Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 282, 2001 г.

А. М. Коточигов

ЭФФЕКТ ПОВЫШЕНИЯ ГЛАДКОСТИ ДЛЯ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

§1. Введение

В работе исследуется влияние строения области в комплексной плоскости на гладкость аналитических функций, заданных в этой области и имеющих гладкое продолжение на ее замыкание. В рамках решения задачи свободной интерполяции для аналитических классов Гёльдера автор обнаружил эффект повышения гладкости следов аналитической функции в окрестности точки внутреннего заострения [1]. Отправным моментом здесь является простой вариант теоремы о стирании особенностей [2], гарантирующей, что функция, аналитическая в области с разрезом по отрезку и непрерывная в замыкании этой области, является аналитической в области без разреза. Повышение гладкости можно ожидать и в областях с более сложной структурой всякий раз, когда в окрестности некоторой граничной точки содержится "очень мало" точек из её дополнения. Необходимость рассматривать такие вопросы возникла у автора и Н. А. Широкова в цикле исследований задачи свободной интерполяции [3, 4], правильная постановка которой предполагает наличие априорных оценок для гладкости следов аналитических функций на достаточно редком множестве. В описанной ситуации естественной техникой исследования гладкости является формула Коши–Грина [5] и анализ соответствующих интегралов по дополнению области аналитичности. Не претендуя на решение вопроса в целом, мы ограничимся спиралевидными областями.

Основной результат работы составляют оценки следующего вида.

Пусть функция f аналитична в области, являющейся спиралью, и такова, что в замыкании области она принадлежит классу Гёльдера с показателем α. Тогда справедлива оценка

$$|f(a)-f(b)| \le C\|f\| \left(|a-b| + \Delta_A^\alpha \log \frac{|a-b|}{d_a+\Delta_A} + \Delta_B^\alpha \log \frac{|a-b|}{d_b+\Delta_B} \right);$$

здесь a, b – точки спирали, d_a – расстояние от точки a до границы спирали, Δ_A – ширина ближайшего к точке a витка дополнительной спирали (и аналогично для точки b).

Приведенная оценка будет доказана для некоторого класса спиралей с достаточно регулярным поведением, позволяющем, например, говорить о ширине витка спирали. Более того, вид оценки может несколько меняться в зависимости от параметра, определение которого будет дано ниже. Мы привели ту из оценок, в которой этот параметр не появляется. Все необходимые определения будут приведены ниже.

Заметим предварительно, что приведенная выше оценка корректна, т.е. не хуже уже существующей оценки для класса Гельдера

$$\begin{gathered} \Delta^\alpha \log \frac{|a-b|}{d+\Delta} \\ = |a-b|^\alpha \left(\frac{\Delta}{d+\Delta}\right)^\alpha \left(\frac{d+\Delta}{|a-b|}\right)^\alpha \log \frac{|a-b|}{d+\Delta} \le |a-b|^\alpha, \end{gathered} \tag{1.1}$$

мы считаем здесь, что $d+\Delta \le |a-b|$.

§2. Описание спиралей и формулировка основного результата

Мы ограничимся рассмотрением спиралей, у которых диаметры витков убывают как геометрическая прогрессия. Конкретный вид прогрессии влияет только на постоянные в оценках, и мы ограничимся спиралями, одну из границ которых образует кривая (одномерная спираль) $\{w = \exp(-2\pi(1+i)x) : 0 \le x < \infty\}$. Заметим, что отображение $w = \exp(-2\pi(1+i)z)$ переведет наклонную полосу $\{z : \operatorname{Im} z > 0, \operatorname{Im} z > \operatorname{Re} z > 1 + \operatorname{Im} z\}$ в единичный круг с разрезом по спирали.

Основной объект наших рассмотрений – *спиралевидные области* (в дальнейшем – *спирали*) определяются теперь как образ некоторого подмножества наклонной полосы

$$S = \{w = \exp(-2\pi z) : \operatorname{Im} z > 0, \operatorname{Im} z < \operatorname{Re} z < h(\operatorname{Re} z) + \operatorname{Im} z\};$$

здесь $h : \mathrm{R}_+ \to (0,1)$ – функция ширины полосы; чтобы оставаться внутри круга, будем считать дополнительно, что $h(x) < x$.

Важную роль в анализе задачи будет играть *дополнительная спираль*

$$S^* = \{w = \exp(-2\pi z) : \operatorname{Im} z > 0, h(\operatorname{Re} z) + \operatorname{Im} z < \operatorname{Re} z < 1 + \operatorname{Im} z\}.$$

Витком спирали мы будем называть множество

$$S_n = \{w = \exp(-2\pi z) : n-1 \le \operatorname{Im} z \le n, \operatorname{Im} z < \operatorname{Re} z < h(\operatorname{Re} z) + \operatorname{Im} z\}.$$

Введем следующую характеристику спирали: *ширина витка* S_n вдоль луча $\{w = \exp(-i2\pi c) : 0 \le c \le 1\}$ – это длина отрезка пересечения наклонной полосы и прямой $\operatorname{Im} z = n + c$:

$$\delta(n+c) = |\exp(-2\pi((n+c-h(n+c)+i(n+c)))-$$

$$-\exp(-2\pi((n+c)(1+i))| = \exp(-2\pi(n+c))\,(\exp(2\pi h(n+c)) - 1)\,.$$

Аналогично определим *ширину перешейка*, т.е. ширину витка дополнительной спирали

$$\Delta(n+c) = \exp(-2\pi(n+c))\,(1 - \exp(-2\pi(1-h(n+c))))\,.$$

Введем классификацию спиралей.
Будем называть спираль *обычной*, если $0 < c_1 < h(x) < c_2 < 1$.
Если $\lim_{x\to\infty} h(x) = 0$, то назовем спираль *узкой*.
Если же $\lim_{x\to\infty} h(x) = 1$, то назовем спираль *широкой*.

Геометрическая скорость убывания диаметров витков спирали гарантирует, что обычные спирали являются областями Лаврентьева (т.е. дуги на границе области имеют длины, эквивалентные длинам стягивающих их хорд), узкие спирали имеют внешнее заострение, а широкие – внутреннее заострение. Напомним, что задача свободной интерполяции в аналитических классах Гёльдера, послужившая импульсом к рассмотрению вопроса о повышении гладкости, полностью решена для областей Лаврентьева в работе Н. А. Широкова и автора [3]. Для внешнего заострения, представляющего собой "прямолинейное" заострение с простым аналитическим описанием, задача свободной интерполяции решена в работе тех же авторов [4]. Заметим, что работа автора [6] дает технические средства, позволяющие перенести результаты статьи [4] на любые узкие спирали. Для широких спиралей ситуация иная, работа автора [1] об интерполяции в окрестности внутреннего заострения решает задачу в простейшем случае и не допускает прямых обобщений. Полученные здесь оценки являются первым и обязательным шагом в решении задачи свободной интерполяции на широких спиралях.

Разумеется, эффект повышения гладкости может появиться только у широких спиралей. Все проводимые здесь оценки для $|f(a)-f(b)|$ верны для обычных и узких спиралей, но они очевидным образом эквивалентны оценкам класса Гёльдера.

Мы ограничимся рассмотрением спиралей, для которых функция ширины меняется монотонно и достаточно плавно, например, с условием удвоения. Более того, это условие должно выполняться как для основной, так и для дополнительной спирали.

Будем говорить, что спираль имеет *плавно изменяющуюся ширину*, если:

$$\frac{1}{2} \leq \frac{h(x+2\pi)}{h(x)} \leq 2, \qquad \frac{1}{2} \leq \frac{1-h(x+2\pi)}{1-h(x)} \leq 2.$$

Для спирали с плавно меняющейся шириной можно говорить о ширине витка S_n. Мы будем называть *шириной витка* S_n величину

$$\delta_n = e^{-2\pi n}(e^{2\pi h(n)} - 1),$$

аналогично для дополнительной спирали

$$\Delta_n = e^{-2\pi n}(1 - e^{-2\pi(1-h(n))}).$$

Введем еще одно условие “масштабированной плавности”. Будем говорить, что *широкая спираль регулярна*, если

$$\text{существует число } \gamma > 1 \text{ такое, что } \Delta_n \leq e^{-n\gamma}.$$

Для широких спиралей предположение о регулярности позволяет отсечь более трудные для анализа промежуточные случаи между обычной и широкой спиралью, когда функция h стремится к 1 слишком медленно. Дадим теперь точную формулировку доказываемого утверждения

Теорема 2.1. *Пусть S широкая регулярная спираль, функция f регулярна во внутренних точках спирали и удовлетворяет условию Гёльдера порядка α в ее замыкании. Тогда для точек a и $b \in S$, удовлетворяющих условию $\max(|a-b|, d_a, d_b) \geq C\max(\Delta_A, \Delta_B)$, справедливы следующие утверждения.*

1. *При* $\alpha\gamma > 1$

$$|f(a) - f(b)| \le C||f|| \left(|a-b| + \Delta_A^\alpha \log \frac{|a-b|}{d_a + \Delta_A} + \Delta_B^\alpha \log \frac{|a-b|}{d_b + \Delta_B} \right). \tag{2.1}$$

2. *При* $\alpha\gamma = 1$

$$|f(a) - f(b)| \le$$
$$\le C||f|| \left(|a-b| \log \frac{1}{|a-b|} + \Delta_A^\alpha \log \frac{|a-b|}{d_a + \Delta_A} + \Delta_B^\alpha \log \frac{|a-b|}{d_b + \Delta_B} \right). \tag{2.2}$$

3. *При* $\alpha\gamma < 1$

$$|f(a) - f(b)| \le$$
$$\le C||f|| \left(|a-b|^{\alpha\gamma} + \Delta_A^\alpha \log \frac{|a-b|}{d_a + \Delta_A} + \Delta_B^\alpha \log \frac{|a-b|}{d_b + \Delta_B} \right). \tag{2.3}$$

Замечание. Мы проведем оценки для всех возможных взаимных расположений a и b, но в отсутствии ограничения $\max(|a-b|, d_a, d_b) \ge C \max(\Delta_A, \Delta_B)$ получатся только стандартные оценки класса Гёльдера.

Покажем, что эти оценки действительно означают повышение гладкости, формально это следует из оценки (1.1), но за обилием параметров трудно уследить, как собственно повышается гладкость. Чтобы увидеть повышение гладкости, усилим условие регулярности и будем считать, что

$$\Delta_n \asymp e^{-n\gamma}.$$

Рассмотрим вначале, как повышается гладкость на "средней линии", т.е. будем считать, что $d_b \asymp e^{-B}$, $d_a \asymp e^{-A}$, и пусть $A > B+1$. Тогда из геометрической скорости убывания размеров витков следует, что $|a-b| \asymp e^{-B}$. Выясним, что можно получить из оценок (1), (2) и (3) в этом случае:

1. $|f(a) - f(b)| \le C\left(|a-b| + e^{-B\alpha\gamma} + e^{-A\alpha\gamma} \log \frac{e^{-B}}{e^{-A}}\right) \le C|a-b|$.

2. $|f(a) - f(b)| \le C\left(|a-b| \log \frac{1}{|a-b|} + e^{-B\alpha\gamma} + e^{-A\alpha\gamma} \log \frac{e^{-B}}{e^{-A}}\right) \le C|a-b| \log \frac{1}{|a-b|}$.

3. $|f(a) - f(b)| \le C\left(|a-b|^{\alpha\gamma} + e^{-B\alpha\gamma} + e^{-A\alpha\gamma} \log \frac{e^{-B}}{e^{-A}}\right) \le C|a-b|^{\alpha\gamma}$.

В этих оценках использовано то, что функция $\phi(x) = x^\beta \log \frac{C}{x}$ возрастает в окрестности нуля.

С другой стороны, если точки a и b близки между собой и близки к границе спирали, то сохраняется оценка исходного класса Гёльдера. Действительно, если $|a-b| \asymp d_a \asymp d_b \asymp \Delta_A$, то оценки (1)–(3) становятся эквивалентными оценке

$$|f(a)-f(b)| \leq C|a-b|^{\alpha}.$$

Однако, для далеких точек, лежащих на границе спирали, гладкость функции повышается почти так же, как на средней линии. Заметим предварительно, что оценки из теоремы выдерживают предельный переход, когда одна или обе точки стремятся к границе. Фиксируем точки a и b на границе спирали ($d_b = d_a = 0$), принадлежащие разным ее виткам. Как и в первом случае, будем полагать, что $A > B+1$. Оценки (1) и (2) сохраняются такими же, как для средней линии, а оценка (3) приобретет следующий вид:

$$|f(a)-f(b)| \leq C|a-b|^{\alpha\gamma} \log \frac{1}{|a-b|}.$$

Т.е. аналитическая функция класса Гёльдера на широкой спирали может реализовать оценку класса Гёльдера только локально, а на удаленных точках оценка приращения функции улучшается.

§3. Предварительные оценки

Формула Коши–Грина дает нам возможность представить приращение функции в виде интеграла по дополнительной спирали, и то обстоятельство, что относительный размер множества, по которому происходит интегрирование, очень мал, сказывается на окончательной оценке.

Пусть S широкая спираль такая, что дополнительная к ней спираль регулярна. Фиксируем пару точек a, $b \in S$ и функцию $f \in \Lambda_A^{\alpha}(S)$. Теорема Е. М. Дынькина о псевдоаналитическом продолжении [7] позволяет построить продолжение такой функции на всю комплексную плоскость (мы сохраним для него обозначение f) такое, что полученная функция принадлежит тому же классу Гёльдера во всей плоскости и выполняется оценка

$$\left|\frac{\partial f}{\partial \overline{z}}\right| \leq C||f|| \operatorname{dist}^{\alpha-1}(z,S) \quad \text{при } z \in \mathbf{C} \setminus S. \tag{3.1}$$

Запишем представление функции по формуле Коши–Грина [4]:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|w|=R} \frac{f(w)}{w-z} dw - \frac{1}{\pi} \int\limits_{|w|<R} \frac{\partial f}{\partial \overline{w}}(w) \frac{dudv}{w-z},$$

здесь R любое число такое, что $R > |z|$.

Нужная нам формула для оценки приращения следует отсюда непосредственно:

$$f(a) - f(b) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|w|=R} \left(\frac{1}{w-a} - \frac{1}{w-b} \right) f(w) dw -$$

$$- \frac{1}{\pi} \int\limits_{|w|<R} \frac{\partial f}{\partial \overline{w}}(w) \left(\frac{1}{w-a} - \frac{1}{w-b} \right) dudv.$$

Эта формула дает нам следующую базовую оценку:

$$|f(a) - f(b)| \le C_1 |a-b| \int\limits_{|w|=1} \frac{1}{|w-a||w-b|} |dw| +$$

$$+ C_1 |a-b| \int\limits_{|w|<1} |\frac{\partial f}{\partial \overline{w}}(w)| \frac{1}{|w-a||w-b|} dudv.$$

Так как точки a и b можно считать равномерно отделенными от окружности $|w| = 1$ и величина $|f(w)|$ является ограниченной, то первый интеграл оценивается сверху через $C|a-b|$ – это наилучшая из возможных оценок приращения для непостоянной функции. Поэтому все дальнейшие действия будут связаны только с оценкой второго слагаемого, в котором мы можем уменьшить область интегрирования, так как $\frac{\partial f}{\partial \overline{w}}(w) = 0$ при $w \in S$, т.е. интегрирование происходит только по дополнительной спирали, причем в этом случае для оценки производной у нас имеется оценка (3.1). Запишем возникшую оценку, разбивая интеграл по спирали в интегралы по отдельным виткам:

$$|f(a) - f(b)| \le C_2 |a-b| + C_2 \sum_{n=1}^{\infty} |a-b| \int\limits_{S_n^*} \frac{dudv}{|w-a||w-b| \operatorname{dist}^{1-\alpha}(w,S)}.$$

Мы переходим к оценкам интегралов, образующих сумму, и для удобства введем для них специальное обозначение

$$I = \sum_{n=1}^{\infty} |a-b| \int\limits_{S_n^*} \frac{dudv}{|w-a||w-b| \operatorname{dist}^{1-\alpha}(w,S)} = \sum_{n=1}^{\infty} I_n. \qquad (3.2)$$

Наша ближайшая цель – оценка интегралов I_n. Основу этих оценок составляет разбиение области интегрирования на компоненты, где величины $|w-a|$, $|w-b|$ мало меняются. На каждой такой компоненте H нужно будет оценить интеграл $\int_H (\operatorname{dist}(w,\partial S))^{\alpha-1} dudv$. Эту оценку мы оформим в следующем предложении.

Предложение 3.1. *Если множество H, лежащее внутри спирали, допускает билипшицево отображение на прямоугольник $\{0 < x < d_1, 0 < y < d_2\}$, при котором $\operatorname{dist}(w,\partial S) \asymp y$, то*

$$\int\limits_H (\operatorname{dist}(w,\partial S))^{\alpha-1} dudv \le C d_1 d_2^{\alpha}.$$

Доказательство. В условиях предложения якобиан отображения, переводящего множество H в прямоугольник, эквивалентен 1 и, следовательно,

$$\int\limits_H (\operatorname{dist}(w,\partial S))^{\alpha-1} dudv \asymp \int\limits_0^{d_1} dx \int\limits_0^{d_2} y^{\alpha-1} dy = d_1 d_2^{\alpha}.$$

Предложение доказано.

§4. Доказательство теоремы в случае далеких точек

Пусть точка a принадлежит витку спирали S_A, а точка b витку S_B. Мы рассмотрим здесь случай, когда между витками S_A и S_B лежит еще хотя бы один виток спирали (далекие точки). Заметим, что при этом всегда выполнено условие теоремы 2.1 $|a-b| \ge \Delta_B$. Не умаляя общности можно считать, что $A > B$ (точнее, $A > B+1$) и что расстояние от точек a или b до боковых границ содержащих их витков больше расстояния до границы спирали (картинку всегда можно повернуть).

Специфика нашей спирали такова, что для большинства перешейков S_n^* никакого дополнительного разбиения не требуется.

Для того, чтобы точно описать ситуацию, введем несколько обозначений. Будем говорить, что витки спиралей (основной) S_m и (дополнительной) S_n^* *примыкают*, если они имеют общую границу, а в противном случае будем говорить, что витки *отделены*.

Предложение 4.1. *Пусть $a \in S_A$, $w \in S_n^*$, тогда при $n < A-1$ имеем $|w-a| \asymp e^{-n}$, а при $n > A$ имеем $|w-a| \asymp e^{-A}$.*

Предложение 4.2. *Оценка вкладов не примыкающих витков. Пусть $a \in S_A$, $b \in S_B$ $(A \geq B)$, $w \in S_n^*$, причем перешеек S_n^* не примыкает к виткам S_A, S_B, т.е. $n \neq A, A+1, B, B+1$. Тогда*

$$I_n \leq e^{n-B}\Delta_n^\alpha \quad \text{при} \quad n < B;$$

$$I_n \leq \Delta_n^\alpha \quad \text{при} \quad A > n > B+1;$$

$$I_n \leq e^{n-A}\Delta_n^\alpha \quad \text{при} \quad n > A+1.$$

Доказательство. Заметим, что если $A \neq B$, то $|a-b| \asymp e^{-B}$. Исключим из интеграла сомножители $|w-a|$, $|w-b|$, пользуясь тем, что они эквивалентны диаметру витка с минимальным номером (A, B, n), а затем воспользуемся оценкой предложения 3.1 с "длиной" e^{-n} и "шириной" Δ_n. Эти оценки позволяют доказать все утверждения рассматриваемого предложения.

Оценки интегралов по перешейкам, примыкающим к точкам a или b, требуют дополнительных конструкций. В этом параграфе мы рассмотрим более простой случай, когда ни один из перешейков не примыкает к обоим точкам одновременно (т.е. $A > B+1$). Проведем описание нужного нам разбиения примыкающего перешейка.

Определение 4.3. *Пусть фиксирована точка a и виток границы спирали, тогда проекцией точки a на виток спирали назовем точку пересечения границы витка и луча, исходящего из начала координат и проходящего через точку a.*

Определение 4.4. *Для фиксированной точки $a \in C$, положительного числа d и $\gamma \in [0, 2\pi]$ определим систему множеств*

$$P_0^*(a,d,\gamma) = \{w = a + e^{i\gamma}(t_1 + it_2) : |t_1|, |t_2| \leq d\},$$

$$P_m^*(a,d,\gamma) = P_0^*(a, 2^m d, \gamma) \setminus P_0^*(a, 2^{m-1}d, \gamma), \quad m = 1, 2, \ldots .$$

Введем обозначение для фрагментов множеств $P^*_m(a,d,\gamma)$, *лежащих внутри витка дополнительной спирали. Фиксируем виток дополнительной спирали* S^*_n *и обозначим*

$$P_m(a,d,\gamma) = S^*_n \cap P^*_m(a,d,\gamma), \quad m = 2,...,M, \quad M \asymp \log\frac{e^{-n}}{d};$$

$$P_1(a,d,\gamma) = S^*_n \cap P^*_0(a,2d,\gamma).$$

Далее мы постоянно предполагаем, что $a \notin S^*_n$ и $d = \operatorname{dist}(a, S^*_n)$.

Для анализа структуры множеств $P_m(a,d,\gamma)$ введем натуральное число Q такое, что $2^Q d \le d + \Delta_n < 2^{Q+1}d$. Если $d \le \Delta_n$, то положим $Q = 0$.

Отметим важные для нас элементарные свойства построенных множеств.

Предложение 4.5.

1. *Если* $w \in P_m(a,d,\gamma)$, $m > 0$, *то* $|a-w| \asymp 2^m d$.
2. *Если* $w_1 \in P_m(a,d,\gamma)$, $w_2 \in P_q(a,d,\gamma)$, $m-1 > q$, *то* $|w_1 - w_2| \asymp 2^m d$.
3. $S^*_n = \bigcup_{m=1}^M P_m(a,d,\gamma)$.
4. *Если* $m \le Q$, *то* $\int_{P_m} \frac{du\,dv}{\operatorname{dist}^{1-\alpha}(w,\partial S)} \le C(2^m d)^{1+\alpha}$.
5. *Если* $Q \le m \le M$, *то* $\int_{P_m} \frac{du\,dv}{\operatorname{dist}^{1-\alpha}(w,\partial S)} \le C 2^m d \Delta_n^{1+\alpha}$.

Доказательство. Все утверждения этого предложения являются прямым следствием определения 4.4 (“под них” оно и было сформулировано). Модификация определения множества $P_1(a,d,\gamma)$ позволила нам исключить в представлении пункта 3 $m = 0$. Для доказательства оценок интегралов достаточно воспользоваться предложением 3.1.

Теперь мы можем продолжить оценки интегралов I_n.

Предложение 4.6. *Если область* S^*_n *примыкает к области* S_A ($n = A-1, A$) *и не примыкает к* S_B ($n > B$), *то справедлива оценка*

$$I_n \le C\Delta_n^\alpha \left(1 + \log\frac{e^{-n}}{\max(d,\Delta_n)}\right).$$

Если область S^*_n *примыкает к области* S_B *и не примыкает к* S_A, *то справедлива аналогичная оценка.*

Доказательство. Пусть a_0 радиальная проекция точки a на ближайшую к ней границу витка S^*_n, $d = \operatorname{dist}(a, \partial S)$. Так как граница спирали удовлетворяет условию Лаврентьева, то $d \asymp |a - a_0|$. Определим величину $\gamma = \arg(i(a - a_0))$. Перепишем оцениваемый интеграл, используя представление области интегрирования из пункта 3 предложения 4.5:

$$I_n = \sum_{m=1}^{M} \int\limits_{P_m(a,d,\gamma)} \frac{dudv}{|w-a||w-b| \operatorname{dist}^{1-\alpha}(w, \partial S)}.$$

Предложение 4.2 дает оценку для $|w - b|$ и $|a - b|$, а предложение 4.5 (пункт 1) – для $|w - a|$. После этого оценки предложения 4.5 (пункты 4, 5) сводят дело к оценке геометрических прогрессий. Запишем возникающие при этом оценки, предполагая, что $\Delta_n > d$ $(Q > 0)$:

$$I_n \le C|a-b| \left(\sum_{m=1}^{Q} \frac{e^B}{2^m d}(2^m d)^{1+\alpha} + \sum_{m=Q}^{M} \frac{e^B}{2^m d} 2^m d \Delta_n^\alpha \right) \le$$

$$C(1 + M - Q)\Delta_n^\alpha \le C\big(1 + \log \frac{e^{-n}}{\Delta_n}\big).$$

В случае $\Delta_n < d$ $(Q = 0)$ из предыдущей оценки исчезает первое слагаемое и получается неравенство

$$I_n \le C(1 + \log \frac{e^{-n}}{d}).$$

Остается заметить, что в случае, когда виток S_n^* примыкает к витку S_B, проходит та же схема оценки. Предложение доказано.

Подведем промежуточный итог – докажем теорему 2.1 в случае, когда точки хорошо разделены.

Следствие 4.7. *Пусть спираль S является регулярной, т.е. $\Delta_n \le e^{-n\gamma}$, $\gamma < 1$. Пусть витки спирали, содержащие точки a и b, не примыкают. Тогда справедливы следующие оценки.*

1. *При $\alpha\gamma > 1$*

$$|f(a) - f(b)| \le$$

$$\le C||f|| \left(|a-b| + \Delta_A^\alpha \log \frac{|a-b|}{d_a + \Delta_A} + \Delta_B^\alpha \log \frac{|a-b|}{d_b + \Delta_B} \right). \tag{4.1}$$

2. *При $\alpha\gamma = 1$*

$$|f(a) - f(b)| \le$$

$$\leq C||f|| \left(|a-b| \log \frac{1}{|a-b|} + \Delta_A^\alpha \log \frac{|a-b|}{d_a + \Delta_A} + \Delta_B^\alpha \log \frac{|a-b|}{d_b + \Delta_B} \right). \tag{4.2}$$

3. *При* $\alpha\gamma < 1$

$$|f(a) - f(b)| \leq$$

$$\leq C||f|| \left(|a-b|^{\alpha\gamma} + \Delta_A^\alpha \log \frac{|a-b|}{d_a + \Delta_A} + \Delta_B^\alpha \log \frac{|a-b|}{d_b + \Delta_B} \right). \tag{4.3}$$

Доказательство. Для определенности будем считать, что $|a| < |b|$ и, следовательно, $A > B + 1$. В соответствии с принятыми обозначениями (3.2) мы можем записать

$$|f(a) - f(b)| = I = \sum_n I_n =$$

$$= \sum_{n<B} I_n + I_{B-1} + I_B + \sum_{B+1<n<A-1} I_n + I_{A-1} + I_A + \sum_{n>A} I_n.$$

Оценим каждую из сумм на основании предложения 4.2 с учетом условия регулярности спирали:

$$\sum_{n<B} I_n \leq C \sum_{n<B} e^{n-B} \Delta_n^\alpha \leq C \left(|a-b| + e^{-B} \sum_{n<B} (e\Delta_n^{\frac{\alpha}{n}})^n \right),$$

$$\sum_{B+1<n<A-1} I_n \leq C \left(|a-b| + \sum_{B+1<n<A-1} \Delta_n^\alpha \right) \leq$$

$$\leq C \left(|a-b| + \sum_{B+1<n<A-1} e^{-n} (e\Delta_n^{\frac{\alpha}{n}})^n \right),$$

$$\sum_{n>A} I_n \leq C \left(|a-b| + \sum_{n>A} e^{A-n} \Delta_n^\alpha \right) \leq$$

$$\leq C \left(|a-b| + e^A \sum_{n>A} e^{-2n} (e\Delta_n^{\frac{\alpha}{n}})^n \right).$$

Продолжим оценки возникших сумм, причем для оценки первой из них придется рассмотреть несколько вариантов в зависимости от значение параметра $\alpha\gamma$. При $\alpha\gamma > 1$ имеем

$$\sum_{n<B} I_n \le Ce^{-B} \sum_{n<B} e^n e^{-n\alpha\gamma} \le Ce^{-B} \le C|a-b|,$$

при $\alpha\gamma = 1$ имеем

$$\sum_{n<B} I_n \le Ce^{-B} \sum_{n<B} e^n e^{-n} \le C|a-b| \log \frac{1}{|a-b|},$$

при $\alpha\gamma < 1$ имеем

$$\sum_{n<B} I_n \le Ce^{-B} \sum_{n<B} e^{n(1-\alpha\gamma)} \le Ce^{-B} e^{B(1-\alpha\gamma)} \le C|a-b|^{\alpha\gamma}.$$

Для второй суммы всегда выполнена оценка

$$\sum_{B+1<n<A-1} I_n \le C \sum_{B+1<n<A-1} e^{-n\alpha\gamma} \le e^{-B\alpha\gamma} \le C|a-b|^{\alpha\gamma}.$$

Аналогично для третьей суммы

$$\sum_{n>A} I_n \le Ce^{-A\alpha\gamma} \le C|a-b|^{\alpha\gamma}.$$

Остается оценить слагаемые, отвечающие примыкающим виткам, на основании предложения 4.6:

$$I_{B-1} \le C\Delta_{B-1}^{\alpha} \log \frac{e^{-B+1}}{d_{B-1} + \Delta_{B-1}}, \qquad I_B \le C\Delta_B^{\alpha} \log \frac{e^{-B}}{d_B + \Delta_B},$$

$$I_{A-1} \le C\Delta_{A-1}^{\alpha} \log \frac{e^{-A+1}}{d_{A-1} + \Delta_{A-1}}, \qquad I_A \le C\Delta_A^{\alpha} \log \frac{e^{-A}}{d_A + \Delta_A},$$

здесь $d_{B-1} = \operatorname{dist}(b, S_{B-1}^*)$ и аналогично определены d_A, d_{A-1}, d_A. Ослабляя оценки, мы можем заменить d_{B-1} и d_B на $d_b = \operatorname{dist}(b, \partial S)$. Аналогично введем в оценку величину d_a. Поскольку $\Delta_{n-1} \asymp \Delta_n$, предложение доказано.

§5. Доказательство теоремы в случае близких точек

Продолжая оценки для интегралов I_n, мы переходим к рассмотрению случая, когда точки a и b находятся в витках спирали S, примыкающих к витку S_n^*, по которому происходит интегрирование. Это самая трудоемкая часть оценок – здесь нам надо строить разбиение с учетом того, что расстояние до обоих точек

a и b может сильно и независимо меняться в области интегрирования. Нам придется рассмотреть много вариантов оценки в зависимости от сочетания геометрических параметров, каковыми являются:

$\Delta(=\Delta_n)$ – ширина витка дополнительной спирали (для краткости упростим обозначение);

d_a, d_b – расстояния от каждой из точек до витка дополнительной спирали (для определенности будем считать, что $d_a \leq d_b$);

$|a_0 - b_0|$ – здесь a_0, b_0 радиальные проекции точек a на b на границу перешейка S_n^*, ближайшую к точке a.

Построение компонент разбиения, пригодного для пары точек, требует специального выбора ориентации: $\gamma = \arg(i(a_0 - b_0))$.

Рассмотрим вначале случай, когда $d_b \geq |a_0 - b_0|$. Обозначим через R целое число такое, что $2^R d_a \geq d_b > 2^{R-1} d_a$.

Предложение 5.1. *Пусть $d_b \geq |a_0 - b_0|$, тогда справедливы следующие утверждения:*

1) $b_0 \in P_0(a, 2^R d_a, \gamma)$,
2) *если* $w \in P_0(a, 2^{R+1} d_a, \gamma)$, *то* $|w - b| \asymp d_b$,
3) *если* $w \in P_m(a, d_a, \gamma)$, *то* $|w - b| \asymp 2^m d_a$.

Доказательство. Первое утверждение прямо следует из определения числа R.

Заметим, что для $w \in S^*$ выполнена оценка $|w - b| \geq d_b$. Следовательно, для доказательства утверждения 2 достаточно установить оценку сверху: $|w-b| \leq |w-b_0| + |b_0 - b| \leq 2^{R+2} d_a + C d_b \leq C d_b$.

Чтобы доказать третье утверждение, достаточно заметить, что из того, что $b \in P_0^*(a, 2^R d_a, \gamma)$ и $w \in P_m(a, d_a, \gamma)$, следует (предложение 4.5 пункт 2) соотношение $|w - b| \asymp 2^m d_a$. Предложение доказано.

Видно, что оценка зависит от вариантов взаимного расположения чисел 1, Q, R: $Q < 1 < R$, $1 < Q < R$, $1 < R < Q$, что в геометрических терминах означает: $\Delta_n < d_a$, $d_a < \Delta_n < d_b$, $d_b < \Delta_n$.

Предложение 5.2. *Пусть $d_b \geq |a_0 - b_0|$ и $\Delta_n < d_a$, тогда справедлива оценка*

$$I_n \leq C \Delta_n^\alpha (1 + \log \frac{d_b}{d_a}).$$

Доказательство. Рассмотрим разбиение перешейка S_n^* из предложения 4.5: $P_m(a, d_a, \gamma)$, $m = 1, 2, .., M$. Из того же предложения следует, что $|w - a| \asymp 2^m d_a$ при $w \in P_m(a, d_a, \gamma)$ и $\int_{P_m(a,d_a)} \frac{du\,dv}{\mathrm{dist}^{1-\alpha}(w, \partial S)} \le C 2^m d_a \Delta_n^\alpha$ при $m = 1, ..., M$. Чтобы завершить оценки интегралов по компонентам разбиения, остается воспользоваться неравенствами из предложения 4.5: $|w - b| \asymp d_b$ при $w \in P_0(a, 2^{R+1} d_a)$ и $|w - b| \asymp 2^m d_a$ при $w \in P_m(a, 2^m d_a)$, $m > R + 1$. На основании отмеченных оценок мы получим

$$I_n \le C|a - b| \left(\sum_{m=1}^{R} \frac{1}{2^m d_a} \frac{1}{2^R d_a} 2^m d_a \Delta_n^\alpha + \sum_{m=R+1}^{M} \frac{1}{(2^m d_a)^2} 2^m d_a \Delta_n^\alpha \right) \le$$

$$\le C \Delta_n^\alpha \frac{|a - b|}{d_b} (1 + \log \frac{d_b}{d_a}).$$

Остается заметить, что в рассматриваемом случае $\frac{|a-b|}{d_b} \le C$. Предложение доказано.

Предложение 5.3. *Пусть* $d_b \ge |a_0 - b_0|$ *и* $d_a < \Delta_n < d_b$, *тогда справедлива оценка*

$$I_n \le C \Delta_n^\alpha (1 + \log \frac{d_b}{\Delta_n}).$$

Доказательство. Оценка проходит по той же схеме, но появится еще одна сумма (от 1 до Q), внутри которой для оценки интеграла надо использовать неравенство пункта 5 предложения 4.5. В результате получим оценку

$$I_n \le C|a - b| \left(\sum_{m=1}^{Q} \frac{1}{2^m d_a} \frac{1}{2^R d_a} (2^m d_a)^{1+\alpha} + \right.$$

$$\left. + \sum_{m=Q}^{R} \frac{1}{2^m d_a} \frac{1}{2^R d_a} 2^m d_a \Delta_n^\alpha + \sum_{m=R}^{M} \frac{1}{(2^m d_a)^2} 2^m d_a \Delta_n^\alpha \right) \le$$

$$C \Delta_n^\alpha (1 + \log \frac{d_b}{d_a} - \log \frac{\Delta_n}{d_a}) \le C \Delta_n^\alpha (1 + \log \frac{d_b}{\Delta_n}).$$

Предложение доказано.

Предложение 5.4. *Пусть $d_b \geq |a_0 - b_0|$ и $d_a < d_b < \Delta_n$, тогда справедлива оценка*

$$I_n \leq C|a-b|^{\alpha}.$$

Доказательство. Оценка проходит по той же схеме, что и в предыдущем предложении, но происходит смена индексов суммирования в первой и второй сумме и в обеих для оценки интеграла надо использовать неравенство пункта 5 предложения 4.5. В результате получим оценку

$$I_n \leq C|a-b| \left(\sum_{m=1}^{R} \frac{1}{2^m d_a} \frac{1}{2^R d_a} (2^m d_a)^{1+\alpha} + \right.$$

$$\left. \sum_{m=R}^{Q} \frac{1}{(2^m d_a)^2} (2^m d_a)^{1+\alpha} + \sum_{m=Q}^{M} \frac{1}{(2^m d_a)^2} 2^m d_a \Delta_n^{\alpha} \right) \leq$$

$$C|a-b| \left(\frac{1}{2^R d_a} (2^R d_a)^{\alpha} + \frac{1}{(2^R d_a)^{1-\alpha}} + \Delta_n^{\alpha} \frac{1}{2^Q d_a} \right) \leq$$

$$\leq C|a-b| \left(\frac{1}{d_b^{1-\alpha}} + \frac{1}{\Delta_n^{1-\alpha}} \right) \leq C|a-b|^{\alpha}.$$

Предложение доказано.

Перейдем к рассмотрению далеких точек a и b, т.е. случая, когда $|a_0 - b_0| > d_b (> d_a)$. Оценка интеграла для такой пары точек потребует использования “своего” разбиения в окрестности каждой из точек и построение “объединяющего” их разбиения. Мы начнем с описания “объединяющего” разбиения.

Определение 5.5. *Пусть точки a и b лежат вне перешейка S_n^*, $d_a = \operatorname{dist}(a, S_n^*)$, $d_b = \operatorname{dist}(b, S_n^*)$, $d_b > d_a$, a_0 и b_0 радиальные проекции точек a и b на границу перешейка S_n^*, ближайшую к точке a, и выполнено неравенство $|a_0 - b_0| > d_b (> d_a)$. Тогда обозначим через c “среднюю” точку между точками a и b: $c = \frac{a_0+b_0}{2}$ и положим $d_c = \frac{|a_0-b_0|}{2}$. Рассмотрим разбиение (определение 4.4) $P_m(c, d_c, \gamma)$, $m = 1, .., M$, $M \asymp \frac{e^{-n}}{d_c}$, $\gamma = \arg(i(a_0 - b_0))$. Множество $P_0(c, d_c, \gamma)$ содержит на своей границе “вершины” – точки a_0 и b_0. Разделим его лучом, проходящим через точку c, на две половины $P_{0,a}$ и $P_{0,b}$, содержащие точки a и b соответственно. Опишем “исчерпание”* *каждого из введенных множеств элементами локальных покрытий. Обозначим через R_a такое целое число, что $2^{R_a}d_a \le d_c < 2^{R_a+1}d_a$, $R_a \asymp \log\frac{d_c}{d_a}$, точно так же введем число R_b, $R_b \asymp \log\frac{d_c}{d_b}$. Введем элемент покрытия, согласующий локальные покрытия с "обьединяющим": $P_{0,c} = P_0(c, d_c) \setminus \left(P_0(a, 2^{R_a}d_a) \cup P_0(b, 2^{R_b}d_b)\right)$.*

Напомним еще одну необходимую характеристику покрытий: целое число Q_a определяется из неравенств $2^{Q_a}d_a \le \Delta_n < 2^{Q_a+1}d_a$, $Q_a \asymp \log\frac{\Delta_n}{d_a}$, мы полагаем $Q_a = 0$, если $\Delta_n < d_a$. Аналогично определяются числа Q_b и Q_c.

Следующее предложение дает описание и перечисляет свойства нужного нам разбиения.

Предложение 5.6. *Пусть $|a_0 - b_0| > d_b > d_a$, тогда справедливы следующие утверждения:*

1) $S_n^* = (\bigcup_{m=2}^M P_m(c, d_c)) \cup P_{0,c} \cup (\bigcup_{m=1}^{R_a} P_m(a, d_a)) \cup (\bigcup_{m=1}^{R_b} P_m(b, d_b))$,

2) $|w-a| \asymp |w-b| \asymp 2^m d_c$, *при* $w \in P_m(c, d_c)$, $m = 2, .., M$, *и при* $w \in P_{0,c}$ $m = 0$.

3) $|w-a| \asymp 2^m d_a$, $|w-b| \asymp d_c$, *при* $w \in P_m(a, d_a)$, $m = 1, .., R_a$,

4) $|w-a| \asymp d_c$, $|w-b| \asymp 2^m d_b$, *при* $w \in P_m(b, d_b)$, $m = 1, .., R_b$,

5) *сохраняются оценки для интегралов из предложения* 4.5 *пункт* 4 *(при $m < Q_*$) и пункта* 5 *(при $m > Q_*$), число Q_* должно иметь тот же индекс, что и рассматриваемый элемент покрытия.*

Доказательство. Достаточно воспроизвести соответствующие части доказательств предложений 5.2–4.

Предложение 5.7. *Если $\Delta_n < d_a < d_b < |a_0 - b_0|$, то $I_n \le C\Delta_n^\alpha(1 + \log\frac{|a_0-b_0|}{d_a})$.*

Доказательство. Запишем интеграл, определяющий I_n, как сумму интегралов по элементам покрытия (формула (3.2)). В каждом из интегралов величины $|w-a|$ и $|w-b|$ можно оценить соответствующими постоянными (предложение 5.6, пункты 2–4). Оставшиеся после этого интегралы допускают оценку в соответствии с пунктом 5 предложения 5.6, причем всякий раз мы будем использовать оценку, отвечающую $m > Q_*$, так как из условия следует, что все Q_* равны 0. В итоге получится оценка

$$I_n \le C|a-b| \left(\sum_{m=1}^{R_a} \frac{1}{2^m d_a} \frac{1}{d_c} 2^m d_a \Delta_n^\alpha + \sum_{m=1}^{R_b} \frac{1}{2^m d_b} \frac{1}{d_c} 2^m d_b \Delta_n^\alpha + \right.$$

$$+\sum_{m=1}^{M}\frac{1}{(2^m d_c)^2}2^m d_a\Delta_n^\alpha\Bigg)\le C\Delta_n^\alpha\frac{|a-b|}{d_c}(R_a+R_b+1)\le C\Delta_n^\alpha(1+\log\frac{d_c}{d_a}).$$

Предложение доказано.

Предложение 5.8. *Если* $d_a<\Delta_n<d_b<|a_0-b_0|$, *то* $I_n\le C\Delta_n^\alpha(1+\log\frac{|a_0-b_0|}{\Delta_n})$.

Доказательство. Воспроизведем первый этап доказательства предыдущего предложения с единственной оговоркой – на этот раз первую сумму придется разбить на две от 1 до Q_a и от Q_a до R_a (из условий следует, что $Q_a>0$) и в первой из возникших сумм применить оценку интеграла из пункта 5 предложения 5.6, отвечающую $m<Q_*$. Получится следующая оценка:

$$I_n\le C|a-b|\left(\sum_{m=1}^{Q_a}\frac{1}{2^m d_a}\frac{1}{d_c}(2^m d_a)^{1+\alpha}+\sum_{m=Q_a}^{R_a}\frac{1}{2^m d_a}\frac{1}{d_c}2^m d_a\Delta_n^\alpha+\right.$$

$$\left.\sum_{m=1}^{R_b}\frac{1}{2^m d_b}\frac{1}{d_c}2^m d_b\Delta_n^\alpha+\sum_{m=1}^{M}\frac{1}{(2^m d_c)^2}2^m d_a\Delta_n^\alpha\right)\le$$

$$C\Delta_n^\alpha\frac{|a-b|}{d_c}(1+R_a-Q_a+R_b+1)\le C\Delta_n^\alpha(1+\log\frac{d_c}{\Delta_n}).$$

Предложение доказано.

Предложение 5.9. *Если* $d_a<d_b<\Delta_n<|a_0-b_0|$, *то* $I_n\le C\Delta_n^\alpha(1+\log\frac{|a_0-b_0|}{\Delta_n})$.

Доказательство. Воспроизведем первый этап доказательства предложения 5.7. На этот раз первую и вторую суммы придется разбить на две. В первой просуммируем отдельно от 1 до Q_a и от Q_a до R_a (из условий следует, что $Q_a>0$), а во второй – от 1 до Q_b и от Q_b до R_b (из условий следует, что $Q_b>0$). В соответствующих суммах применим оценку интегралов из пункта 5 предложения 5.6, отвечающую $m<Q_*$. Получится следующая оценка:

$$I_n\le C|a-b|\Bigg(\sum_{m=1}^{Q_a}\frac{1}{2^m d_a}\frac{1}{d_c}(2^m d_a)^{1+\alpha}+$$

$$+\sum_{m=Q_a}^{R_a}\frac{1}{2^m d_a}\frac{1}{d_c}2^m d_a\Delta_n^\alpha+\sum_{m=1}^{Q_b}\frac{1}{2^m d_b}\frac{1}{d_c}(2^m d_b)^{1+\alpha}+$$

$$+\sum_{m=Q_b}^{R_b}\frac{1}{2^m d_b}\frac{1}{d_c}2^m d_b\Delta_n^\alpha+\sum_{m=1}^{M}\frac{1}{(2^m d_c)^2}2^m d_a\Delta_n^\alpha\Big)\le$$

$$C\Delta_n^\alpha\frac{|a-b|}{d_c}(1+R_a-Q_a+R_b-Q_b+1)\le C\Delta_n^\alpha(1+\log\frac{d_c}{\Delta_n}).$$

Предложение доказано.

Предложение 5.10. *Если* $d_a<d_b<|a_0-b_0|<\Delta_n$, *то* $I_n\le C|a-b|^\alpha$.

Доказательство. Воспроизведем первый этап доказательства предыдущего предложения 5.9. В условиях предложения в первых двух суммах $Q_*>R_*$, при этом в этих суммах для оценки интегралов мы используем оценку пункта 5 предложения 5.6, отвечающую $m<Q_*$. Третья сумма разбивается на две части, как в предыдущих предложениях. Получится следующая оценка:

$$I_n\le C|a-b|\left(\sum_{m=1}^{R_a}\frac{1}{2^m d_a}\frac{1}{d_c}(2^m d_a)^{1+\alpha}+\sum_{m=1}^{Q_b}\frac{1}{2^m d_b}\frac{1}{d_c}(2^m d_b)^{1+\alpha}+\right.$$

$$\left.\sum_{m=1}^{R_c}\frac{1}{(2^m d_c)^2}(2^m d_c)^\alpha+\sum_{m=R_c}^{M}\frac{1}{(2^m d_c)^2}2^m d_a\Delta_n^\alpha\right)\le$$

$$C|a-b|(3d_c^{\alpha-1}+\Delta_n^{\alpha-1})\le C|a-b|^\alpha.$$

Предложение доказано.

Завершим доказательство теоремы 2.1.

Следствие 5.11. *Пусть спираль* S *является регулярной, т.е.* $\Delta_n\le e^{-n\gamma}$, $\gamma<1$. *Пусть точки* a *и* b *лежат в одном витке спирали* ($B=A$), *либо в соседних* ($B=A-1$). *Будем для определенности считать, что* $d_a\le d_b$. *Если* $|a-b|+d_b\ge\Delta_B$, *то справедливы оценки.*

1. *При* $\alpha\gamma>1$

$$|f(a)-f(b)|\le C||f||\left(|a-b|+\Delta_A^\alpha\log\frac{|a-b|}{d_a+\Delta_A}\right). \tag{5.1}$$

2. *При* $\alpha\gamma=1$

$$|f(a)-f(b)|\le C||f||\left(|a-b|\log\frac{1}{|a-b|}+\Delta_A^\alpha\log\frac{|a-b|}{d_a+\Delta_A}\right). \tag{5.2}$$

3. *При* $\alpha\gamma < 1$

$$|f(a) - f(b)| \le C||f|| \left(|a-b|^{\alpha\gamma} + \Delta_A^\alpha \log \frac{|a-b|}{d_a + \Delta_A} \right). \qquad (5.3)$$

Доказательство. Для определенности будем считать, что $|a| < |b|$ и, следовательно, $A > B + 1$. В соответствии с принятыми обозначениями (3.2) мы можем записать

$$|f(a) - f(b)| = I = \sum_n I_n = \sum_{n<B} I_n + I_* + \sum_{n>A} I_n.$$

Здесь в зависимости от расположения точек a и b либо $I_* = I_{B-1} + I_B + I_A$, либо $I_* = I_{B-1} + I_B$. В обоих случаях оценка I_* происходит одинаково. Достаточно сослаться на оценки предложений 5.2–3 и 5.7–9. Условие $|a-b| + d_b \ge \Delta_B$ гарантирует, что нам не потребуются оценки предложений 5.4 и 5.10; следовательно,

$$I_* \le C\Delta_A^\alpha \log \frac{|a-b|}{d_a + \Delta_A}.$$

Оценки сумм $\sum_{n<B} I_n$ и $\sum_{n>A} I_n$, полученные в ходе доказательства следствия 4.7, достаточны для завершения доказательства и в этом случае.

Объединяя результаты следствий 4.7 и 5.11, мы убеждаемся в справедливости утверждения теоремы 2.1.

Литература

1. А. М. Коточигов, *Интерполяция в аналитических классах классах Гёльдера в окрестности точки внутреннего заострения. Нелинейные краевые задачи и некоторые вопросы теории функций.* В кн.: Проблемы математического анализа, СПбГУ, СПб, 1997, вып.17, 90–100.
2. М. А. Лаврентьев, Б. А. Шабат, *Методы теории функций комплексного переменного.* Наука, М. (1965).
3. А. М. Коточигов, Н. А. Широков, *Свободная интерполяция для классов Гёльдера в жордановых областях. Нелинейные краевые задачи и некоторые вопросы теории функций.* В кн.: Проблемы математического анализа, СПбГУ, СПб, 1995, вып 15, 109–138.
4. А. М. Коточигов, Н. А. Широков, *Интерполяция в окрестности точки острия.* Алгебра и анализ, **10**, вып. 4 (1998), 142–176.
5. В. К. Дзядык, *Введение в теорию равномерного приближения функций полиномами.* Наука, М. (1977).
6. А. М. Коточигов, *Интерполяция в обобщенной полосе.* Зап. научн. семин. ПОМИ, **270** (2000), 124–174.

7. Е. М. Дынькин, *Конструктивная характеристика классов С. Л. Соболева и О. В. Бесова.* Труды МИАН, **155** (1980), 41–76.

Kotochigov A. M. Additional smoothness phenomena for analytic functions.

The influence is studied of the geometric properties of a domain on the smoothness of Hölder class analytic functions defined on it. The case of the disc is covered by classical results of Hardy and Littlewood. We consider a domain G with an inward cusp boundary point ξ (this means that, $\operatorname{meas} U_\xi \cap (\mathbb{C} \setminus G)/\operatorname{meas} U_\xi \to 0$ as $\operatorname{meas} U_\xi \to 0$, where U_ξ stands for a neighborhood of ξ). Three zones are distinguished near such a point: the outer zone, where high smoothness occur; the boundary zone, where the smoothness is "standard", and the intermediate zone, where the smoothness decays steadily from high to standard. A sharp geometric description of these zones is given.

С.-Петербургский государственный
электротехнический университет
kam@peterlink.ru

Поступило 13 июня 2001 г.