Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 282, 2001 г.

**В. В. Капустин**

# НЕСАМОСОПРЯЖЕННЫЕ РАСШИРЕНИЯ СИММЕТРИЧЕСКИХ ОПЕРАТОРОВ

В этой статье предлагается подход к спектральному анализу несамосопряженных расширений симметрических операторов, основанный на результатах работы [1], посвященной спектральному анализу операторов, близких к унитарным. В [1] изучаемый почти унитарный оператор записывается как возмущение унитарного оператора специального вида:

$$T = (I - \Omega K \Omega^*)U, \tag{1}$$

где $U$ – унитарный оператор в некотором пространстве $H$, $K$ – оператор в некотором вспомогательном "дефектном" пространстве $E$, которое в нашем случае конечномерно, $\Omega$ – оператор из $E$ в $H$. В §2 настоящей статьи будут кратко перечислены наиболее важные результаты из [1]. Чтобы привести к виду (1) оператор, близкий к самосопряженному, осуществляется преобразование Кэли. Для расширений симметрических операторов имеется естественный язык – основным объектом, определяющим конструкцию, является функция Вейля. В §1 приводятся основные определения, связанные с функцией Вейля для произвольного симметрического оператора с конечными и равными дефектными индексами и строится "функциональная модель" – спектральное представление расширения Дирихле. В §3 изучаются так называемые почти разрешимые расширения; их преобразования Кэли приводятся к виду (1). В §4 аналогичные вычисления проводятся для другого специального класса расширений. В частности, результаты §4 позволяют исследовать спектральные свойства оператора $f \mapsto -\mathrm{sign} x \cdot f''$ и некоторых других похожих операторов на вещественной прямой с помощью несложной чисто технологической процедуры.

Работа частично поддержана грантом "Научные школы" No. 00-15-96-022.

## §1. Симметрические операторы

Начнем с основных определений и обозначений, см. например [2].

Пусть $l$ – симметрический оператор с плотной областью определения $\mathrm{Dom}\, l$ в гильбертовом пространстве $H$,

$$(lf, g) = (f, lg), \quad f, g \in \mathrm{Dom}\, l.$$

Будем предполагать, что оператор $l$ – *чистый*, что означает, что $l$ не имеет приводящих подпространств, на которых он действует как самосопряженный оператор. Пусть $\mathcal{L} = l^*$ – сопряженный оператор,

$$(\mathcal{L}f, g) = (f, lg), \quad f \in \mathrm{Dom}\,\mathcal{L}, \quad g \in \mathrm{Dom}\, l.$$

Исходный оператор $l$ является сужением оператора $\mathcal{L}$ на свою область определения: $l \subset \mathcal{L}$. Имеет место формула Неймана:

$$\mathrm{Dom}\,\mathcal{L} = \mathrm{Dom}\, l \dot{+} \ker(\mathcal{L} - iI) \dot{+} \ker(\mathcal{L} + iI).$$

Мы будем рассматривать операторы, для которых

$$\dim\ker(\mathcal{L} - iI) = \dim\ker(\mathcal{L} + iI) < \infty.$$

Совокупность $(H, \Gamma, \Gamma')$, в которой $\Gamma, \Gamma'$ – линейные отображения из $\mathrm{Dom}\,\mathcal{L}$ во вспомогательное гильбертово пространство $E$, называется *пространством граничных значений*, если отображение $f \mapsto \Gamma f \oplus \Gamma' f$ из $\mathrm{Dom}\,\mathcal{L}$ в $E \oplus E$ сюръективно, и для любых $f, g \in \mathrm{Dom}\,\mathcal{L}$

$$(\mathcal{L}f, g) - (f, \mathcal{L}g) = (\Gamma' f, \Gamma g) - (\Gamma f, \Gamma' g). \tag{2}$$

Область определения оператора $l$ есть множество

$$\mathrm{Dom}\, l = \{f \in \mathrm{Dom}\,\mathcal{L} : \Gamma f = \Gamma' f = 0\}.$$

Здесь и далее $\mu$ обозначает комплексное число такое, что $\mathrm{Im}\,\mu \neq 0$. Отображение $f \mapsto \Gamma f$ является взаимно-однозначным соответствием между пространствами $\ker(\mathcal{L} - \mu I)$ и $E$. Это позволяет определить *функцию Вейля* $M$ соотношением

$$\Gamma' f = M(\mu)\Gamma f, \quad f \in \ker(\mathcal{L} - \mu I),$$

значения которой – операторы в $E$. Функция $M$ – аналитическая в областях $\{\mu : \mathrm{Im}\,\mu > 0\}$ и $\{\mu : \mathrm{Im}\,\mu < 0\}$; при этом $M(\bar{\mu}) = M(\mu)^*$, и $\operatorname{Im} M(\mu) = \frac{1}{2i}(M(\mu) - M(\mu)^*)$ – неотрицательный оператор при $\operatorname{Im}\mu > 0$. Доказательства всех этих свойств непосредственно вытекают из определений, ключевую роль при этом играет соотношение (2).

Обозначим через $L_\infty$ *расширение Дирихле* оператора $l$:

$$L_\infty f = \mathcal{L} f, \quad f \in \operatorname{Dom} L_\infty = \{g \in \operatorname{Dom}\mathcal{L} : \Gamma g = 0\}.$$

Тогда $L_\infty$ – самосопряженный оператор. Его спектральная мера может быть вычислена через функцию Вейля таким же образом, как это делается для оператора Шредингера с вещественным потенциалом на полуоси. Нам удобнее работать на единичной окружности, чем на вещественной прямой; поэтому мы построим спектральную меру унитарного оператора $U$ – преобразования Кэли оператора $L_\infty$,

$$U = (L_\infty - iI)(L_\infty + iI)^{-1}. \tag{3}$$

Функция $\lambda \mapsto M\left(i\frac{1+\lambda}{1-\lambda}\right)$, значения которой – операторы в $E$, имеет неотрицательную мнимую часть в единичном круге. Следовательно, существует неотрицательная операторнозначная мера $\mathcal{W}$ на единичной окружности (которую можно понимать так: существуют скалярная положительная мера $\nu$ на окружности и семейство неотрицательных операторов $W(z) : E \to E$, заданных $\nu$-почти всюду; $d\mathcal{W}(z) = W(z)d\nu(z)$), причем

$$\operatorname{Im} M\left(i\frac{1+\lambda}{1-\lambda}\right) = \int \frac{1-|\lambda|^2}{|z-\lambda|^2}\, d\mathcal{W}(z), \quad |\lambda| < 1. \tag{4}$$

Гармоническая функция $\operatorname{Im} M\left(i\frac{1+\lambda}{1-\lambda}\right)$ является мнимой частью аналитической функции $M\left(i\frac{1+\lambda}{1-\lambda}\right)$, для которой имеет место формула

$$i\left(\operatorname{Re} M(i) - M\left(i\frac{1+\lambda}{1-\lambda}\right)\right) = \int \frac{z+\lambda}{z-\lambda}\, d\mathcal{W}(z). \tag{5}$$

В левой части возникает слагаемое $\operatorname{Re} M(i)$, так как при $\lambda = 0$ правая часть представляет собой неотрицательный оператор.

**Теорема 1.** *Пусть $l$ – чистый симметрический оператор в пространстве $H$, $\mathcal{L} = l^*$, $E$ – конечномерное гильбертово пространство, и тройка $(H, \Gamma, \Gamma')$, где $\Gamma, \Gamma' : \operatorname{Dom}\mathcal{L} \to E$, определяет* *пространство граничных значений. Пусть $M$ – соответствующая функция Вейля, а $\mathcal{W}$ – операторнозначная мера на единичной окружности, для которой имеет место формула* (4).

*Тогда пространство $H$ можно отождествить с пространством $L^2(\mathcal{W})$ $E$-значных функций (скалярное произведение в котором задается формулой $(f,g) = \int (W(z)f(z), g(z))d\nu(z)$, если $d\mathcal{W}(z) = W(z)d\nu(z)$). При этом отождествлении подпространству $\ker(\mathcal{L}+iI)$ соответствует пространство $\{f(z) \equiv e : e \in E\}$, а $\ker(\mathcal{L}-iI)$ переходит в подпространство $\{f(z) \equiv \bar{z}e : e \in E\}$; если $h \in H$, $h \in \ker(\mathcal{L} \pm iI)$, то для соответствующего вектора $e$ имеем $e = \Gamma h$. Оператору $L_\infty$ соответствует оператор умножения на $i\frac{1+z}{1-z}$, а его преобразованию Кэли – оператору $U$ – оператор умножения на $z$.*

Здесь мы не приводим доказательства этой теоремы. Его можно получить по аналогии с вычислением спектральной меры расширения Дирихле оператора Шредингера на полуоси в терминах функции Вейля. Другой способ состоит в вычислении характеристической функции операторов $L_B$ (см. §3) при $B = M(i)$, которая совпадает с характеристической функцией соответствующего оператора в пространстве $L^2(\mathcal{W})$ (преобразованием Кэли которого является суперпозиция умножения на $z$ с ортопроектором на ортогональное дополнение к подпространству постоянных функций); совпадение характеристических функций равносильно унитарной эквивалентности операторов, и остается аккуратно проверить дополнительные свойства изучаемого отождествления.

Определим оператор $\Omega : E \to H$,

$$\Omega E \subset \ker(\mathcal{L}+iI), \qquad \Gamma\Omega e = e \quad (e \in E). \tag{6}$$

Тогда

$$\Omega^*\Omega = \operatorname{Im} M(i). \tag{7}$$

Действительно, для $e_1, e_2 \in E$ имеем

$$\begin{aligned}
&-2i(\Omega^*\Omega e_1, e_2) = (-i\Omega e_1, \Omega e_2) - (\Omega e_1, -i\Omega e_2) = \\
&= (\mathcal{L}\Omega e_1, \Omega e_2) - (\Omega e_1, \mathcal{L}\Omega e_2) = (\Gamma'\Omega e_1, \Gamma\Omega e_2) - (\Gamma\Omega e_1, \Gamma'\Omega e_2) = \\
&= (M(i)^*\Gamma\Omega e_1, \Gamma\Omega e_2) - (\Gamma\Omega e_1, M(i)^*\Gamma\Omega e_2) = -2i(\operatorname{Im} M(i) e_1, e_2).
\end{aligned}$$

Воспользуемся отождествлением, построенным в теореме 1, и будем считать, что $H = L^2(\mathcal{W})$. Тогда $\Omega e \equiv e$ $(e \in E)$,

$$\Omega^* h = \int h(z) d\mathcal{W}(z), \quad h \in L^2(\mathcal{W}).$$

Отсюда следует, что

$$\Omega^*(U - \lambda I)^{-1} U h = \int \frac{z\, h(z)}{z - \lambda}\, d\mathcal{W}(z). \tag{8}$$

Теперь построим функцию $\Phi$, $\Phi(\lambda) = \Omega^*(U - \lambda I)^{-1} U \Omega$. С помощью отождествления из теоремы 1 и формул (5) и (7) получаем:

$$\begin{aligned} \Phi(\lambda) &= \frac{1}{2}(\Omega^*(U - \lambda I)^{-1}(U + \lambda I)\Omega + \Omega^*\Omega) = \\ &= \frac{1}{2}\left(\int \frac{z + \lambda}{z - \lambda}\, d\mathcal{W}(z) + \operatorname{Im} M(i)\right) = \\ &= \frac{1}{2}\left(i\left(\operatorname{Re} M(i) - M\left(i\frac{1+\lambda}{1-\lambda}\right)\right) + \operatorname{Im} M(i)\right) = \\ &= \frac{i}{2}\left(M(i)^* - M\left(i\frac{1+\lambda}{1-\lambda}\right)\right). \end{aligned} \tag{9}$$

## §2. Спектральный анализ операторов, близких к унитарным

Здесь будут приведены основные результаты работы [1]. Пусть $T : H \to H$ – почти унитарный оператор, т.е. $T$ является ядерным возмущением некоторого унитарного оператора, и спектр оператора $T$ не покрывает единичного круга. В этой статье всегда будут использоваться результаты только для случая, когда $T$ – возмущение унитарного оператора оператором конечного ранга. Предположим, что $T$ записывается в виде (1), $T = (I - \Omega K \Omega^*)U$, где $E$ – конечномерное гильбертово пространство, $K : E \to E$ и $\Omega : E \to H$ – некоторые операторы. Пусть $U = U_{ac} \oplus U_s$ – разложение оператора $U$ в прямую сумму его абсолютно непрерывной ($U_{ac}$) и сингулярной ($U_s$) частей. *Сингулярное пространство* $H_s(T)$ оператора $T$ состоит из всех векторов $h$ таких, что слабая резольвента $((T - \lambda I)^{-1} h, f)$ не имеет скачка почти всюду на единичной окружности при всех $f \in H$.

*Сингулярная часть* $T_s$ есть сужение оператора $T$ на его сингулярное подпространство: $T_s = T\big|_{H_s(T)}$. Функции $\Phi$ и $F$, значения которых – операторы в $E$, определяются формулами

$$\Phi(\lambda) = \Omega^*(U - \lambda I)^{-1}U\Omega, \quad F(\lambda) = (I - K\Phi(\lambda))^{-1}K.$$

Для $h \in H$ положим

$$(Rh)(\lambda) = \Omega^*(U - \lambda I)^{-1}Uh, \quad |\lambda| \neq 1.$$

Граничные значения функций $\Phi, F$ и $Rh$ $(h \in H)$ изнутри единичного круга и извне определены корректно почти всюду относительно меры Лебега $m$ и будут обозначаться соответственно через $\Phi_+$, $\Phi_-$; $F_+$, $F_-$; $R_+h$, $R_-h$. Если рассмотреть спектральное представление $H_{ac} = \int \oplus H(z)dm(z)$ для оператора $U_{ac}$, то можно определить операторы $\Omega(z) : E \to H(z)$ соотношениями $\Omega(z)e = (\Omega e)(z)$ при $m$-почти всех $z$, где $e \in E$.

Для $h \in H$ определим функции $\mathcal{X}h$, $\mathcal{Y}h$ на единичной окружности формулами

$$\begin{aligned} (\mathcal{X}h)(z) &= h(z) + \Omega(z)F_+(z)(R_+h)(z), \\ (\mathcal{Y}h)(z) &= h(z) - \Omega(z)F_-^*(z)(R_+h)(z). \end{aligned} \tag{10}$$

Это – $H(z)$-значные функции, определенные $m$-почти всюду для каждого $h \in H$.

В [1] доказана следующая теорема.

**Теорема 2.** *В обозначениях этого параграфа следующие утверждения равносильны.*

1) *Оператор $T$ подобен прямой сумме $U_{ac} \oplus T_s$.*

2) *Оператор $T$ подобен прямой сумме некоторого абсолютно непрерывного унитарного оператора и некоторого сингулярного (не обязательно унитарного) оператора.*

3) *Существуют ограниченные операторы $X : H \to H_{ac}$ и $Y : H_{ac} \to H$ такие, что*

$$XT = U_{ac}X, \quad TY = YU_{ac} \quad \text{и} \quad XY = I.$$

4) *Отображения $\mathcal{X}$ и $\mathcal{Y}$ – ограниченные операторы из $H$ в $H_{ac}$.*

В следующих двух параграфах эта теорема будет применена к широкому классу расширений симметрических операторов для проверки подобия их абсолютно непрерывных частей самосопряженным оператором. Чтобы применить теорему 2, нужно вычислить все выражения, приведенные в этом параграфе, для преобразований Кэли изучаемых операторов. Для проверки подобия затем нужно проверить выполнение свойства 4) теоремы 2.

## §3. Почти разрешимые расширения

Пусть для симметрического оператора $l$, рассматривавшегося в §1 настоящей статьи, определено пространство граничных значений $\{H, \Gamma, \Gamma'\}$. Расширение $L = L_B$ оператора $l$ называется *почти разрешимым* (относительно пары отображений $\Gamma, \Gamma'$), если его область определения имеет вид

$$\operatorname{Dom} L = \{f \in \operatorname{Dom} \mathcal{L} : \Gamma' f = B\Gamma f\},$$

где $B$ – некоторый оператор в пространстве $E$. Тогда $L = \mathcal{L}\big|_{\operatorname{Dom} L}$. Пусть $L_\infty$ – расширение Дирихле, и $U$ – его преобразование Кэли (3); оператор $\Omega$ задан соотношениями (6). Обозначим через $T$ преобразование Кэли оператора $L$:

$$T = (L - iI)(L + iI)^{-1}.$$

Оказывается, *оператор $T$ может быть записан в виде* (1). Действительно, легко проверить, что на ортогональном дополнении к ядру $\ker(\mathcal{L} - iI)$, которое совпадает с образом оператора $l + iI$, действие операторов $T$ и $U$ одинаково, а именно, $(l+iI)h$ отображается на $(l - iI)h$, $h \in H$. Для оставшейся части доказательства формулы (1) воспользуемся следующей леммой.

**Лемма 3.** *Пусть $\mu_1, \mu_2$ – комплексные числа. Предположим, что $L$ – расширение оператора $l$, $l \subset L \subset \mathcal{L}$, и $\mu_2$ не является точкой спектра оператора $L$. Если $h \in \ker(\mathcal{L} - \mu_1 I)$, то*

$$f = (L - \mu_1 I)(L - \mu_2 I)^{-1} h \in \ker(\mathcal{L} - \mu_2 I).$$

*Кроме того, для $L = L_B$ имеем*

$$\Gamma f = (B - M(\mu_2))^{-1}(B - M(\mu_1))\Gamma h; \tag{11}$$

*если же $L = L_\infty$, то $\Gamma f = \Gamma h$.*

**Доказательство.** Имеем

$$\begin{aligned}(\mathcal{L} - \mu_2 I)f &= (\mathcal{L} - \mu_2 I)(L - \mu_1 I)(L - \mu_2 I)^{-1} h = \\ &= (\mathcal{L} - \mu_2 I)(L - \mu_2 I)(L - \mu_2 I)^{-1} h + (\mathcal{L} - \mu_2 I)(\mu_2 - \mu_1)(L - \mu_2 I)^{-1} h = \\ &= (\mathcal{L} - \mu_2 I)h + (\mu_2 - \mu_1)h = (\mathcal{L} - \mu_1 I)h = 0,\end{aligned}$$

откуда $f \in \ker(\mathcal{L} - \mu_2 I)$. Если $L = L_B$, то

$$f - h = (\mu_2 - \mu_1)(L - \mu_2 I)^{-1} h \in \operatorname{Dom} L,$$

и следовательно, $\Gamma'(f - h) = B\Gamma(f - h)$. По определению функции Вейля имеем $\Gamma' h = M(\mu_1)\Gamma h$ и $\Gamma' f = M(\mu_2)\Gamma f$. Таким образом,

$$B\Gamma(f - h) = \Gamma' f - \Gamma' h = M(\mu_2)\Gamma f - M(\mu_1)\Gamma h,$$

то есть $(B - M(\mu_2))\Gamma f = (B - M(\mu_1))\Gamma h$, откуда следует (11). Для случая $L = L_\infty$ аналогично получаем $f - h \in \operatorname{Dom} L_\infty$, что и означает, что $\Gamma f = \Gamma h$. $\square$

Продолжим проверку формулы (1). Остается рассмотреть случай, когда $h \in \ker(\mathcal{L} - iI)$, и для таких $h$ нужно проверить, что $Th = (I - \Omega K \Omega^*) U h$. Из леммы 3 вытекает, что

$$Uh = (L_\infty - iI)(L_\infty + iI)^{-1} h \in \ker(\mathcal{L} + iI) \quad \text{и} \quad \Gamma U h = \Gamma h,$$

а также что

$$Th = (L - iI)(L + iI)^{-1} h \in \ker(\mathcal{L} + iI)$$

и

$$\Gamma T h = (B - M(i)^*)^{-1}(B - M(i))\Gamma h.$$

Таким образом, обе части соотношения $Th = (I - \Omega K \Omega^*) U h$ лежат в $\ker(\mathcal{L} + iI)$, а поэтому, чтобы доказать это равенство, достаточно проверить, что

$$\Gamma T h = \Gamma(I - \Omega K \Omega^*) U h,$$

или

$$(B - M(i)^*)^{-1}(B - M(i))\Gamma h = \Gamma U h - \Gamma \Omega K \Omega^* U h.$$

Поскольку $\Gamma U h = \Gamma h$ и $\Gamma \Omega = I$, последнее соотношение равносильно равенству

$$K \Omega^* U h = \Gamma h - (B - M(i)^*)^{-1}(B - M(i))\Gamma h.$$

Правая часть равна $(B - M(i)^*)^{-1} \cdot 2i \operatorname{Im} M(i) \Gamma h$, и с учетом формулы (7) остается показать, что

$$K \Omega^* U h = 2i (B - M(i)^*)^{-1} \Omega^* \Omega \Gamma h.$$

Поскольку $h \in \ker(\mathcal{L} - iI)$, с помощью леммы 3 и соотношения (3) получаем, что $\Omega\Gamma h = Uh$, и требуемое соотношение, очевидно, выполнено для

$$K = 2i(B - M(i)^*)^{-1}.$$

Напомним, что функция $\Phi$ задается формулой (9). Согласно схеме, изложенной в §2, требуется вычислить функцию $F$, $F(\lambda) = (I - K\Phi(\lambda))^{-1}K$. Имеем

$$I - K\Phi(\lambda) = I - 2i(B - M(i)^*)^{-1} \cdot \frac{i}{2}\left(M(i)^* - M\left(i\frac{1+\lambda}{1-\lambda}\right)\right) = \\ = (B - M(i)^*)^{-1}\left(B - M\left(i\frac{1+\lambda}{1-\lambda}\right)\right),$$

и, следовательно,

$$F(\lambda) = \left(B - M\left(i\frac{1+\lambda}{1-\lambda}\right)\right)^{-1}(B - M(i)^*) \cdot 2i(B - M(i)^*)^{-1} = \\ = 2i\left(B - M\left(i\frac{1+\lambda}{1-\lambda}\right)\right)^{-1}. \quad (12)$$

Для функции $Rh$ из §2 по формуле (8) имеем

$$(Rh)(\lambda) = \int \frac{zh(z)}{z-\lambda}\, d\mathcal{W}(z), \quad (13)$$

где $h(z)$ – значения функции из пространства $L^2(\mathcal{W})$, соответствующей вектору $h$ в смысле отождествления из теоремы 1. Согласно теореме 1, все операторы $\Omega(z)$ равны тождественному оператору: $\Omega(z) \equiv I$.

Теперь *условие* (4) *теоремы* 1 *переписывается следующим образом: операторы $\mathcal{X}$ и $\mathcal{Y}$ ограничены тогда и только тогда, когда ограничены отображения из пространства $L^2(\mathcal{W})$ в его абсолютно непрерывную часть – пространство $L^2(\mathcal{W}_{ac})$ $E$-значных функций, сопоставляющие функции $h \in L^2(\mathcal{W})$ граничные значения функции $Rh$ изнутри круга (см. формулу* (13)*), умноженные (слева) на функции $F_+$ и $F_-^*$ соответственно*, где $F_+$ и $F_-$ – граничные значения функции $F$, заданной формулой (12), соответственно изнутри и извне единичного круга.

## §4. Гладкая склейка пары пространств

Этот параграф посвящен изучению оператора $L$, действующего в прямой сумме двух пространств. Пусть имеются два симметрических оператора $l_+$ и $l_-$ в некоторых пространствах $H_+$ и $H_-$ соответственно. Будем использовать все построения из §1; при этом индексы $+$ и $-$ будут обозначать объекты, относящиеся к операторам $l_+$ и $l_-$ соответственно. При этом предположим только, что пространство $E$ для обоих операторов одинаковое: $E = E_+ = E_-$. Область определения оператора $L$ задается следующим образом:

$$\operatorname{Dom} L = \{f_+ \oplus f_- \in \operatorname{Dom} l_+ \oplus \operatorname{Dom} l_- : \Gamma_+ f_+ = \Gamma_- f_-, \Gamma'_+ f_+ = \Gamma'_- f_-\}.$$

Очевидно, это расширение не является почти разрешимым относительно пары отображений $\Gamma = \Gamma_+ \oplus \Gamma_-$, $\Gamma' = \Gamma'_+ \oplus \Gamma'_-$. Изучение оператора $L$ может быть сведено к результатам §3 с помощью модификации отображений $\Gamma$ и $\Gamma'$. Однако представляется небесполезным иметь формулы непосредственно через указанные операторы $\Gamma$ и $\Gamma'$, т.е. в терминах функций Вейля $M_+$ и $M_-$.

Имеют место формулы, аналогичные формуле (9):

$$\Phi_\pm(\lambda) = \frac{i}{2}\left(M_\pm(i)^* - M_\pm\left(i\frac{1+\lambda}{1-\lambda}\right)\right);$$

тогда

$$\Phi(\lambda) = \Phi_+(\lambda) \oplus \Phi_-(\lambda).$$

Найдем формулы для $K$. Воспользуемся отождествлениями, построенными в теореме 1: исходное пространство $H = H_+ \oplus H_-$ отождествляется с $L^2(\mathcal{W}_+) \oplus L^2(\mathcal{W}_-)$. Возьмем

$$a = \bar{z}a_+ \oplus \bar{z}a_- \in \ker(\mathcal{L} - iI),$$
$$b = b_+ \oplus b_- \in \ker(\mathcal{L} + iI).$$

Найдем оператор $K$ в пространстве $E \oplus E$, для которого $(I - \Omega K \Omega^*)U = T = (L+iI)^{-1}(L-iI)$. Соотношение $(L+iI)^{-1}(L-iI)a = b$ переписывается как $L(a-b) = i(a+b)$, откуда $a - b \in \operatorname{Dom} L$. Ясно, что

$$\Gamma a = a_+ \oplus a_-, \quad \Gamma' a = M_+(i)a_+ \oplus M_-(i)a_-,$$

$$\Gamma b = b_+ \oplus b_-, \quad \Gamma' b = M_+(i)^* b_+ \oplus M_-(i)^* b_-.$$

Условие $a-b \in \operatorname{Dom} L$ переписывается как

$$a_+ - b_+ = a_- - b_-, \quad M_+(i)a_+ - M_+(i)^* b_+ = M_-(i)a_- - M_-(i)^* b_-.$$

Отсюда $b_+, b_-$ выражаются через $a_+, a_-$:

$$\begin{aligned} b_+ &= (M_+(i)^* - M_-(i)^*)^{-1}((M_+(i) - M_-(I)^*)a_+ - 2i \operatorname{Im} M_-(i)a_-) \\ b_- &= (M_+(i)^* - M_-(i)^*)^{-1}(2i \operatorname{Im} M_+(i)a_+ + (M_+(i)^* - M_-(i))a_-). \end{aligned}$$

Теперь

$$b_+ \oplus b_- = (I - \Omega K \Omega^*)Ua = (a_+ \oplus a_-) - K(\operatorname{Im} M_+(i)a_+ \oplus \operatorname{Im} M_-(i)a_-).$$

Положим

$$N(\mu) = (M_+(\mu) - M_-(\mu))^{-1}.$$

Имеем

$$K \begin{pmatrix} \operatorname{Im} M_+(i) & 0 \\ 0 & \operatorname{Im} M_-(i) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_+ \\ a_- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_+ \\ a_- \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} b_+ \\ b_- \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} a_+ \\ a_- \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} N(i)^* & 0 \\ 0 & N(i)^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M_+(i) - M_-(i)^* & -2i \operatorname{Im} M_-(i) \\ 2i \operatorname{Im}_+(i) & M_+(i)^* - M_-(i) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_+ \\ a_- \end{pmatrix} =$$

$$= 2i \begin{pmatrix} N(i)^* & 0 \\ 0 & N(i)^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\operatorname{Im} M_+(i) & \operatorname{Im} M_-(i) \\ -\operatorname{Im} M_+(i) & \operatorname{Im} M_-(i) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_+ \\ a_- \end{pmatrix},$$

откуда

$$K = 2i \begin{pmatrix} N(i)^* & 0 \\ 0 & N(i)^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Для функции $F(\lambda) = (I - K\Phi(\lambda))^{-1}K$ имеем формулу

$$F(\lambda) = 2i \begin{pmatrix} N\left(i\frac{1+\lambda}{1-\lambda}\right) & 0 \\ 0 & N\left(i\frac{1+\lambda}{1-\lambda}\right) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \tag{14}$$

подробное вычисление которой здесь не приводится.

Продолжим вычисления для оператора $(Lf)(x) = -\operatorname{sign} x \cdot f''(x)$ в пространстве $L^2$ на вещественной оси. Его область определения есть множество $\{f \in L^2 : f'' \in L^2\}$. В [3] доказано, что этот оператор подобен самосопряженному. Здесь приводится доказательство в рамках нашего подхода.

В качестве $H_+$ и $H_-$ возьмем пространства $L^2$ на полуосях $\{x \geqslant 0\}$ и $\{x \leqslant 0\}$ соответственно. Области определения операторов $l_+$ и $l_-$ имеют одинаковый вид $\{f \in L^2 : f'' \in L^2,\ f(0) = f'(0) = 0\}$ для обеих полуосей. Операторы $\mathcal{L}_+$ и $\mathcal{L}_-$ имеют вид $\mathcal{L}_+ f = -f''$ на полуоси $\{x \geqslant 0\}$, $\mathcal{L}_- f = f''$ при $\{x \leqslant 0\}$, а функции из их областей определения для каждой из полуосей принимают любые значения $f(0)$ и $f'(0)$. В качестве граничных операторов для каждой из полуосей можно взять операторы $\Gamma_\pm f = f(0)$, $\Gamma'_\pm f = f'(0)$, $f \in \operatorname{Dom} \mathcal{L}_\pm$. Легко проверить, что для них имеет место формула (2). Пусть $\mu$ – комплексное число, $\operatorname{Im}\mu \neq 0$. Обозначение $\sqrt{\mu}$ будет использоваться для квадратного корня из $\mu$, для которого $\operatorname{Re}\sqrt{\mu} > 0$. Решение уравнения $\mathcal{L}_+ f = \mu f$, лежащее в $L^2$, имеет вид $f_\mu(z) = \exp(i\sqrt{\mu}x)$, $x \geqslant 0$. Следовательно,

$$M_+(\mu) = \frac{f'_\mu(0)}{f_\mu(0)} = i\sqrt{\mu}.$$

Аналогично, для отрицательной полуоси имеем $f_\mu(x) = \exp(\sqrt{\mu}x)$, откуда

$$M_-(\mu) = \sqrt{\mu}.$$

Построим меры $\mathcal{W}_+$ и $\mathcal{W}_-$ с помощью формулы (4). Абсолютно непрерывная часть меры $\mathcal{W}$ восстанавливается через граничные значения функции $M$. Положим $w(z) = \left|i\frac{1+z}{1-z}\right|^{1/2}$, где $|z| = 1$. Тогда для мер

$$d\mathcal{W}_+(z) = \begin{cases} w(z)dm(z), & \operatorname{Im} z < 0 \\ 0, & \operatorname{Im} z > 0 \end{cases}$$

и

$$d\mathcal{W}_-(z) = \begin{cases} 0, & \operatorname{Im} z < 0 \\ w(z)dm(z), & \operatorname{Im} z > 0 \end{cases}$$

имеем аналоги формулы (4) для функций Вейля $M_+$ и $M_-$, то есть сингулярные части у мер $\mathcal{W}_+$ и $\mathcal{W}_-$ отсутствуют. Таким образом, пространство $L^2$ на вещественной оси отождествляется с весовым пространством $L^2(w)$ на единичной окружности, причем правой и левой полуосям соответствуют нижняя и верхняя полуокружности.

Пространство $E$ двумерно и полагается равным $\mathbb{C}^2$: первая координата будет соответствовать полуоси $\{x \geqslant 0\}$ и нижней полуокружности, а вторая – отрицательной полуоси и верхней полуокружности. Формула (13) для функции $R$ переписывается как

$$(Rh)(\lambda) = \begin{pmatrix} \int_{\operatorname{Im} z<0} \frac{h(z)w(z)dm(z)}{1-\lambda\bar z} \\ \int_{\operatorname{Im} z>0} \frac{h(z)w(z)dm(z)}{1-\lambda\bar z} \end{pmatrix}, \quad h \in L^2(w);$$

для оператора $\Omega : \mathbb{C}^2 \to L^2(w)$ имеем

$$\left[\Omega \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}\right](z) = [\Omega(z)] \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{cases} c_1, & \operatorname{Im} z < 0 \\ c_2, & \operatorname{Im} z > 0. \end{cases}$$

Для функции $N$ имеем $N(\mu) = ((i-1)\sqrt{\mu})^{-1}$; поэтому формула (14) для функции $F$ принимает вид

$$F(\lambda) = \frac{1-i}{\sqrt{i\frac{1+\lambda}{1-\lambda}}} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Остается построить операторы $\mathcal{X}$ и $\mathcal{Y}$ (10) по этим формулам. Так как сингулярное пространство оператора $L$ нулевое, для доказательства подобия оператора $L$ оператору умножения на независимую переменную в пространстве $L^2$ на вещественной оси нужно показать, что операторы $\mathcal{X}$ и $\mathcal{Y}$ ограничены. Ясно, что ограниченность любого из операторов $\mathcal{X}, \mathcal{Y}$ равносильна ограниченности отображения, сопоставляющего функции $h \in L^2(w)$ функцию

$$\Omega(z) \frac{1-i}{\sqrt{i\frac{1+\lambda}{1-\lambda}}} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} (R_+h)(z)$$

в пространстве $L^2(w)$. Так как $\left|\sqrt{i\frac{1+z}{1-z}}\right| = w(z)$, а компоненты векторнозначной функции $R_+h$ совпадают с сужениями функции $P_+(hw)$ на нижнюю и верхнюю полуокружности, где $P_+$ – проектор Рисса, легко видеть, что требуемое условие состоит в ограниченности оператора $h \mapsto \frac{P_+(hw)}{w}$ в пространстве $L^2(w)$. Последнее условие равносильно ограниченности проектора Рисса $P_+$ в пространстве $L^2(w^{-1})$, так как умножение на $w$ представляет собой унитарный оператор из $L^2(w)$ на $L^2(w^{-1})$, а деление на $w$ – обратный к нему оператор.

Проектор $P_+$ в пространстве $L^2(w^{-1})$ ограничен, так как для него легко проверяются классические условия Макенхаупта и

Хельсона–Сёге; следовательно, оператор $f \mapsto -\mathrm{sign}x \cdot f''(x)$ подобен оператору умножения на независимую переменную в пространстве $L^2$ на вещественной оси.

## Литература


1. В. В. Капустин, *Спектральный анализ почти унитарных операторов.* Алгебра и анализ, **13**, вып. 5 (2001), 44–68.
2. В. А. Деркач, М. М. Маламуд, *Характеристические функции почти разрешимых расширений эрмитовых операторов.* Укр. мат. журн., **44**, вып. 4 (1992), 435–459.
3. B. Curgus, B. Najman, *The operator* $(\mathrm{sgn}x)\frac{d^2}{dx^2}$ *is similar to a selfadjoint operator in* $L^2(\mathbb{R})$. Proc. Amer. Math. Soc., **123** (1995), 1125–1128.



Kapustin V. V. Nonselfadjoint extensions of symmetric operators.

A previous result of the author about almost unitary operators is applied to the spectral analysis of nonselfadjoint extensions of symmetric operators. With this aim in view, the Cayley transform of such an extension is written as a perturbation of a unitary operator by a finite rank operator of a special form in terms of the Weyl function.



Санкт-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН
kapustin@ pdmi.ras.ru


Поступило 28 октября 2001 г.