Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 282, 2001 г.

Г. С. Мустафаев

О ВПОЛНЕ НЕПРЕРЫВНОСТИ НЕКОТОРОГО КЛАССА БАНАХОВЫХ АЛГЕБР

0. Введение.

Пусть A – банахова алгебра над полем комплексных чисел. И. Капланский [1] назвал алгебру A вполне непрерывной, если все операторы умножения слева и справа в A на элементы A компактны. В той же работе Капланский (теорема 5.1) доказал дискретность структурного пространства (в ядерно-оболочечной топологии) вполне непрерывных банаховых алгебр. В работе [11] Дж. Александер ввел компактные банаховы алгебры: A называется компактной, если для каждого $a \in A$ операторы $b \mapsto aba(b \in A)$ компактны в A. Например, алгебра $K(X)$ компактных операторов в банаховом пространстве X является компактной [11, теорема 3.2]. Но, вообще говоря, алгебра $K(X)$ не является вполне непрерывной [7]. Обобщая вышеупомянутый результат Капланского, Александер [11, теорема 6.1] доказал дискретность структурного пространства компактных банаховых алгебр.

Аналогичным образом можно рассмотреть класс слабо вполне непрерывных и слабо компактных банаховых алгебр. В этом направлении также имеются результаты, обеспечивающие дискретность соответствующего "дуального объекта". Например, известно [4, 21, 24–26], что групповая алгебра $L^1(G)$ локально компактной группы G является слабо вполне непрерывной тогда и только тогда, когда группа G компактна (следовательно, дуальное пространство $\widehat{G}$ дискретно).

Напомним, что $a \in A$ называется *правым компактным (слабо компактным) элементом* алгебры A, если оператор умножения справа на a компактен (слабо компактен). Алгебра A называется правой *вполне непрерывной (слабо вполне непрерывной)*, если произвольный элемент $a \in A$ является правым компактным (слабо компактным). Левые компактные (слабо компактные) элементы и левые вполне непрерывные (слабо вполне непрерывные) алгебры определяются аналогичным образом.

В этой заметке в основном рассматривается класс банаховых алгебр, являющихся непрерывными образами групповых алгебр. Описываются правые (левые) компактные элементы этих алгебр. При определенных условиях доказывается дискретность структурного пространства правых (левых) слабо вполне непрерывных банаховых алгебр из этого класса. Кроме того, указаны многочисленные приложения этих результатов.

1. Обозначения и предварительные сведения. Принятые здесь обозначения более или менее стандартны: X – банахово пространство, X^* – его сопряженное, X^{**} – второе сопряженное и $X_{(1)}$ – замкнутый единичный шар в X. Для $\varphi \in X^*$ и $x \in X$, $\langle \varphi, x \rangle$ или $\varphi(x)$ будет обозначать естественную двойственность между X и X^*. Слабую топологию в X и $*$-слабую топологию в X^* будем обозначать через w и w^*, соответственно. $\overline{E}$ будет обозначать замыкание по норме множества $E \subset X$. Через $B(X)$ будем обозначать алгебру ограниченных линейных операторов в X.

Пусть A – произвольная комплексная банахова алгебра. Через R_a и L_a будем обозначать операторы умножения на $a \in A$ справа и слева соответственно: $R_a b = ba$, $L_a b = ab$ $(b \in A)$. Правые компактные (слабо компактные) элементы алгебры A определены во введении. Обозначим через $K_r(A)$ $(WK_r(A))$ множество всех правых компактных (слабо компактных) элементы алгебры A. Аналогично определяются $K_l(A)$ и $WK_l(A)$. Нетрудно видеть, что $K_r(A)$, $WK_r(A)$, $K_l(A)$ и $WK_l(A)$ являются замкнутыми двусторонними идеалами в A. Далее, положим $K(A) = K_r(A) \cap K_l(A)$. Если $A = K_r(A)\,(A = WK_r(A))$, то алгебра A называется *вполне непрерывной справа (слабо вполне непрерывной справа)*. Аналогично определяются вполне непрерывные слева (слабо вполне непрерывные слева) алгебры. Полная непрерывность в смысле Капланского [1] означает, что $K(A) = A$. Если R_a (L_a) конечномерный оператор, то a будем называть правым (левым) конечномерным элементом алгебры A.

Как известно [17, с. 50], [27], в A^{**} можно задать два умножения (умножения Аренса), каждое из которых является естественным продолжением исходного умножения в A. Первое из этих умножений определяется следующим образом: пусть a, $b \in A$, $\varphi \in A^*$ и F, $G \in A^{**}$. Определим $\varphi \cdot a \in A^*$ и $G \cdot \varphi \in A^*$ равенствами $\langle \varphi \cdot a, b \rangle = \langle \varphi, ab \rangle$ и $\langle G \cdot \varphi, a \rangle = \langle G, \varphi \cdot a \rangle$. Положим

$\langle F \cdot G, \varphi \rangle = \langle F, G \cdot \varphi \rangle$. $F \cdot G$ можно определить также как:

$$F \cdot G = w^*\text{-}\lim_{\lambda} \lim_{\mu} (a_\lambda b_\mu),$$

где $a_\lambda \xrightarrow{w^*} F$ и $b_\mu \xrightarrow{w^*} G$. В дальнейшем будем предполагать, что A^{**} снабжено умножением, построенным выше. Относительно этого умножения A^{**} становится банаховой алгеброй, и поэтому A можно считать подалгеброй в A^{**}. Известно [27, лемма 3], что A является слабо вполне непрерывной справа (слева) тогда и только тогда, когда A есть левый (правый) идеал в A^{**}.

Пусть G – локально компактная группа с левой мерой Хаара dg, $L^1(G)$ – групповая алгебра группы G. Левые и правые сдвиги в $L^1(G)$ определяются равенствами:

$${}_gf(x) = f(g^{-1}x), \quad f_g(x) = \Delta(g)f(xg) \quad (g \in G),$$

где $f \in L^1(G)$, а $\Delta(g)$ – модулярная функция группы G. Отметим, что для произвольных f, $h \in L^1(G)$ справедливы формулы

$${}_g\big(f * h\big) = {}_gf * h, \quad \big(f * h\big)_g = f * h_g.$$

Для произвольной функции $f \in L^1(G)$ положим $f^v(g) = f(g^{-1})$ и $\widetilde{f}(g) = \Delta(g^{-1})f(g^{-1})$.

Пусть e есть единичный элемент группы G, и пусть (α) – сжимающаяся к $\{e\}$ направленность предкомпактных окрестностей элемента e, а e_α – неотрицательные непрерывные функции с носителем из α и такие, что $\|e_\alpha\|_1 = 1$. Тогда (e_α) есть ограниченная аппроксимативная единица (о.а.е.) в $L^1(G)$.

Далее нам понадобятся следующие обозначения:

$C(K)$ – банахово пространство непрерывных функций на компакте K,

$C_{00}(G)$ – пространство непрерывных функций на G с компактным носителем,

$C_0(G)$ – банахово пространство непрерывных функций на G, стремящихся к нулю на бесконечности,

$AP(G)$ $(WAP(G))$ – пространство ограниченных непрерывных почти периодических (слабо почти периодических) функций на G,

$G_{ru}(G)$ $(G_{lu}(G), G_u(G))$ – пространство ограниченных равномерно непрерывных справа (слева, с двух сторон) функций на G.

2. Компактные элементы в образе групповых алгебр. Основным результатом этого пункта является следующая теорема.

Теорема 2.1. *Пусть A – банахова алгебра, и пусть существует непрерывный гомоморфизм $\theta : L^1(G) \to A$ с плотным образом. Тогда справедливы следующие утверждения:*

a) *$K_r(A)$ есть замкнутая линейная оболочка минимальных конечномерных левых идеалов в A,*

b) *$K_l(A)$ есть замкнутая линейная оболочка минимальных конечномерных правых идеалов в A,*

c) *$K(A)$ есть замкнутая линейная оболочка минимальных конечномерных двусторонних идеалов в A.*

Для доказательства этой теоремы нам потребуется некоторая информация. Пусть T – ограниченное непрерывное представление группы G в банаховом пространстве X. Вектор $x \in X$ называется *почти периодическим* (п.п.), если его орбита $O(x) = \{T_g x\colon g \in G\}$ предкомпактна. Множество п.п. векторов представления T обозначается через $AP(T)$. Как известно [30, с. 100], в $AP(T)$ полна система конечномерных T-инвариантных подпространств (и.п.), на которых представление можно считать неприводимым. T называется *п.п. представлением*, если $AP(T) = X$.

Доказательство теоремы 2.1. a) Пусть $\{J_i\colon i \in I\}$ есть множество всех минимальных конечномерных левых идеалов в A. Мы должны показать, что $K_r(A) = \overline{\operatorname{span}}\{J_i\colon i \in I\}$. Пусть $a \in \overline{\operatorname{span}}\{J_i\colon i \in I\}$. Это означает, что для произвольного $\varepsilon > 0$ существует $J_1, \dots, J_n$ и $a_1 \in J_1, \dots, a_n \in J_n$ такие, что $\left\| a - \sum\limits_{i=1}^{n} a_i \right\| < \varepsilon$. Отсюда следует, что $\left\| R_a - \sum\limits_{i=1}^{n} R_{a_i} \right\| < \varepsilon$.

Так как $J_1, \dots, J_n$ – левые идеалы и $a_1 \in J_1, \dots, a_n \in J_n$, то R_{a_i} отображает A в J_i, и потому R_{a_i} $(i = 1, \dots, n)$ – конечномерные операторы. Последнее неравенство показывает, что R_a аппроксимируется конечномерными операторами и, следовательно, R_a – компактный оператор. Теперь покажем, что $K_r(A) \subset \overline{\operatorname{span}}\{J_i\colon i \in I\}$. Определим в A левое и правое регулярное представления следующим образом: $L_g\theta(f) = \theta({}_g f)$, $R_g\theta(f) = \theta(f_g)$. Пусть (e_α) есть о.а.е. в $L^1(G)$. Поскольку $\theta({}_g e_\alpha)\theta(f) \to L_g\theta(f)$, имеем: $\|L_g\theta(f)\| \leqslant \|\theta\|\,\|\theta(f)\|$.

В силу плотности множества $\{\theta(f) : f \in L^1(G)\}$ в A, из последнего неравенства следует, что L_g (а также и R_g) продолжается единственным образом на всю алгебру A как ограниченное непрерывное представление. Нетрудно видеть, что для произвольных a, $b \in A$ справедливы формулы $L_g(ab) = (L_g a)b$, $R_g(ab) = a(R_g b)$.

Теперь пусть $a \in K_r(A)$. Легко видеть, что $(\theta(e_\alpha))$ служит о.а.е. для A. Так как $\theta(e_\alpha)a \to a$, имеем $(L_g\theta(e_\alpha))a \to L_g a$ $(g \in G)$. Однако $\|L_g\theta(e_\alpha)\| = \|\theta({}_g e_\alpha)\| \leqslant \|\theta\|$ и потому $\{L_g a : g \in G\} \subset \overline{\{ba : \|b\| \leqslant \|\theta\|\}}$. Отсюда следует, что множество $\{L_g a : g \in G\}$ предкомпактно и, следовательно, $a \in AP(L)$. Значит, a принадлежит замкнутой линейной оболочке системы конечномерных L-инвариантных подпространств, на которых представление L неприводимо [30, с. 100]. Остается заметить, что L-инвариантные подпространства – в точности замкнутые левые идеалы в A. Действительно, если J есть L-инвариантное подпространство и $b \in J$, то легко видеть, что для произвольного $f \in L^1(G)$ верно равенство $\theta(f)b = \int\limits_G f(g)L_g b dg \in J$, и поэтому J есть левый идеал в A. Пусть J – замкнутый левый идеал в A и $b \in J$. Тогда из соотношений $(L_g\theta(e_\alpha))b \in J$ и $(L_g\theta(e_\alpha))b \to L_g b$ следует, что J есть L-инвариантное подпространство

Утверждение b) доказывается аналогично.

Докажем утверждение c). Как в доказательстве утверждения a), легко проверить, что замкнутая линейная оболочка конечномерных двусторонних идеалов A содержится в $K(A)$. Пусть $a \in K(A)$. Обозначим через $L \times R$ прямое произведение представлений L и R:

$$L \times R : G \times G \to B(A), \quad (L \times R)(g,s)a = L_g R_s a, \quad (a \in A).$$

Поскольку $a \in K(A)$, множества $\{L_g a : g \in G\}$ и $\{R_s a : s \in G\}$ предкомпактны (см. доказательство пункта a). Нетрудно видеть, что если $\{L_{g_i} a : i = 1, \dots, n\}$ есть конечная $\varepsilon/2$-сеть для $\{L_g a : g \in G\}$, а $\{R_{s_j} a : j = 1, \dots, m\}$ есть конечная $\varepsilon/2$-сеть для $\{R_s a : s \in G\}$, то $\{L_{g_i} R_{s_j} a : i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, m\}$ будет конечной $\varepsilon/2$-сетью для $\{L_g R_s a : (g,s) \in G \times G\}$. Это означает, что $a \in AP(L \times R)$. Поэтому a принадлежит замкнутой линейной оболочке конечномерных $L \times R$-инвариантных подпространств, на которых представление $L \times R$ неприводимо. Остается показать, что $L \times R$-инвариантные подпространства – это в точности замкнутые двусторонние идеалы в A. Пусть J есть $L \times R$-инвариантное подпространство и $b \in J$. Простые выкладки показывают, что

$$\theta(h)b\theta(\widetilde{k}) = \int\limits_{G\times G} h(g)k(s)(L\times R)(g,s)b\,dg\,ds \in J. \qquad (2.1)$$

Поскольку множество $\{\theta(f) : f \in L^1(G)\}$ плотно в A и $k \to \widetilde{k}$ есть изометрия $L^1(G)$ на $L^1(G)$, имеем $AJA \subset J$. С другой стороны, A имеет о.а.е., и поэтому $AJ \subset J$ и $JA \subset J$. Пусть теперь J – замкнутый двусторонний идеал в A. Покажем, что J есть $L\times R$-инвариантное подпространство. Пусть $b \in J$. Поскольку линейная оболочка функций вида $\{h(g)k(s) : h,k \in L^1(G)\}$ плотна в $L^1(G\times G)$, из равенства (2.1) получаем, что $\int\limits_{G\times G} f(g,s)(L\times R)(g,s)b\,dg\,ds \in J$ для произвольной функции $f \in L^1(G\times G)$. С другой стороны, нетрудно видеть, что для произвольной пары $(p,q) \in G\times G$

$$\int\limits_{G\times G} e_\alpha(g,s)_{(p^{-1},q^{-1})}(L\times R)(g,s)b\,dg\,ds \to (L\times R)(p,q)\ b \in J.$$

Теорема доказана. □

В ходе доказательства теоремы 2.1 мы заодно установили следующие утверждения.

Теорема 2.2. *Пусть выполняются условия теоремы* 2.1. *Тогда:*

а) $K_r(A) = AP(L)$, b) $K_l(A) = AP(R)$, c) $K(A) = AP(L\times R)$, *где* L *и* R *– левое и правое регулярное представления в* A, *а* $L\times R$ *– их прямое произведение.*

Теорема 2.3. *Пусть* A *– банахова алгебра, и пусть существует непрерывный гомоморфизм* $\theta : L^1(G) \to A^{**}$ *с плотным образом. Тогда справедливо заключение теоремы* 2.1.

Доказательство. Докажем справедливость утверждения а) теоремы 2.1 (утверждения b) и c) доказываются аналогично). Как в доказательстве теоремы 2.1 а), легко видеть, что замкнутая линейная оболочка конечномерных левых идеалов алгебры A содержится в $K_r(A)$. Пусть L – левое регулярное представление в A^{**}. Сперва покажем, что $K_r(A)$ является L-инвариантным подпространством и, более того, для произвольного $a \in K_r(A)$ множество $\{L_g a : g \in G\}$ предкомпактно в A, т.е. $L|K_r(A)$ является п.п. представлением. Как мы уже заметили, $\theta(e_\alpha)$ служит о.а.е. для A^{**}. Не умаляя общности, можно предполагать, что $\theta(e_\alpha)$ сходится (в w^*-топологии пространства A^{**}) к некоторому $E \in A^{**}$. Заметим, что E служит единицей для A^{**}, так как, если $F \in A^{**}$ и $a_\beta \xrightarrow{w^*} F$, то

$$E \cdot F = w^*\text{-}\lim_\alpha \lim_\beta \big(\theta(e_\alpha)a_\beta\big) = w^*\text{-}\lim_\alpha \theta(e_\alpha)F = F,$$
$$F \cdot E = w^*\text{-}\lim_\beta \lim_\alpha \big(a_\beta \theta(e_\alpha)\big) = w^*\text{-}\lim_\beta a_\beta = F.$$

Пусть теперь $a \in K_r(A)$. Так как $K_r(A)$ – двусторонний идеал в A, то R_a отображает A в $K_r(A)$. В силу компактности оператора R_a, оператор R_a^{**} отображает A^{**} в $K_r(A)$ и тоже компактен. Далее, в силу того, что $R_a^{**}F = F \cdot a$ $(F \in A^{**})$, из равенства $L_g a = L_g(E \cdot a) = (L_g E) \cdot a$ получаем, что $K_r(A)$ является L-инвариантным подпространством и $L|K_r(A)$ является п.п. представлением. Поэтому в $K_r(A)$ полна система конечномерных L-инвариантных подпространств из $K_r(A)$. Нам остается показать, что если $J \subset K_r(A)$ есть L-инвариантное подпространство такое, что сужение $L|J$ неприводимо, то J есть минимальный левый идеал в A. Пусть $a \in J$. Как в доказательстве теоремы 2.1,

$$\theta(f)a = \int_G f(g)L_g a dg \in J, \quad f \in L^1(G),$$

что влечет $A^{**}J \subset J$ и, следовательно, $AJ \subset J$. Пусть имеется ненулевой левый идеал $J_0 \subset J$, и пусть $a \in J_0$. В силу рассуждений, приведенных выше, имеем: $L_g a = L_g(E) \cdot a \in J_0$, т.е. J_0 является L-инвариантным подпространством. В силу неприводимости сужения $L|J$ имеем $J_0 = J$. □

Ниже мы приведем некоторые следствия теорем 2.1–2.3.

С. Акеман [8, теорема 4] доказал, что если группа G компактна, то алгебра $L^1(G)$ вполне непрерывна справа (или слева).

Следствие 2.4. *Пусть выполняются условия теоремы* 2.1. *Если группа G компактна, то A вполне непрерывна справа (слева).*

Доказательство. Если группа G компактна, то левое (правое) регулярное представление в A является п.п. представлением. Остается применить теорему 2.2. □

С. Сакаи [5, теорема 1] доказал, что если группа G не компактна, то в $L^1(G)$ не имеется ненулевых элементов компактных слева (справа). Этот факт получается из теоремы 2.1 следующим образом: пусть группа G не компактна, и пусть f есть ненулевой элемент алгебры $L^1(G)$, компактный справа. По теореме 2.2 множество $\{f_{g-1} : g \in G\}$ предкомпактно, и потому $\langle e_\alpha, f_{g-1} \rangle = \widetilde{f} * e_\alpha$ являются п.п. функциями. Поскольку $\widetilde{f} * e_\alpha \in C_0(G)$, получаем, что $\widetilde{f} * e_\alpha = 0$, потому что на некомпактной локально компактной группе не существует ненулевой п.п. функции из $C_0(G)$; см. [13, с. 41]. Однако $\widetilde{f} * e_\alpha \to \widetilde{f}$ по L^1-норме, и потому $f = 0$.

Ниже мы приведем простое доказательство одного из основных результатов работы [31].

Следствие 2.5. *Если A – банахова алгебра, то любой компактный гомоморфизм $\theta : L^1(G) \to A$ конечномерен.*

Доказательство. Можно считать, что θ имеет плотный образ. Легко видеть, что если θ компактен, то левое регулярное представление в A является п.п. представлением. По теореме 2.2, алгебра A вполне непрерывна справа. С другой стороны, предельная точка $(\theta(e_\alpha))$ служит единицей для A, и потому алгебра A конечномерна. □

Ниже увидим, что класс банаховых алгебр, удовлетворяющих условиям теоремы 2.1, достаточно широк. Пусть T – ограниченное непрерывное представление группы G в банаховом пространстве X. Для любой функции $f \in L^1(G)$ определим оператор $T_f \in B(X)$, полагая $T_f x = \int\limits_G f(g) T_g x dg$. Пусть $L_T(G)$ – наименьшая замкнутая подалгебра в $B(X)$, содержащая все операторы $\{T_f : f \in L^1(G)\}$. Нетрудно видеть, что отображение $\theta : L^1(G) \to L_T(G)$, задаваемое правилом $f \mapsto T_f$, есть непрерывный гомоморфизм с плотным образом. Теперь пусть $X = L^p(G)$ $(1 < p < \infty)$, и пусть T – левое регулярное предствление в $L^p(G)$. Тогда $T_f h = f * h$, где $f \in L^1(G)$ и $h \in L^p(G)$. В этом случае $L_T(G)$ обозначают через $PF_p(G)$ [32].

В работе [32 (лемма 8.6)] доказано, что если группа G компактна, то алгебра $PF_p(G)$ вполне непрерывна справа (слева).

Следствие 2.6. *Алгебра $PF_p(G)$ является вполне непрерывной справа (слева) тогда и только тогда, когда группа G компактна.*

Доказательство. Если группа G компактна, то алгебра $PF_p(G)$ является вполне непрерывной справа (слева) в силу следствия 2.4. Теперь предположим, что группа G некомпактна, а алгебра $PF_p(G)$ вполне непрерывна справа. В силу теоремы 2.2 левое регулярное представление в $PF_p(G)$ является п.п. представлением, т.е. множество $\{T_{_gf} : g \in G\}$ предкомпактно для произвольной функции $f \in L^1(G)$. Тогда нетрудно видеть, что $g \mapsto \langle T_{_gf} h, k \rangle = \langle {_g}f * h, k \rangle$ является п.п. функцией для произвольных $h \in L^p(G)$ и $k \in L^q(G)$ $(1/p + 1/q = 1)$. Далее, поскольку $\langle {_g}e_\alpha * h, k \rangle \to \langle {_g}h, k \rangle$ равномерно, получаем, что $g \mapsto \langle {_g}h, k \rangle \in AP(G)$, и потому $g \mapsto \langle {_{g^{-1}}}h, k \rangle = h * k^v \in AP(G)$. Так как $h * k^v \in C_0(G)$, имеем $h * k^v = 0$. В частности, для произвольного $k \in C_{00}(G)$ имеем $e_\alpha * k^v = 0$. Поскольку $k^v \in L^q(G)$ и $e_\alpha * k^v \to k^v$ по L^q-норме, получаем, что $k = 0$. □

Пусть A – C^*-алгебра. Нетрудно видеть, что если $a \in K_r(A)$, то $a^* \in K_l(A)$ и, поскольку $K_l(A)$ является замкнутым двусторонним идеалом, получаем, что $a = (a^*)^* \in K_l(A)$. Таким образом, для C^*-алгебр имеем $K_r(A) = K_l(A) = K(A)$. Пусть $(A_i)_{i\in I}$ – семейство C^*-алгебр. Через $\big(\sum\limits_{i\in I} \oplus A_i\big)_\infty$ и $\big(\sum\limits_{i\in I} \oplus A_i\big)_0$ будем обозначать их l^∞ и c_0-прямое произведение, соответственно.

Следствие 2.7 [1, теорема 8.2; 28, теорема 2.5]**.** *Пусть A – C^*-алгебра, и пусть $P_c(A)$ – семейство минимальных конечномерных центральных проекторов в A. Тогда*

$$K_r(A) = K_l(A) = K(A) = \Bigg(\sum_{p\in P_c(A)} \oplus pA\Bigg)_0 .$$

Доказательство. В силу вышесказанного, достаточно доказать последнее равенство для $K(A)$. Хорошо известно, что A^{**} отождествляется с обертывающей алгеброй фон Неймана алгебры A. Пусть Γ – группа (в дискретной топологии) унитарных элементов алгебры A^{**}. Из теоремы Руссо-Дая [17, с. 210] следует, что существует непрерывный гомоморфизм $\theta : L^1(\Gamma) \to A^{**}$ с плотным образом. Тогда по теореме 2.3 имеем

$$K(A) = \overline{\operatorname{span}}\,(J_i : i \in I),$$

где $\{J_i : i \in I\}$ – семейство минимальных конечномерных двусторонних идеалов в A. Так как идеалы J_i $(i \in I)$ минимальны, то $J_i \cap J_j = (0)$ при $i \neq j$, и поэтому

$$J_1 + \ldots + J_n = \Bigg(\sum_{i=1}^{n} \oplus J_i\Bigg)_\infty .$$

Отсюда нетрудно получить равенство

$$K(A) = \left(\sum_{i=I} \oplus J_i \right)_0.$$

Остается заметить, что минимальные конечномерные двусторонние идеалы в A в точности совпадают с семейством $\{pA : p \in P_c(A)\}$. $\square$

Напомним, что (хаусдорфово) топологическое пространство S называется вполне несовершенным, если S не содержит непустых совершенных подмножеств. Например, вполне несовершенные множества в $\mathbf{C}$ (или в $\mathbf{R}$) – это счетные множества (теорема Кантора–Бендиксона). Известно [18, с. 113, теорема 4], что если K – бесконечный вполне несовершенный компакт, то $C(K)$ содержит пространства, изоморфные c_0, где c_0 – пространство сходящихся к нулю числовых последовательностей. Пусть $T \in B(X)$. Обозначим через A_T равномерно замкнутую подалгебру в $B(X)$, порожденную оператором T и единичным оператором 1_X. Из вышесказанного, в частности, следует, что если T – компактный самосопряженный оператор (в гильбертовом пространстве) с бесконечным спектром $\sigma(T)$, то алгебра $A_T \simeq C(\sigma(T))$ содержит подпространства, изоморфные c_0. Ниже увидим, что аналогичный факт остается в силе для компактных эрмитовых операторов в рефлективных банаховых пространствах. Напомним, что оператор $T \in B(X)$ называется эрмитовым, если $\|\exp(itT)\| = 1$ для всех $t \in \mathbf{R}$.

Следствие 2.8. *Пусть T – компактный эрмитовый оператор в рефлексивном банаховом пространстве X. Если спектр $\sigma(T)$ бесконечен, то пространство A_T содержит подпространства, изоморфные c_0.*

Доказательство. Существует непрерывный гомоморфизм $\theta : L^1(\mathbf{R}) \to A_T$ (с плотным образом), определенный равенством

$$\theta(f) = \int_{\mathbf{R}} f(t) \exp(itT) dt.$$

Регулярное представление в A_T задается равенством $L_t(S) = \exp(itT)S$, $S \in A_T$. Предположим, что A_T не содержит подпространств, изоморфных c_0. Покажем, что регулярное представление является п.п. представлением в A_T. Для произвольного

$S \in A_T$ и фиксированного $s \in \mathbf{R}$ рассмотрим семейство компактных операторов

$$L_{t+s}(S) - L_t(S) = \exp(itT)\big(\exp(isT) - 1_X\big)S. \qquad (2.2)$$

Из векторного варианта теоремы Асколи–Арцела [20, с. 350] следует, что если X рефлексивно, то семейство компактных операторов $D \subset B(X)$ предкомпактно, если $\{Sx : S \in D\}$ предкомпактно для любого $x \in X_{(1)}$ и $\sup\limits_{S \in D} \|Sx_n\| \to 0$ для любой слабо сходящейся к нулю последовательности (x_n) в X.

Поскольку $\exp(isT) - 1_X$ компактный оператор и $\exp(itT)Sx$ $(x \in X_{(1)})$ ограничено, множество $\exp(itT)(\exp(isT) - 1_X)Sx$ предкомпактно для любого $x \in X_{(1)}$. Теперь пусть $x_n \xrightarrow{w} 0$. Так как $\|(\exp(isT) - 1_X)x_n\| \to 0$, то

$$\sup_{t \in \mathbf{R}} \big\| \exp(itT)(\exp(isT) - 1_X)Sx_n \big\| \leqslant \|S\| \, \big\|(\exp(isT) - 1_X)x_n\big\| \to 0.$$

Поэтому семейство (2.2) является предкомпактным для каждого $s \in \mathbf{R}$. Из результата Болеса Босита [14], являющегося естественным обобщением известного результата М. И. Кадеца [12] о почти периодичности интеграла от векторной почти периодической функции, следует, что при условии почти периодичности семейства $L_{t+s}(S) - L_t(S)$ (для каждого $s \in \mathbf{R}$) функция $t \to L_t(S)$ почти периодична. Значит, регулярное представление является п.п. представлением в A_T. По теореме 2.2, A_T – вполне непрерывная алгебра. Поскольку A_T имеет единичный элемент, получаем, что A_T конечномерна, и, следовательно, спектр $\sigma(T)$ конечен. □

Пусть A – произвольная банахова алгебра. Нетрудно видеть, что если e – правый (левый) компактный идемпотент в A, то e является правым (левым) конечномерным элементом. Обозначим через E_A^r (E_A^l) множество всех минимальных правых (левых) конечномерных (или компактных) идемпотентов алгебры A. Нетрудно видеть, что если $e \in E_A^r$ ($e \in E_A^l$), то Ae (eA) есть минимальный конечномерный левый (правый) идеал в A. Если алгебра A – полупростая, то верно и обратное: любой минимальный конечномерный левый (правый) идеал J в A имеет вид $J = Ae$ ($J = eA$) для некоторого $e \in E_A^r$ ($e \in E_A^l$) [17, глава IV].

Следствие 2.9. *Пусть выполняются условия теоремы* 2.1 *или теоремы* 2.3. *Кроме того, пусть алгебра A полупростая. Тогда*
i) $K_r(A) = \overline{\operatorname{span}}\,(Ae : e \in E_A^r)$, ii) $K_l(A) = \overline{\operatorname{span}}\,(Ae : e \in E_A^l)$. □

Пусть A – произвольная банахова алгебра. Через Π_A будем обозначать структурное пространство алгебры A с ядерно-оболочечной (hk) топологией. Из теоремы Александера [11, теорема 6.1] следует, что структурное пространство правой (левой) вполне непрерывной банаховой алгебры дискретно. Однако в рассматриваемых нами случаях этот факт является следствием теоремы 2.1 и следующего предложения, которое, по мнению автора, представляет самостоятельный интерес.

Предложение 2.10. *Пусть A – банахова алгебра, такая, что в ней полна система минимальных левых (правых) идеалов. Тогда пространство Π_A дискретно.*

Доказательство. В силу того, что структурные пространства $A/\mathrm{Rad}(A)$ и A гомеоморфны и в $A/\mathrm{Rad}(A)$ полна система минимальных левых идеалов, можно считать, что алгебра A полупроста. Мы имеем $A = \overline{\mathrm{span}}\,(Ae : e \in E_A)$, где E_A – множество минимальных идемпотентов алгебры A. Пусть $P \in \Pi_A$. Нам нужно показать, что $\Pi_A \setminus \{P\}$ замкнуто, т.е. $P \notin \overline{\Pi_A \setminus \{P\}}^{hk}$ или $\cap\{Q \in \Pi_A : Q \neq P\} \not\subset P$. Поскольку множество P замкнуто, имеется идемпотент $e \in E_A$ такой, что $e \notin P$. Достаточно показать, что $e \in Q$ для всех $Q \in \Pi_A \setminus \{P\}$. Пусть $e \notin Q$ для некоторого $Q \neq P$. Поскольку идемпотент e минимален, т.е. $eAe = \mathbf{C}e$, и P – двусторонний идеал, имеем $ePe = (0)$, и потому $AePAe = (0)$. Теперь используем следующий факт [17, с. 123, предложение 12 (iii)]: если L_1 и L_2 два левых идеала таких, что $L_1L_2 \subset Q$, то либо $L_1 \subset Q$, либо $L_2 \subset Q$. Так как $e \notin Q$, то $Ae \not\subset Q$, и поэтому $PAe \subset Q$. Снова, используя вышеупомянутый факт, получим, что $P \subset Q$. Меняя местами P и Q, получаем, что $P = Q$. А это противоречит тому, что $P \neq Q$. □

3. Слабо компактные элементы в образе групповых алгебр. В этом пункте мы докажем (при определенных условиях) дискретность структурного пространства слабо вполне непрерывных банаховых алгебр, рассмотренных нами в п. 2.

Для удобства дальнейшего изложения, везде в этом пункте полную непрерывность справа будем называть просто полной непрерывностью.

Предложение 3.1. *Пусть A – банахова алгебра такая, что любое неприводимое её представление конечномерно, и пусть существует непрерывный гомоморфизм $\theta : L^1(G) \to A$ с плотным образом.*

Тогда каждый элемент $a \in WK_r(A)$ единственным образом представим в виде $a = b + r$, где $b \in K_r(A)$ и $r \in \mathrm{Rad}\,(A)$.

Для доказательства этого предложения нам понадобится следующее. Пусть T – ограниченное непрерывное представление группы G в банаховом пространстве X. Вектор $x \in X$ называется *слабо почти периодическим*, если орбита $O(x)$ слабо предкомпактна. Множество слабо п.п. векторов представления T обозначается через $WAP(T)$. По теореме де Лю–Гликсберга [3, теорема 4.11], $WAP(T) = AP(T) \oplus X_0$, где $X_0 = \left\{x \in X : (0) \in \overline{O(x)}^{\,w}\right\}$. T называется *слабо почти периодическим представлением*, если $WAP(T) = X$.

Доказательство предложения 3.1. Пусть $a \in WK_r(A)$. Так как множество $\underline{\{ba : \|b\| \leqslant \|\theta\|\}}$ слабо предкомпактно и выпукло, то множество $\overline{\{ba : \|b\| \leqslant \|\theta\|\}}$ слабо компактно. Теперь, как в доказательстве теоремы 2.1, имеем: $\{L_g a : g \in G\} \subset \overline{\{ba : \|b\| \leqslant \|\theta\|\}}$, где L – левое регулярное представление в A. Отсюда следует, что множество $\{L_g a : g \in G\}$ слабо предкомпактно, и потому $a \in WAP(L)$. По теореме де Лю–Гликсберга, приведенной выше, элемент a представим (единственным образом) в виде $a = b + r$, где $b \in AP(L)$ и $(0) \in \overline{\{L_g r : g \in G\}}^{w}$. По теореме 2.2, $b \in K_r(A)$. Теперь покажем, что $r \in \mathrm{Rad}\,(A)$. Пусть π – неприводимое представление алгебры A в конечномерном пространстве X. Нетрудно видеть, что $\pi \circ \theta$ есть непрерывное неприводимое представление алгебры $L^1(G)$ в X. В силу [15, с. 161, теорема 1] имеется ограниченное непрерывное представление T группы G в X такое, что $\pi\big(\theta(f)\big) = \int\limits_G f(g) T_g\,dg$. Отсюда получаем, что $\pi\big(L_g\theta(f)\big) = T_g\pi\big(\theta(f)\big)(g \in G)$. В силу плотности множества $\underline{\{\theta(f) : f \in L^1(G)\}}$ в A имеем $\pi(L_g r) = T_g\pi(r)$. Поскольку $(0) \in \overline{\{L_g r : g \in G\}}^{w}$, имеется сходящаяся к "бесконечности" направленность (g_α) такая, что $L_{g_\alpha} r \xrightarrow{w} 0$. Так как представление π конечномерно, то $T_{g_\alpha}\pi(r) = \pi(L_{g_\alpha} r) \to 0$ по норме. Отсюда получаем, что $\|\pi(r)\| \leqslant \big\|T_{g_\alpha^{-1}}\big\|\,\|T_{g_\alpha}\pi(r)\| \to 0$. Следовательно, $\pi(r) = 0$ и потому $r \in \mathrm{Rad}\,(A)$. $\square$

Предложение 3.2. *Пусть A – банахова алгебра такая, что любое её неприводимое представление конечномерно, и пусть существует непрерывный гомоморфизм $\theta : L^1(G) \to A^{**}$ с плотным образом.*

Тогда справедливо заключение предложения 3.1.

Доказательство. Пусть L – левое регулярное представление в A^{**}. Покажем, что $WK_r(A)$ является L-инвариантным подпространством, а $L|WK_r(A)$ – слабо п.п. представлением. Пусть $a \in WK_r(A)$. Поскольку $WK_r(A)$ – двусторонний идеал, R_a отображает A в $WK_r(A)$. В силу слабой компактности оператора R_a, второй сопряженный оператор R_a^{**} отображает A^{**} в $WK_r(A)$ [19, с. 520, теорема 2], и по теореме Гантмахера [19, с. 522] оператор R_a^{**} тоже слабо компактен. Далее заметим, что $R_a^{**}F = F \cdot a$, где $F \in A^{**}$. Теперь, если E – единичный элемент в A^{**} (см. доказательство теоремы 2.3), то из равенств $L_g a = L_g(E \cdot a) = L_g(E)a$ $(g \in G)$ следует, что $WK_r(A)$ является L-инвариантным подпространством и что $L|WK_r(A)$ – слабо п.п. представление. По теореме де Лю–Гликсберга, элемент a представим (единственным образом) в виде $a = b + r$, где $b \in AP(L|WK_r(A))$ и $(0) \in \overline{\{L_g r : g \in G\}}^w$. Значит, элемент b принадлежит замкнутой линейной оболочке конечномерных L-инвариантных подпространств из A. Однако, как в доказательстве теоремы 2.3, легко видеть, что L-инвариантные подпространства из A являются замкнутыми левыми идеалами в A. Поэтому $b \in K_r(A)$. Остается показать, что $r \in \mathrm{Rad}\,(A)$. Пусть π – неприводимое представление алгебры A в конечномерном пространстве X. Нетрудно видеть, что π^{**} является неприводимым представлением алгебры A^{**} в X, и потому $\pi^{**} \circ \theta$ – непрерывное неприводимое представление алгебры $L^1(G)$ в X. Поэтому существует ограниченное непрерывное представление T группы G в X такое, что

$$\pi^{**}(\theta(f)) = \int\limits_G f(g) T_g \, dg;$$

следовательно, $\pi^{**}\big(L_g(\theta(f))\big) = T_g \pi^{**}(\theta(f))$. Отсюда получаем, что $\pi(L_g r) = T_g \pi(r)$. Далее доказательство завершается как доказательство предложения 3.1. □

Отметим одно следствие этого предложения.

Следствие 3.3. *Пусть A – C^*-алгебра такая, что любое неприводимое представление алгебры A конечномерно. Тогда любой слабо компактный элемент алгебры A является и компактным.*

Доказательство. Как в доказательстве следствия 2.7, существует непрерывный гомоморфизм $\theta : L^1(\Gamma) \to A^{**}$ с плотным образом, где Γ – унитарная группа в A^{**}. Поскольку алгебра A полупроста, из предложения 3.2 получаем то, что требуется. $\square$

Пусть $C^*(G)$ обозначает C^*-алгебру локально компактной группы G. Напомним [32, с. 331], что G называется группой Мура, если любое непрерывное неприводимое унитарное представление группы G конечномерно. Нетрудно видеть, что если G есть группа Мура, то любое неприводимое представление алгебры $C^*(G)$ конечномерно. Другой пример: условиям предложения 3.2 удовлетворяют CCR – C^*-алгебры с единицей [20, с. 114].

Теперь сформулируем основной результат этого пункта.

Теорема 3.4. *Пусть выполняются условия предложения* 3.1. *Если алгебра A слабо вполне непрерывна, то пространство Π_A дискретно.*

Для доказательства нам понадобится следующая лемма.

Лемма 3.5. *Пусть A – банахова алгебра и J – двусторонний идеал в A. Если алгебра A слабо вполне непрерывна, то и фактор-алгебра A/J слабо вполне непрерывна.*

Доказательство. Пусть $\pi : A \to A/J$ канонический гомоморфизм. Покажем, что для любого $a \in A$ оператор $R_{\pi(a)}$ слабо компактен в A/J. Так как оператор R_a слабо компактен, по теореме Гантмахера оператор $R_a^* \mid J^\perp$ тоже слабо компактен. Однако, поскольку $R_{\pi(a)}^* = R_a^* \mid J^\perp$, снова используя теорему Гантмахера, получаем, что $R_{\pi(a)}$ – слабо компактный оператор. $\square$

Доказательство теоремы 3.4. Пусть $B = A/\mathrm{Rad}(A)$ и $\pi : A \to B$ канонический гомоморфизм. Поскольку алгебра A слабо вполне непрерывна, по лемме 3.5 алгебра B тоже слабо вполне непрерывна. Нетрудно видеть, что $\pi \circ \theta : L^1(G) \to B$ есть непрерывный гомоморфизм с плотным образом и, кроме того, любое неприводимое представление алгебры B конечномерно. В силу того, что алгебра B полупроста, применяя предложение 3.1, получаем, что она вполне непрерывна, и потому пространство Π_B дискретно. Следовательно, пространство Π_A дискретно. $\square$

Теорема 3.6. *Пусть выполняются условия предложения* 3.2. *Если алгебра A слабо вполне непрерывна, то пространство Π_A дискретно.*

Доказательство. Пусть $B = A/\mathrm{Rad}\,(A)$ и $\pi : A \to B$ канонический гомоморфизм. Тогда $\pi^{**} : A^{**} \to A^{**}/\mathrm{Rad}\,(A)^{\perp\perp}(= B^{**})$ – канонический гомоморфизм и $\pi^{**} \circ \theta : L^1(G) \to B^{**}$ есть непрерывный гомоморфизм с плотным образом. Применяя предложение 3.2, получаем, что алгебра B вполне непрерывна, и потому пространство Π_B дискретно. Следовательно, пространство Π_A дискретно. □

Как известно [4, 21, 24–26], алгебра $L^1(G)$ является слабо вполне непрерывной тогда и только тогда, когда группа G компактна. В литературе известны многочисленные доказательства этого факта. Ниже мы приведем наиболее простое (по мнению автора) доказательство. Пусть алгебра $L^1(G)$ слабо вполне непрерывна. По теореме Коэна о факторизации [23, 32.26], каждый элемент $f \in L^1(G)$ представим в виде $f = h * k$, где $h,\ k \in L^1(G)$. Так как $L_g f = L_g h * k$ и множество $\{L_g h : g \in G\}$ ограничено, то отсюда следует, что множество $\{L_g f : g \in G\}$ слабо предкомпактно. По теореме Эберлейна [13, с. 36] отображение $g \mapsto \langle \varphi, L_g f \rangle = \varphi * f^v$ является слабой п.п. функцией для произвольного $\varphi \in L^\infty(G)$. Поскольку $\{\varphi * f^v : \varphi \in L^\infty, f \in L^1\} = C_{ru}(G)$ [23, 32.45], получаем, что $C_{ru}(G) \subset WAP(G)$. Известно [13, с. 68], что $WAP(G) \subset C_u(G)$, и потому верно равенство $C_u(G) = WAP(G)$. А это возможно только при компактности группы G [16]. Если группа G компактна, то алгебра $L^1(G)$ вполне непрерывна в силу следствия 2.4.

Пусть A – произвольная банахова алгебра, а e идемпотент в ней. Нетрудно видеть, что если элемент e слабо компактен, то идеал Ae рефлексивен. Однако мы имеем следующее.

Предложение 3.7. *Пусть выполняются условия предложения* 3.1 *или* 3.2. *Тогда слабо компактные идемпотенты алгебры A являются конечномерными.*

Доказательство. Пусть e – слабо компактный идемпотент алгебры A. По предложениям 3.1 или 3.2 имеется разложение $e = e_1 + e_2$, где e_1 компактный элемент алгебры A и $e_2 \in \mathrm{Rad}\,(A)$. Заметим, что $e_1^2 + e_1 e_2 + e_2 e_1$ является компактным элементом алгебры A и $e_2^2 \in \mathrm{Rad}\,(A)$. Теперь из единственности разложения $e = e_1^2 + e_1 e_2 + e_2 e_1 + e_2^2$ получаем, что $e_2^2 = e_2$. Поскольку $e_2 \in \mathrm{Rad}\,(A)$, имеем $e_2 = 0$. Значит, e является компактным идемпотентом, и потому элемент e конечномерен. □

Пусть группа G абелева, а J – замкнутый идеал в $L^1(G)$. В работе [6, следствие 2.6] доказано, что если фактор-пространство $A = L^1(G)/J$ изоморфно некоторому гильбертову пространству, то алгебра A конечномерна. В работе [33, следствие 2.3] доказано больше: если алгебра A рефлексивна, то она конечномерна. Однако справедливо следующее утверждение.

Следствие 3.8. *Пусть A – банахова алгебра такая, что любое её неприводимое представление конечномерно, и пусть существует непрерывный гомоморфизм $\theta : L^1(G) \to A$ с плотным образом. Если алгебра A рефлексивна, то она конечномерна.*

Доказательство. Если алгебра A рефлексивна, то она слабо вполне непрерывна. С другой стороны, слабая предельная точка о.а.е. служит единицей для A. Применяя предложение 3.7, получаем, что алгебра A конечномерна.

4. Коммутативный случай. Пусть A – коммутативная банахова алгебра, Σ_A – её пространство Гельфанда. Через $\widehat{a}$ будем обозначать преобразование Гельфанда элемента $a \in A$. $A^* \cdot A$ будет обозначать множество $\{\varphi \cdot a : \varphi \in A^*, a \in A\}$. Из теоремы Коэна–Хьюитта о факторизации [23, 32.22] следует, что если A имеет о.а.е., то $A^* \cdot A$ является замкнутым подпространством в A^*.

Всюду в этом пункте будем предполагать, что G – локально компактная абелева группа. Пусть существует непрерывный гомоморфизм $\theta : L^1(G) \to A$ с плотным образом. Как известно [29, с. 80], Σ_A отождествляется с множеством $\mathrm{hull}(\mathrm{Ker}\,\theta)$, которое является замкнутым подмножеством группы характеров $\widehat{G}$. Мы также имеем $\widehat{\theta(f)}(\chi) = \widehat{f}(\chi)$ $(\chi \in \Sigma_A)$, где $\widehat{f}$ – преобразование Фурье функции $f \in L^1(G)$. Далее через $\sigma(\varphi)$ будем обозначать w^*-спектр произвольного элемента $\varphi \in L^\infty(G)$. По определению [9, с. 139], $\sigma(\varphi) = \mathrm{hull}\{f \in L^1(G) : \varphi * f = 0\}$.

Предложение 4.1. *Пусть существует непрерывный гомоморфизм $\theta : L^1(G) \to A$ с плотным образом. Если спектр Σ_A дискретен, то $A^* \cdot A = \overline{\mathrm{span}}\,\Sigma_A$.*

Доказательство. Пусть $\varphi = c_1\chi_1 + \ldots + c_n\chi_n$, где $\chi_1, \ldots, \chi_n \in \Sigma_A$. Имеется элемент $f \in L^1(G)$ такой, что $\widehat{f}(\chi_1) = \ldots = \widehat{f}(\chi_n) = 1$, откуда $\varphi = \varphi \cdot \theta(f)$. Значит, в силу замкнутости множества $A^* \cdot A$ имеем $\overline{\mathrm{span}}\,\Sigma_A \subseteq A^* \cdot A$. Теперь пусть $\varphi \in A^*$. Поскольку множество $\{\theta(f) : f \in L^1(G), \widehat{f} \in C_{00}(\widehat{G})\}$ плотно в A, достаточно показать, что $\varphi\cdot\theta(f) \in \overline{\operatorname{span}}\,\Sigma_A$ для произвольных $f \in L^1(G)$ таких, что $\widehat{f} \in C_{00}(\widehat{G})$. Сперва покажем, что $\sigma(\theta^*\varphi) \in \Sigma_A$. Пусть существует $\chi_0 \in \sigma(\theta^*\varphi)$, но $\chi_0 \notin \Sigma_A$. Тогда существует элемент $f \in L^1(G)$ такой, что $f(\chi_0) \neq 0$ и $\widehat{f} = 0$ в некоторой окрестности множества Σ_A. Отсюда следует, что $\widehat{f_s} = 0$ $(s \in G)$ в некоторой окрестности множества Σ_A. Значит, f_s принадлежит наименьшему идеалу в $L^1(G)$ с оболочкой $\operatorname{hull}(\operatorname{Ker}\theta)$, и поэтому $\theta(f_s) = 0$ $(s \in G)$. Далее имеем $0 = \langle \varphi, \theta(f_{s-1}) \rangle = (\theta^*\varphi) * f$. Поскольку $\chi_0 \in \sigma(\theta^*\varphi)$, получаем что $\widehat{f}(\chi_0) = 0$. А это противоречит соотношению $\widehat{f}(\chi_0) \neq 0$. Теперь пусть функция $f \in L^1(G)$ такова, что $\widehat{f} \in C_{00}(\widehat{G})$. Нетрудно видеть, что $\sigma\big((\theta^*\varphi) * f\big) \subset \sigma(\theta^*\varphi) \cap \operatorname{supp}\widehat{f} \subset \Sigma_A \cap \operatorname{supp}\widehat{f}$. Отсюда следует, что спектр $\sigma\big((\theta^*\varphi) * f\big)$ конечен, и поэтому $(\theta^*\varphi) * f$ есть конечная линейная комбинация характеров из Σ_A [9, с. 144]: $(\theta^*\varphi) * f = c_1\chi_1 + \ldots + c_n\chi_n$. Значит,

$$\langle (\theta^*\varphi) * f, h \rangle = \langle c_1\chi_1 + \ldots + c_n\chi_n, h \rangle, \quad h \in L^1(G),$$

или

$$\langle \varphi \cdot \theta(f), \theta(h) \rangle = \langle c_1\chi_1 + \ldots + c_n\chi_n, \theta(h) \rangle.$$

Следовательно, $\varphi \cdot \theta(f) = c_1\chi_1 + \ldots c_n\chi_n$. □

Замечание. Пусть группа G компактна и $A = L^1(G)$. Поскольку $A^* \cdot A = L^\infty(G) * L^1(G) = C(G)$, в этом случае предложение 4.1 утверждает, что $C(G) = \overline{\operatorname{span}}\,\widehat{G}$. А это – коммутативный вариант C-теоремы Петера–Вейля.

Следствие 4.2. *При условиях предложения* 4.1 *алгебра A полупроста.*

Доказательство. Так как алгебра A имеет о.а.е., то множество $A^* \cdot A$ w^*-плотно в A^*. Поэтому из предложения 4.1 получаем, что $A^* = \overline{\operatorname{span}}^{w^*}\Sigma_A$. □

Теперь докажем следующее утверждение.

Теорема 4.3. *Пусть существует непрерывный гомоморфизм θ : $L^1(G) \to A$ с плотным образом. Следующие условия эквивалентны:*

a) *алгебра A слабо вполне непрерывна,*

b) *пространство Σ_A дискретно,*

c) *алгебра A вполне непрерывна,*

d) *в алгебре A полны одномерные ортогональные идемпотенты.*

Доказательство. a)$\Rightarrow$b). Если алгебра A слабо вполне непрерывна, то пространство Π_A дискретно по теореме 3.4. Поскольку hk-топология слабее, чем гельфандовская топология, получается, что пространство Σ_A тоже дискретно.

b)$\Rightarrow$c). Если пространство Σ_A дискретно, то алгебра A полупроста, в силу следствия 4.2. Пусть функция f из $L^1(G)$ такова, что $\widehat{f} \in C_{00}(\widehat{G})$. Тогда $\operatorname{supp} \widehat{\theta(f)}$ – конечное множество, и поэтому $R_{\theta(f)}$ – конечномерный оператор. В силу плотности множества $\{\theta(f) : f \in L^1(G), \widehat{f} \in C_{00}(\widehat{G})\}$ в A получаем, что R_a – компактный оператор для любого $a \in A$.

c)$\Rightarrow$d). Если алгебра A вполне непрерывна, то пространство Σ_A дискретно, и потому алгебра A полупроста в силу следствия 4.2. По следствию 2.9, $A = \overline{\operatorname{span}}\,\{Ae : e \in E_A\}$, где E_A есть множество всех минимальных (конечномерных) идемпотентов в A. В силу минимальности идемпотента $e \in E_A$ существует функционал $\varphi \in A^*$ такой, что $ae = \varphi(a)e$ для произвольных $a \in A$. Нетрудно видеть, что функционал φ мультипликативен, и поэтому $ae = \widehat{a}(\chi)e$ для некоторого $\chi \in \Sigma_A$. Заметим, что $\widehat{e}(\chi) = 1$ и $\widehat{e}(\lambda) = 0$ при $\lambda \neq \chi$. Обозначим этот элемент e через e_χ. Тогда легко видеть, что $(e_\chi : \chi \in \Sigma_A)$ – ортогональные одномерные идемпотенты и $A = \overline{\operatorname{span}}\,\{e_\chi : \chi \in \Sigma_A\}$.

d)$\Rightarrow$a) тривиально. □

Литература

1. I. Kaplansky, *Normed algebras.* — Duke Math. J., **16** (1949), 399–418.
2. M. Freundlich, *Completely continuous elements of a normed ring.* — Duke Math. J., **16** (1949), 273–283.
3. K. deLeew, I. Glicksberg, *Applications of almost periodic compactifications.* — Acta Math., **105** (1961), 63–97.
4. P. Civin, *Ideals in the second conjugate algebra of a group algebra.* — Math. Scand., **11** (1962), 161–174.
5. S. Sakai, *Weakly compact operators on operator algebras.* — Pacific J. Math., **14** (1964), 659–664.
6. H. Rosenthal, *Projections onto translation-invariant subspaces of $L_p(G)$.* — Mem. AMS, **63** (1966), 1–84.
7. F. Bonsall, *Compact operators from an algebraic standpoit.* — Glasgow Math. J., **8** (1967), 41–49.
8. C. Akemann, *Some mapping properties of the group algebra of a compact group.* — Pacific J. Math., **22** (1967), 1–8.

9. H. Reiter, *Classical Harmonic Analysis and Locally Compact Group.* Oxford Univ. Press (1968).
10. М. А. Наймарк, *Нормированные кольца.* Наука, М. (1968).
11. J. Alexander, *Compact Banach algebras.* — Proc. London Math. Soc., **18** (1968), 1–18.
12. М. И. Кадец, *Неопределенный интеграл от почти периодических функций в пространстве Банаха.* — Функц. анализ и его прилож., **3**, No. 3 (1969), 71–74.
13. R. Burckel, *Weakly Almost Periodic Functions on Semigroups.* Gordon and Breach, New York (1970).
14. Р. Болес Босит, *Обобщение двух теорем М. И. Кадеца о неопределенном интеграле абстрактных почти периодических функций.* — Мат. заметки, **9**, No. 3 (1971), 311–321.
15. А. А. Кириллов, *Элементы теории представлений.* Наука, М. (1972).
16. E. Granirer, *Exposed points of convex sets and weak sequential convergence.* — Mem. AMS, **123** (1972), 1–80.
17. F. Bonsall, J. Duncan, *Complete Normed Algebras.* Springer-Verlag, New York (1974).
18. H. Lacey, *The Isometric Theory of Classical Banach Spaces.* Springer-Verlag, New York (1974).
19. Н. Данфорд, Д. Шварц, *Линейные операторы.* Мир, М. (1974).
20. Ж. Диксмье, *C^*-алгебры и их представления.* Наука, М. (1974).
21. S. Watanabe, *A Banach algebra which is an ideal in its second dual space.* — Sci. Rep. Niigata Univ., Ser. **A11** (1974), 95–101.
22. Э. Хьюитт, К. Росс, *Абстрактный гармонический анализ.* Т. 1, Наука, М. (1975).
23. Э. Хьюитт, К. Росс, *Абстрактный гармонический анализ.* Т. 2, Наука, М. (1975).
24. S. Watanabe, *A Banach algebra which is an ideal in the second dual space.* — Sci. Rep. Niigata Univ., Ser. **A13** (1976), 43–48.
25. D. Johnson, *A characterization of compact groups.* — Proc. AMS, **74** (1979), 381–382.
26. M. Grosser, *$L^1(G)$ as an ideal in its second dual space.* — Proc. AMS, **73** (1979), 363–364.
27. J. Duncan, S. A. Hosseiniun, *The second dual of Banach algebra.* — Proc. Roy. Soc. Edinburgh, **A84** (1979), 309–325.
28. C. Akemann, S. Wright, *Compact action on C^*-algebras.* — Glasgow Math. J., **21** (1980), 143–149.
29. Ю. А. Брудный, Е. А. Горин, *Изометрические представления и дифференциальные неравенства.* ЯГУ, Ярославль (1981).
30. Ю. И. Любич, *Введение в теорию банаховых представлений групп.* Харьков (1985).
31. J. Gale, *Weakly compact homomorphisms and semigroups in Banach algebras.* — J. London Math. Soc., **45** (1992), 113–125.
32. A. Lau, A. Ülger, *Some geometric properties of the Fourier and Fourier–Stieltjes algebras of locally compact groups, Arens regularity and related problems.* — Trans. AMS, **337** (1993), 321–359.

33. A. Ülger, *Some results about the spectrum of commutative Banach algebras under the weak topology and applications.* — Monatsh. Math., **121** (1996), 353–379.

Mustafaev G. S. Complete continuity for a class of Banach algebras.

For the quotiens of group algebras, the elements are studied that yield a compact (left or right) multiplication operator. The spectrum of such an algebra is analyzed in the case where all such (left or right) multiplication operators are weakly compact.

Институт Математики
и Механики АН Азербайджана
hmustafayev@hotmail.com

Поступило 2 сентября 2001 г.