1 \ldots c_n, \quad a_1 = (-1)^{n-1} \sum_{j=1}^{n} \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{n} c_k, \quad \frac{a_1}{a_0} = -\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{c_j}. \ \square$$

Если $a_0 \neq 0$, то лемма справедлива и при замене $\mathbb{C}_+$ на $\overline{\mathbb{C}}_+$.

Докажем пункт (i) теоремы 1 для полуплоскости $\overline{\mathbb{C}}_+$. Если у многочлена p есть ноль кратности больше, чем один, то этот же ноль будет нулем вронскиана $W(q,p)$, поэтому можно считать, что все нули полинома p различны. Сделаем линейную замену переменных в многочленах p и q так, чтобы один из нулей многочлена p совпал с началом координат, а остальные его нули остались в $\overline{\mathbb{C}}_+$. Будем считать, что старшие коэффициенты многочленов p и q равны единице. Обозначим

$$p(z) = z^n + \ldots + a_2 z^2 + a_1 z, \quad W(q,p) = (n-m)z^{n+m-1} + \ldots + b_1 z + b_0.$$

Так как p и q взаимно просты, то $q(0) \neq 0$,

$$\begin{aligned} W(q,p)(0) &= (p'q - q'p)(0) = p'(0)q(0) = a_1 q(0), \\ (W(q,p))'(0) &= (p''q - q''p)(0) = p''(0)q(0) = 2a_2 q(0). \end{aligned}$$

С другой стороны $W(q,p)(0) = b_0$, $W'(q,p)(0) = b_1$. Следовательно, $b_1/b_0 = 2a_2/a_1$. По лемме $a_2/a_1 \in \overline{\mathbb{C}}_+$. Допустим, что все нули вронскиана $W(q,p)$ лежат в $\mathbb{C}_-$, тогда по лемме $b_1/b_0 \in \mathbb{C}_-$, что невозможно. Значит хотя бы один ноль вронскиана $W(q,p)$ попадает в $\overline{\mathbb{C}}_+$.

Для доказательства пункта (ii) будем использовать следующий (см. напр. [7, гл. 9]) результат, известный из алгебры.

Предложение. *Пусть* $u(x), v(x)$ *– вещественные взаимно простые многочлены,* $f(z) = u(z) + i\,v(z)$*,*

$$n_1(f) = \operatorname{card}(Z(f) \cap \mathbb{C}_+), \quad n_2(f) = \operatorname{card}(Z(f) \cap \mathbb{C}_-).$$

Тогда $n_1(f)-n_2(f)=-I(u,v)$, *где* $I(u,v)$ – *индекс многочлена и относительно* v, *равный разности числа корней и первого типа относительно* v (x_0 – *корень первого типа, если* $u(x_0)=0$, $u(x)\cdot v(x)$ *меняет знак с минуса на плюс при переходе через* x_0) *и числа корней и второго типа* (x_0 – *корень второго типа, если* $u(x_0)=0$, $u(x)\cdot v(x)$ *меняет знак с плюса на минус при переходе через* x_0). *Индекс* $I(u,v)$ *вычисляется с помощью обобщенного ряда Штурма:*

$$f_0=u,\quad f_1=v,\quad f_j=f_{j+1}g_{j+1}-f_{j+2},\quad j=0,1,\dots,k-2,\quad f_k=\mathrm{const},$$

а именно, $I(u,v)=V(u,v;-\infty)-V(u,v;+\infty)$, *где* $V(u,v;x)$ – *число перемен знаков в ряде Штурма* $\{f_j(x)\}_{j=0}^k$.

Приступим к построению взаимно простых многочленов p,q с простыми нулями, $\deg p=n$, $\deg q=m$, $n>1$, таких, что $n_1(p)=n$, $n_1(W(q,p))=1$. Зафиксируем $n,n>1$, выберем n различных вещественных чисел $x_1,x_2,\dots,x_n$, положим $g(x)=(x-x_1)\dots(x-x_n)$, $p(z)=g(z)-iag'(z)$, где $a>0$, параметр a выберем потом. Нули многочлена $p(z)$ непрерывно зависят от параметра a, выберем a настолько малым, чтобы нули многочлена p были близки к точкам $x_1,\dots,x_n$, были различны и $p(i)\neq 0$. Многочлены q будем строить по индукции по степени m. Для $m=1$ положим $q(z)=z-i$. Тогда

$$W(q,p)=g'z-g-ig'+a(-g''-izg''+ig').$$

Подсчитаем число нулей в $\mathbb{C}_+$ у многочлена $f=g-zg'+ig'$. Для пары g,g' имеем $V(g,g';-\infty)=n$, $V(g,g';+\infty)=0$. Ряд Штурма для пары $(g-g'x),g'$ отличается от ряда Штурма для пары g,g' только первым элементом. Старший коэффициент многочлена $(g-g'x)$ равен $(1-n)$, $1-n<0$. Следовательно, $V(g-g'x,g';-\infty)=n-1$, $V(g-g'x,g';+\infty)=1$, $n_1(f)-n_2(f)=-(n-2)$. Значит $n_1(f)=1$, $n_2(f)=n-1$. Выберем параметр a настолько малым, чтобы корни вронскиана $W(q,p)$ остались в тех же полуплоскостях $\mathbb{C}_-$, $\mathbb{C}_+$, что и у многочлена f. Тогда $n_1(W(q,p))=1$.

Допустим, что построен нормализованный многочлен q, $\deg q=m$, такой, что $n_1(W(q,p))=1$. Предположим, что $m\neq n-1$, $m\neq n$. Будем искать многочлен q_1 степени $(m+1)$ в виде $q_1(z)=q(z)(\varepsilon z+i)$, $\varepsilon>0$, параметр ε выберем позже. Имеем

$$pq=z^{m+n}+g_1,\quad \deg g_1<m+n,$$

$$W(q,p)=(n-m)z^{m+n-1}+g_2,\quad \deg g_2<m+n-1,$$

$$W(q_1,p)=(\varepsilon z+i)W(q,p)-\varepsilon pq=$$

$$=\varepsilon z^{m+n-1}(n-m-1)\left(z+i\frac{n-m}{(n-m-1)\varepsilon}+\frac{g(z)}{z^{m+n-1}}+\varepsilon c\right),$$

$\deg g<m+n-1$, $c\in\mathbb{C}$. Так как $m\neq n$, $m\neq n-1$, то

$$\frac{n-m}{n-m-1}>0,\quad z_0=-i\frac{n-m}{(n-m-1)\varepsilon},\quad z_0\in\mathbb{C}_-.$$

Выберем ε настолько малым, чтобы самый большой по модулю корень вронскиана $W(q_1,p)$ был близок к z_0, а остальные корни вронскиана $W(q_1,p)$ были бы близки к корням вронскиана $W(q,p)$ и лежали бы в тех же полуплоскостях $\mathbb{C}_+$, $\mathbb{C}_-$, что и корни $W(q,p)$. Тогда $n_1(W(q_1,p))=n_1(W(q,p))=1$.

Если $m=n-1$, то положим $q_1=q+p$. Тогда $\deg q_1=n$, $W(q_1,p)=W(q,p)$.

Тем самым теорема доказана для всех пар n,m, для которых $m\leqslant n$. Осталось только построить пример многочленов p,q, $\deg p=n$, $\deg q=n+1$. Заметим, что если многочлены p,q, $\deg p=n$, $\deg q=m$ обладают свойствами $n_1(p)=n$, $n_1(W(q,p))=1$, то такими же свойствами обладают многочлены $p_1(z)=z^np(-1/z)$, $q_1(z)=z^mq(-1/z)$. По доказанному, существуют многочлены p,q, $\deg p=\deg q=n+1$, для которых $n_1(p)=n+1$, $n_1(W(q,p))=1$. Ясно, что утверждение теоремы о замкнутой полуплоскости эквивалентно утверждению об открытой полуплоскости. Поэтому, не умаляя общности, можно считать, что один из нулей многочлена p совпадает с началом координат, а остальные лежат в $\mathbb{C}_+$. Положим $p_1=z^{n+1}p(-1/z)$, $q_1=z^{n+1}q(-1/z)$. Тогда $\deg p_1=n$, $\deg q_1=n+1$, $n_1(p_1)=n$, $n_1(W(p_1,q_1))=n_1(W(p,q))=1$. □

Замечание 1. Аналог теоремы Уолша [1] о нулях производной рациональной функции справедлив и для производной произведения двух многочленов. Простейшие примеры многочленов p,q, $\deg p=2$, $\deg q=1$, показывают, что в теореме 1 нельзя заменить отношение многочленов на их произведение.

Замечание 2. В теореме 1 условие, что полюса функции r, попадающие в H, должны быть простыми, является существенным. Взяв, например, $p=(z-i)(z-2i)$, $q=(z-3i)^2$, получим производную r', не имеющую нулей в $\mathbb{C}_+$.

Было бы интересно и для других гильбертовых пространств аналитических функций в круге и в других областях исследовать вопрос о возможном числе нулей линейной комбинации n воспроизводящих ядер, в частности, для весовых пространств Бергмана и для пространств Бергмана в многосвязных областях.

В заключение приношу благодарность Г. Шапиро, который привлек мое внимание к вопросу о числе нулей в круге линейной комбинации n ядер Бергмана.

Литература

1. J. L. Walsh, *The location of critical points of analytic and harmonic functions.* Amer. Math. Soc., Colloquim publ., Vol. 34, New York (1950).
2. M. Marden, *The geometry of the zeros of a polynomial in a complex variable.* Amer. Math. Soc., Math. Surveys, No. 3, New York (1949).
3. Г. Полиа, Г. Сёге, *Задачи и теоремы из анализа, часть 2.* М., Наука (1978).
4. I. Videnskii, *On the zeros of the derivative of a rational function and invariant subspaces for the backward shift operator on the Bergman space..* First AMS-Scand. Int. Math. Meeting, Odense, Denmark, June 13–16, 2000, Collected abstracts, pp. 46–47.
5. X. Buff, *On the zeros and critical points of a rational map.* Int. J. Math. Sci. (to appear).
6. B. Korenblum, T. L. Lance, and M. I. Stessin, *Projective generators in Hardy and Bergman spaces.* Bull Sci. Math., **124**, No. 6 (2000), 435–445.
7. Д. К. Фаддеев, *Лекции по алгебре.* М., Наука (1984).

Videnskii I. V. On the zeros of the derivative of a rational function and coinvariant subspaces for the shift operator on the Bergman space.

If all n ($n > 1$) zeros of a rational function r with simple poles are in a half-plane, then the derivative of r has at least one zero in the same half-plane. This result is used to prove that the number of zeros of a linear combination of n Bergman kernels in the unit disc may range from 0 to $2n - 3$.

Санкт-Петербургский
государственный
электротехнический университет
ilya@viden.pdmi.ras.ru

Поступило 22 октября 2001 г.