Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 282, 2001 г.

Е. Г. Зельдина

ЯДРА БЕРГМАНА ПОЧТИ СФЕРИЧЕСКИХ ОБЛАСТЕЙ С ГРАНИЦЕЙ КЛАССА H^{σ}

Ядра Бергмана в областях в $\mathbb{C}^n$ изучаются давно, и на эту тему написано много работ. Во всех работах, начиная с работ Керзмана [10], Феффермана [7], Буте де Монвеля и Шёстранда [5], написанных в начале семидесятых, и вплоть до конца девяностых, все результаты о поведении ядер Бергмана вблизи границы предполагали C^{∞}-гладкость границы. Соответствующие результаты представлены, например, в работах [2–4, 6, 8, 9, 11–13, 15].

Для ядра Бергмана B_{Ω} ограниченной псевдовыпуклой области $\Omega \subset \mathbb{C}^n$, $n \geqslant 2$, с C^{∞}-гладкой границей в предположении, что $\mathbf{0} = (0, \dots, 0) \in \partial\Omega$ и внешняя нормаль к $\partial\Omega$ в точке $\mathbf{0}$ направлена по положительной полуоси $(x_1, 0 \dots, 0)$, асимптотическое разложение для $\mathbf{z}_{\delta} = (-\delta, 0, \dots, 0)$, $\delta > 0$ выглядит так [5]:

$$B_{\Omega}(\mathbf{z}_{\delta}, \mathbf{z}_{\delta}) = \frac{c_{n1}(\Omega)}{\delta^{n+1}} + \sum_{k=n}^{1} \frac{c_{n,n-k}(\Omega)}{\delta^k} + \widetilde{c} \log \frac{1}{\delta} + O(1). \tag{1}$$

Если опустить условие строгой псевдовыпуклости, оставив лишь условие C^{∞}-гладкости границы, то при тех же геометрических условиях на расположение Ω в $\mathbb{C}^n$ изменяется даже первый член асимптотики (1) (или оценки для $B_{\Omega}(\mathbf{z}_{\delta}, \mathbf{z}_{\delta})$ [4, 13]). С другой стороны, для строго псевдовыпуклых областей, близких к шару, с границей класса C^6, как выяснено в [1] и [14], имеет место асимптотическое разложение $B_{\Omega}(\mathbf{z}_{\delta}, \mathbf{z}_{\delta})$ вида

$$B_{\Omega}(\mathbf{z}_{\delta}, \mathbf{z}_{\delta}) = \frac{c_{n1}(\Omega)}{\delta^{n+1}} + \frac{c_{n2}(\Omega)}{\delta^{n}} + O\left(\frac{1}{\delta^{n-1}}\right), \tag{2}$$

которое согласуется с (1) как в виде двух первых слагаемых, так и в порядке роста остатка.

Работа частично поддержана грантом “Научные школы” No. 00-15-96-022.

Оказывается, однако, что ослабление требования на гладкость границы $\partial\Omega$ до H^σ, $4 < \sigma < 6$, для строго псевдовыпуклой области может кардинально изменить привычный вид асимптотики $B_\Omega(\mathbf{z}_\delta, \mathbf{z}_\delta)$ (1) (даже в частном случае (2)). Именно, для некоторых областей Ω, близких к шару, после первых двух слагаемых в (2) в асимптотике для $B_\Omega(\mathbf{z}_\delta, \mathbf{z}_\delta)$ будет стоять произвольное количество слагаемых степенного роста вида $\frac{c}{\delta^\varkappa}$, а остаток тем не менее будет совпадать по росту с остатком в (2). Впервые это было отмечено в [14] для областей с границей класса H^5, при этом там строились области с добавлением в $B_\Omega(\mathbf{z}_\delta, \mathbf{z}_\delta)$ одного нового по сравнению с (2) слагаемого.

Перейдем к обозначениям.

Мы рассматриваем случай $n \geqslant 3$. Рассмотрим $\mathbf{z} = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n$ и обозначим $\mathbf{z}' = (z_2, \dots, z_n)$. Пусть $|\mathbf{z}|$ и $|\mathbf{z}'|$ – стандартные нормы в пространствах $\mathbb{C}^n$ и $\mathbb{C}^{n-1}$ соответственно. Далее, через α' и β' обозначим мультииндексы $\alpha' = (\alpha_2, \dots, \alpha_n)$, $\beta' = (\beta_2, \dots, \beta_n)$, и $|\alpha'| = |\alpha_2| + \dots + |\alpha_n|$, $|\beta'| = |\beta_2| + \dots + |\beta_n|$. Для краткости положим $\mathbf{z}^{\alpha'} := z_2^{\alpha_2} \dots z_n^{\alpha_n}$, $\overline{\mathbf{z}}^{\beta'} := \overline{z}_2^{\beta_2} \dots \overline{z}_n^{\beta_n}$. Обозначим через $B_\Omega(\mathbf{z}, \boldsymbol{\xi})$ ядро Бергмана области $\Omega \subset \mathbb{C}^n$.

Теперь мы можем сформулировать основную теорему данной статьи.

Теорема. *Пусть $n \geqslant 3$, $\nu \in \mathbb{R}$, $4 < \sigma = \sigma_1 < \sigma_2 < \dots < \sigma_N$, $A = \{A_{\alpha'\beta'}\}$ – набор коэффициентов, соответствующий различным парам мультииндексов α', β', $|\alpha'| = |\beta'| = 2$, $A_{\alpha'\alpha'} \in \mathbb{R}$ и*

$$\sum_{\alpha', \beta'} |A_{\alpha'\beta'}| + |a_1| + \dots + |a_N| \leqslant 1, \tag{3}$$

где a_k, $k = 1, \dots, N$, – некоторые вещественные числа.

Пусть $\Omega(A, a, \nu) \subset \mathbb{C}^n$ – следующая область:

$$\Omega(A,a,\nu) = \Big\{ \mathbf{z} = (z_1, \mathbf{z}') : |z_1| < 1, |\mathbf{z}'| < 2,$$

$$|\mathbf{z}|^2 + \nu \bigg(\operatorname{Re} \Big(\sum_{\alpha',\beta'} A_{\alpha'\beta'} \mathbf{z}'^{\alpha'} \overline{\mathbf{z}}'^{\beta'} \Big) + a|\mathbf{z}'|^5 \bigg) < 1|\mathbf{z}|^2 + \tag{4}$$

$$+\nu \bigg(\operatorname{Re} \sum_{\alpha',\beta'} A_{\alpha'\beta'} \mathbf{z}'^{\alpha'} \overline{\mathbf{z}}'^{\beta'} + \sum_{k=1}^{N} a_k |\mathbf{z}'|^{\sigma_k} \bigg) < 1 \Big\}.$$

Тогда существует $\nu_2 = \nu_2(n) > 0$, такое что при $|\nu| \leqslant \nu_2$ для ядра Бергмана $B_\Omega(\mathbf{z}, \boldsymbol{\xi})$ при $\mathbf{z}_r = \boldsymbol{\xi}_r = (r, 0, \dots, 0)$, $0 < r < 1$, справедливо соотношение

$$
\begin{gathered}
B_\Omega(\mathbf{z}_r, \mathbf{z}_r) = \frac{c_{n0}(\Omega)}{(1-r^2)^{n+1}} + \sum_{\alpha'} c_n(\alpha')\nu A_{\alpha'\alpha'} \frac{1}{(1-r^2)^n} + \\
+ \sum_{k=1}^{N} \frac{\widetilde{c}_n(\sigma_k)\nu a_k}{(1-r^2)^{n-3+\frac{\sigma_k}{2}}} + O\left(\frac{\nu}{(1-r^2)^{n-1}}\right),
\end{gathered} \tag{5}
$$

причем коэффициенты c_{n0}, $c_n(\alpha')$ *совпадают с соответствующими коэффициентами в формулировке* (1.8) *теоремы* 2, [1], *а* $\widetilde{c}_n(\sigma_k) \neq 0$.

Таким образом, конечная гладкость границы $\Gamma = \partial\Omega$ может существенно изменить асимптотику ядра Бергмана вблизи границы.

Доказательство теоремы требует применения всего подхода, вместе с необходимыми модификациями, который был изложен для случая областей с C^6-гладкими границами в [1] и [14]. Это может быть проделано, поэтому мы ограничимся перечнем лемм, обозначающих этапы доказательства, с теми изменениями, которые приходится сделать в их формулировке в новой ситуации. Соответствующие доказательства аналогичны, но не тождественны предшествующим. Конечно, мы изложим подробно пункт, относящийся непосредственно к вычислению асимптотики, в котором и появится формула (5).

Лемма 1 (каноническое биголоморфное отображение F_r, (3.1), [1]). *Пусть* $0 < r < 1$,

$$
\begin{aligned}
&\boldsymbol{\omega} = F_r(\mathbf{z}): \quad \omega_1 = \frac{z_1 - r}{1 - rz_1}, \quad \omega_k = \frac{\sqrt{1-r^2}}{1-rz_1} z_k, \quad 2 \leqslant k < n, \\
&\widetilde{\Omega}_r(A, a, \nu) := F_r(\Omega(A, a, \nu)),
\end{aligned}
$$

где область $\Omega(A, a, \nu)$ *определена в* (4). *Тогда существует такое* $\nu_0 = \nu_0(n) > 0$, *что при* $\nu \leqslant \nu_0$ *имеем соотношение*

$$
\begin{gathered}
\widetilde{\Omega}_r(A, a, \nu) = \Bigg\{ \boldsymbol{\omega}, |\omega_1| < 1, |\boldsymbol{\omega}'| < 2, \\
\nu \operatorname{Re} \sum_{\alpha', \beta'} A_{\alpha'\beta'} \frac{(1-r^2) \boldsymbol{\omega}'^{\alpha'} \overline{\boldsymbol{\omega}}'^{\beta'}}{1 + r\overline{\omega}_1} + \nu \sum_{k=1}^{N} a_k \frac{(1-r^2)^{\frac{\sigma_k}{2}-1}}{|1 + r\omega_1|^{\sigma_k - 2}} |\boldsymbol{\omega}|^2 + \\
+ \nu \operatorname{Re} \sum_{\alpha', \beta'} A_{\alpha'\beta'} \frac{(1-r^2) \boldsymbol{\omega}'^{\alpha'} \overline{\boldsymbol{\omega}}'^{\beta'}}{|1 + r\omega_1|^2} + \nu \sum_{k=1}^{N} a_k \frac{(1-r^2)^{\frac{\sigma_k}{2}-1}}{|1 + r\omega_1|^{\sigma_k - 2}} < 1 \Bigg\}.
\end{gathered} \tag{6}
$$

Элементарное доказательство соотношения (6) совершенно аналогично рассуждениям (3.2)–(3.9), [1].

Поскольку между величинами $B_{\Omega(A,a,\nu)}(\mathbf{z}_r,\mathbf{z}_r)$ и $B_{\widetilde{\Omega}_r(A,a,\nu)}(\mathbf{0},\mathbf{0})$ имеется соотношение

$$B_{\Omega(A,a,\nu)}(\mathbf{z}_r,\mathbf{z}_r) = \frac{1}{(1-r^2)^{n+1}} B_{\widetilde{\Omega}_r(A,a,\nu)}(\mathbf{0},\mathbf{0}),$$

далее, как и в [1], мы будем заниматься асимптотикой величины $B_{\widetilde{\Omega}_r(A,a,\nu)}(\mathbf{0},\mathbf{0})$.

Далее постоянные $\nu_0(n)$, упоминаемые в формулировках, в разных утверждениях могут иметь разные значения.

Лемма 2. *Пусть $\Gamma_r(A,a,\nu) = \partial\widetilde{\Omega}_r(A,a,\nu)$. Существует $\nu_0 = \nu_0(n)$, такое что при $|\nu| \leqslant \nu_0$ и для всех $\boldsymbol{\omega}_0 \in S$ существует единственное $R(\boldsymbol{\omega}_0, \overline{\boldsymbol{\omega}}_0, A, a, \nu, r) > 0$, такое что*

$$R(\boldsymbol{\omega}_0, \overline{\boldsymbol{\omega}}_0, A, a, \nu, r)\boldsymbol{\omega}_0 \in \Gamma_r(A,a,\nu),$$

функция R C^1-гладко зависит от своих аргументов и голоморфно зависит от переменных ν,

$$\lambda_j = \frac{(1-r^2){\boldsymbol{\omega}'_0}^{\alpha'}{\overline{\boldsymbol{\omega}}'_0}^{\beta'}}{|1+r\omega_{01}|^2}, \quad 1 \leqslant j \leqslant L,$$

$$\mu_1 = \frac{r\omega_{01}}{1+r\omega_{01}}, \quad \mu_2 = \frac{r\overline{\omega}_{01}}{1+r\overline{\omega}_{01}},$$

$$\Lambda_k = \frac{(1-r^2)^{\frac{\sigma_k}{2}-1}|\boldsymbol{\omega}'_0|^{\sigma_k}}{|1+r\omega_{01}|^{\sigma_k-2}}, \quad 1 \leqslant k \leqslant N.$$

В некоторой окрестности начала координат $\{\nu = 0, \lambda_j = 0, \mu_k = 0, \Lambda_k = 0\}$ для функции R справедливы все утверждения лемм 10, 11 и соотношений (7.11)–(7.16) из [1].

Новым по сравнению с [1] является лишь наличие новых переменных Λ_k. Функция $R = R(\boldsymbol{\omega}_0, \overline{\boldsymbol{\omega}}_0, A, a, \nu, r)$, аналогично [1], является решением уравнения

$$R^2 + \nu R^4 \operatorname{Re} \sum_{\alpha',\beta'} A_{\alpha'\beta'} \frac{(1-r^2){\boldsymbol{\omega}'_0}^{\alpha'}{\overline{\boldsymbol{\omega}}'_0}^{\beta'}}{|1+Rr\omega_{01}|^2} + \sum_{k=1}^{N} \nu a R^{\sigma_k} \frac{(1-r^2)^{\frac{\sigma_k}{2}-1}|\boldsymbol{\omega}'_0|^{\sigma}_k}{|1+Rr\omega_{01}|^{\sigma_k-2}} = 1.$$

Детальное изучение этой функции позволяет использовать тождества, аналогичные (1.30) из [1], и оценки коэффициентов, аналогичные (1.35) из [1]. Эти свойства, а также другие свойства функции R, используются в наиболее важной части доказательства – в части, где мы получаем вариационную формулу [16] для $B_{\widetilde{\Omega}_r(A,a,\nu)}(\mathbf{0},\mathbf{0})$ (см. лемма 3 ниже) и упрощаем ее (см. лемма 4 ниже). Это производится в соответствии с методом работ [1] и [14].

Лемма 3. *Существует такое $\nu_0=\nu_0(n)>0$, что при $|\nu|\leqslant\nu_0$ справедливо соотношение*

$$B_{\widetilde{\Omega}_r(A,a,\nu)}(\mathbf{0},\mathbf{0})=B_U(\mathbf{0},\mathbf{0})-\\ -\int\limits_0^1 dt\int\limits_{\Gamma_{(t)}}|B_{(t)}(\mathbf{0},\mathbf{s})|^2\varphi_t^*(\mathbf{s})d\nu_t(\mathbf{s})=B_U(\mathbf{0},\mathbf{0})-I(r,\nu), \quad (7)$$

где

$$\Gamma_{(t)}=\Gamma_t(A,a,\nu t),\ B_{(t)}=B_{\widetilde{\Omega}_r(A,a,\nu t)},\ \varphi_t^*(\boldsymbol{\omega})=\frac{\partial R^*(\boldsymbol{\omega}_0,t)}{\partial t}\cos\theta(\boldsymbol{\omega}), \quad (8)$$

$\boldsymbol{\omega}\in\Gamma_{(t)}$, $d\nu_t(\mathbf{s})$ – элемент $(2n-1)$-мерной поверхностной меры на $\Gamma_{(t)}$. В свою очередь, в (8) функция $R^*(\boldsymbol{\omega}_0,t)$ при $\boldsymbol{\omega}_0\in\Gamma_{(t)}$ определяется из соотношения $R^*(\boldsymbol{\omega}_0,t)\boldsymbol{\omega}_0\in\Gamma_{(t)}$, $\theta(\boldsymbol{\omega})$ определяется как угол между внешней нормалью к $\Gamma_{(t)}$ в точке $\boldsymbol{\omega}$ и радиус-вектором $[\mathbf{0},\boldsymbol{\omega}]$.

Доказательство леммы 3 требует реализации значительной части подхода, изложенного [1, 14]. Оказывается, что наличие дополнительных слагаемых (Λ_k в терминах леммы 2) это позволяет. Аналогично обстоит дело и с упрощением формулы (7) (в [1] этому посвещены пункты 7, 8, и (9.1)–(9.17) в пункте 9) Сформулируем лишь окончательный результат этих упрощений.

Лемма 4. *Пусть $\varkappa_n=B_U(\mathbf{0},\mathbf{0})$, $I_{r,\nu}$ определено в (7). Тогда существует такое $\nu_0=\nu_0(n)>0$, что при $|\nu|\leqslant\nu_0$ справедливо соотношение*

$$\left|I(r,\nu)-\int\limits_0^1 dt\int\limits_S \varkappa_n^2\left(-\frac{\nu}{2}U_0(\boldsymbol{\omega}_0,\overline{\boldsymbol{\omega}}_0)\right)ds(\boldsymbol{\omega}_0)\right|\leqslant c_n\nu^2(1-r^2)^2, \quad (9)$$

где c_n – некоторая постоянная, зависящая только от n,

$$U_0(\boldsymbol{\omega}_0,\overline{\boldsymbol{\omega}}_0)=\sum_{\alpha',\beta'}\mathrm{Re}\left(A_{\alpha'\beta'}\frac{(1-r^2){\boldsymbol{\omega}'}^{\alpha'}{\overline{\boldsymbol{\omega}}'}^{\beta'}}{|1+r\omega_{01}|^2}\right)+$$

$$+\sum_{k=1}^{N} a_k \frac{(1-r^2)^{\frac{\sigma_k}{2}-1}|\boldsymbol{\omega}_0'|_k^{\sigma}}{|1+r\omega_{01}|^{\sigma_k-2}}. \tag{10}$$

Теперь соотношения (7), (9), (10) и уже проделанные вычисления (9.18), (9.19) и далее в [1] показывают, что для завершения доказательства теоремы достаточно проверить следующую лемму. В этой лемме мы используем новые слагаемые в (10). Эти слагаемые появляются из-за того, что в формуле для $\Omega(A,a,\nu)$ мы имеем дополнительные слагаемые вида $\nu a_k|\mathbf{z}'|^{\sigma_k}$, имеющие гладкость H^{σ}. А соответствующие слагаемые в (10) и приводят к возникновению новых слагаемых в асимптотике $B_{\widetilde{\Omega}_r(A,a,\nu)}(\mathbf{0},\mathbf{0})$.

Лемма 5. *Пусть $n \geqslant 3$, $4<\sigma<6$. Тогда*

$$J(r)=\int\limits_S \frac{|\boldsymbol{\omega}_0'|^{\sigma}}{|1+r\omega_{01}|^{\sigma-2}}ds$$

$$=(n-1)\operatorname{mes}_{2n-1}S\left(\frac{1}{n-1+\frac{\sigma}{2}}+\frac{\Gamma(n-1+\frac{\sigma}{2})}{\Gamma^2(\frac{\sigma}{2}-1)}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\Gamma^2(m-1+\frac{\sigma}{2})}{m!\Gamma(m+n+\frac{\sigma}{2})}\right)$$

$$+O(1-r^2). \tag{11}$$

Доказательство. Пусть $\delta=\frac{\sigma-2}{2}$, тогда

$$\frac{1}{(1+\zeta)^{\delta}}=1+\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^m\frac{\Gamma(\delta+m)}{m!\Gamma(\delta)}\zeta^m.$$

Обозначим $c_m=\frac{\Gamma(m+\delta)}{m!\Gamma(\delta)}$, $m\geqslant 1$, тогда

$$J(r)=\int\limits_S|\boldsymbol{\omega}_0'|^{\sigma}ds+\sum_{m=1}^{\infty}c_m^2r^{2m}\int\limits_S|\omega_{01}|^{2m}|\boldsymbol{\omega}'|^{\sigma}ds$$

$$=\frac{(n-1)\operatorname{mes}_{2n-1}S}{\pi}\left(\int\limits_{|\omega_{01}|<1}(1-|\omega_{01}|^2)^{n-2+\frac{\sigma}{2}}dm_2(\omega_{01})\sum_{m=1}^{\infty}c_m^2r^{2m}\times\right.$$

$$\int\limits_{|\omega_{01}|<1}|\omega_{01}|^{2m}(1-|\omega_{01}|^2)^{n-2+\frac{\sigma}{2}}dm_2(\omega_{01})\int\limits_{|\omega_{01}|<1}(1-|\omega_{01}|^2)^{n-2+\frac{\sigma}{2}}dm_2(\omega_{01})+$$

$$\sum_{m=1}^{\infty} c_m^2 r^{2m} \int\limits_{|\omega_{01}|<1} |\omega_{01}|^{2m}(1-|\omega_{01}|^2)^{n-2+\frac{\sigma}{2}} dm_2(\omega_{01})\Big) =$$

$$(n-1)\,\mathrm{mes}_{2n-1} S\Bigg(\int\limits_0^1 (1-x)^{n-2+\frac{\sigma}{2}} dx + \sum_{m=1}^{\infty} c_m^2 r^{2m} \int\limits_0^1 x^m (1-x)^{n-2\frac{\sigma}{2}} dx\Bigg) =$$

$$(n-1)\,\mathrm{mes}_{2n-1} S\Bigg(\frac{1}{n-1\frac{\sigma}{2}} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\Gamma^2(\delta+m)}{(m!)^2\Gamma^2(\delta)} r^{2m} \frac{\Gamma(m+1)\Gamma(n-1+\frac{\sigma}{2})}{\Gamma(n+m+\frac{\sigma}{2})}\Bigg) =$$

$$(n-1)\,\mathrm{mes}_{2n-1} S\Bigg(\frac{1}{n-1\frac{\sigma}{2}} + \frac{\Gamma(n-1+\frac{\sigma}{2})}{\Gamma^2(\frac{\sigma}{2}-1)} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\Gamma(m+1)\Gamma^2(m-1+\frac{\sigma}{2})}{(m!)^2\Gamma(m+n+\frac{\sigma}{2})}\Bigg)$$

$$+(n-1)\,\mathrm{mes}_{2n-1} S \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\Gamma(m+1)\Gamma^2(m-1+\frac{\sigma}{2})}{(m!)^2\Gamma(m+n+\frac{\sigma}{2})}(r^{2m}-1). \qquad (12)$$

Так как $c_m \asymp m^{\delta-2} = m^{\frac{\sigma}{2}-2}$,

$$\frac{\Gamma(m+1)\Gamma(n-1+\frac{\sigma}{2})}{\Gamma(n+m+\frac{\sigma}{2})} \asymp \frac{1}{m^{n-1+\frac{\sigma}{2}}},$$

то ряд

$$\sum_{m=1}^{\infty} 2mc_m^2 \Gamma(m+1)\Gamma\left(n-1+\frac{\sigma}{2}\right)\Gamma\left(n+m+\frac{\sigma}{2}\right) \asymp$$

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{m^{\sigma-3}}{m^{n-1+\frac{\sigma}{2}}} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^{n+2-\frac{\sigma}{2}}}$$

сходится при $4<\sigma<6$, $n \geqslant 3$ и тогда (12) влечет утверждение леммы 5.

Лемма 5, а значит и теорема, доказаны.

Литература

1. E. Anissova (Zeldina), N. Shirokov, *Bergman kernels for C^6-smooth almost spherical domains.* — Dept. of Math. Chalmers/Göteborg University preprint series, Preprint 2000:29.
2. M. Beals, C. Fefferman, R. Grossman, *Strictly pseudoconvex domains in $\mathbb{C}^n$.* — Bull. Am. Math. Soc. (N.S.) **8** no. 2 (1983), 125–322.
3. H. P. Boas, E. J. Straube, Ji Ye Yu, *Boundary limits of the Bergman kernel and metric.* — Michigan Math. J. **42** no. 3 (1995), 449–461.

4. A. Bonami, S. Grellier, *Weighted Bergman projections in domains of finite type in* $\mathbb{C}^2$. Harmonic Analysis and Operator Theory. vol. 189, Am. Math. Soc., Contemp. Math., 1995, pp. 65–80.
5. L. Boutet de Monvel, J. Sjöstrand, *Sur la singularité des noyaux de Bergman et de Szegö*. — Société Mathematique de France, Astérisque **34–35** (1976), 123–164.
6. S. Cho, *Estimates of the Bergman kernel function on certain pseudoconvex domains in* $\mathbb{C}^n$. — Math. Z. **222** no. 2 (1996), 329–339.
7. C. Fefferman, *The Bergman kernel and biholomorphic mapping of pseudoconvex domains*. — Invent. Math. **26** (1974), 1– 65.
8. C. Fefferman, *The Bergman kernel in quantum mechanics*. Analysis and Geometry in Several Complex Variables (Katata 1997). Trends Math., Birkhäuser: Boston, MA, 1999, pp. 39–58.
9. K. Hitachi, G. Komatsu, *Invariant theory of the Bergman kernel*. Adv. Stud. Pure Math.. vol. 25, Math. Soc. Japan, Tokio, 1997, pp. 167–220.
10. N. Kezman, *The Bergman kernel function. Differentiability at the boundary*. — Math. Ann. **195** (1972), 149–158.
11. J. Kamimoto, *Asymptotic expansion of the Bergman kernel for weakly pseudoconvex tube domains in* $\mathbb{C}^n$. — Ann. Fac. Toulouse Math. **(6)7** no. 1 (1998), 51–85.
12. J. McNeal, *Boundary behavior of the Bergman kernel function in* $\mathbb{C}^2$. — Duke Math. J. **58** (1989), 499–512.
13. A. Nagel, J. P. Rosay, E. M. Stein, S. Wainger, *Estimates for the Bergman and Szegö kernels in* $\mathbb{C}^2$. — Ann. Math. **129** (1989), 113–149.
14. N. Shirokov, E. Zeldina (Anissova), *Bergman kernels for C^6 and H^5-smooth almost spherical domains*. — Dept. of Math. Chalmers/Göteborg University preprint series, Preprint 2001:3.
15. A. D. Thomas, *Uniform extendability of the Bergman kernel*. — Illinois J. Math. **39** no. 4 (1995), 598–607.
16. Н. А. Широков, *Вариационная формула для ядер Бергмана*. — Зап. научн. семин. ПОМИ **255** (1998), 221–243.

Zeldina E. G. Bergman kernels for almost spherical domains with H^σ-smooth boundaries.

This paper is devoted to the behavior of the Bergman kernels for almost spherical strictly pseudoconvex domains in $\mathbb{C}^n$. We find first several terms of the asymptotics for the Bergman kernel of strictly pseudoconvex domain with H^σ-smooth boundary, $4 < \sigma < 6$. New terms in comparison with the case of C^6-smooth boundary appear but the growth rate of the remainder remains the same.

С.-Петербургский государственный
университет
email lizzka@mail.ru

Поступило 9 апреля 2001 г.