Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 282, 2001 г.

С. Я. Новиков

ПРОСТРАНСТВА ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ $l_{p,q}$ В ВЕРОЯТНОСТНЫХ ХАРАКТЕРИЗАЦИЯХ ОПЕРАТОРОВ СЛАБОГО ТИПА

§0. Введение

Мы будем рассматривать операторы $T : X \to L_0([0,1], \mathcal{M}, \mathbf{m})$ (не обязательно линейные), определенные на некотором квазибанаховом пространстве X со значениями в пространстве вещественных функций, измеримых по Лебегу. Известно, что исследование таких операторов существенно упрощается, если их удается профакторизовать через банахово или квазибанахово функциональное пространство. Теоремы о факторизации линейных и надлинейных операторов со значениями в L_0 были получены Е. Никишиным [1, 2] и Б. Морэ [3].

Общая схема получения факторизационных теорем изложена в работах [4, 5, 25, 6]. Она выглядит следующим образом:

1) получить описание множеств, ограниченных в каком-то смысле в некотором функциональном пространстве, используя пространства числовых последовательностей;

2) перевести полученное на предыдущем шаге описание на операторный язык, что и приводит к теоремам о факторизации;

3) используя геометрические свойства пространства X такие, как тип, котип и подобные им, выделить такие пространства, на которых любой оператор допускает факторизацию через то или иное пространство.

В данной работе будет показана реализация этой схемы с использованием на первом шаге пространств Лоренца числовых последовательностей $l_{p,q}$. Таким образом, при $0 < p < \infty$, $0 < q \leq p$ получены характеристические свойства последовательностей функций, входящих в множества, ограниченные в пространствах $L_{p,\infty}$ (теорема 3.4). Кроме того, с помощью последовательностей независимых случайных величин удается отличить операторы слабого типа (операторы, ограниченные в пространстве $L_{p,\infty}$)

от операторов, допускающих факторизацию через пространство $L_{p,\infty}$. Переходя затем к случаю $0 < p \le q \le \infty$, получаем характеризацию операторов, симметрично порядково ограниченных в пространствах $L_{p,r}$ для $0 < r \le \infty$ (следствие 4.5).

Особо выделены возможности усиления полученных результатов для множеств и операторов, инвариантных относительно сдвига.

Напомним определение вещественного квазибанахова пространства X. Так называется полное метризуемое вещественное векторное пространство, топология которого задается квазинормой $x \mapsto \|x\|$, удовлетворяющей следующим аксиомам:

$$\|x\| \ge 0, \quad \text{причем} \quad \|x\| = 0 \iff x = 0 \quad (x \in X),$$
$$\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\| \quad (\alpha \in \mathbb{R}, \quad x \in X),$$
$$\|x_1 + x_2\| \leqslant C(\|x_1\| + \|x_2\|) \quad (x_1,\, x_2 \in X)\,,$$

где $C \ge 1$ – некоторая константа, не зависящая от x_1 и x_2. Заметим, что, в отличие от классического неравенства треугольника, с увеличением количества слагаемых в последнем неравенстве константа C не сохраняется.

Квазинорма $\|\cdot\|_p$ пространства X называется p-нормой ($0 < p \le 1$), если для любого конечного набора элементов $x_1, \ldots, x_n \in X$ выполняется неравенство

$$\|x_1 + \ldots + x_n\|_p^p \le \|x_1\|_p^p + \ldots \|x_n\|_p^p\,.$$

Известная теорема Аоки–Ролевича утверждает, что если определить число p соотношением $C = 2^{1/p-1}$, то на квазинормированном пространстве X можно определить p-норму $\|\cdot\|_p$ так, что

$$\|x\|_p \le \|x\| \le 2^{1/p}\|x\|_p, \quad x \in X.$$

При этом метрика, задающая топологию пространства X, определяется соотношением $d(x_1, x_2) = \|x_1 - x_2\|_p^p$ [10, 11]. Класс множеств E, ограниченных в топологическом векторном пространстве X, и класс множеств, ограниченных по квазинорме ($\sup\limits_{e\in E}\|e\| < \infty$), совпадают. В частности, ограниченным является множество $B_X = \{x : \|x\| \le 1\}$.

Пусть $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ – квазибанаховы симметричные пространства вещественных числовых последовательностей, то есть полные линейные метрические пространства, квазинормы которых двумя дополнительными свойствами:

1) если $a = (a_n) \in \mathcal{A}$ и $|b_n| \le |a_n|$, $n = 1, 2, \ldots$, то $b \in \mathcal{A}$ и $\|b\| \le \|a\|$

2) инвариантность относительно координатных перестановок, то есть $\|\left(x_{\pi(i)}\right)\| = \|(x_i)\|$ для любой перестановки $\pi(i)$ натурального ряда.

Для функции $f \in L_0([0,1], \mathcal{M}, \mathbf{m})$ определены её функция распределения $d_f(\tau) = \mathbf{m}(t : |f(t)| > \tau)$, $\tau \ge 0$, и убывающая перестановка $f^*(t) = \inf\{\tau : d_f(\tau) < t\}$. Функции f и g называются равноизмеримыми (обозначение $f \sim g$), если $d_f(\tau) = d_g(\tau)$ для любого $\tau \ge 0$.

Набор функций $\{f_n(x)\}_{n=1}^N \subset L_0([0,1], \mathbf{m})$ называется *набором независимых функций*, если для любых интервалов на числовой прямой I_n, $n = 1, 2, \ldots, N$, справедливо равенство

$$\mathbf{m}\left(\bigcap_{n=1}^{N} \{x \in [0,1] : f_n(x) \in I_n\}\right) = \prod_{n=1}^{N} \mathbf{m}\{x \in [0,1] : f_n(x) \in I_n\}.$$

Бесконечная последовательность функций $\{f_n(x)\}_{n=1}^\infty$ называется *последовательностью* (или *системой*) *независимых функций*, если для любого $N = 1, 2, \ldots$ набор $\{f_n(x)\}_{n=1}^N$ является набором независимых функций.

Известно, что для любой последовательности $(f_n) \in L_0(\mathbf{m})$ существует последовательность $(F_n) \in L_0(\mathbf{m})$ независимых функций такая, что $F_n \sim f_n$, $n = 1, 2, \ldots$ [7, 8]. В дальнейшем последовательности измеримых функций (f_n) и (g_n) такие, что $f_n \sim g_n$, $n = 1, 2, \ldots$ будут называться *подобными*. Такие последовательности могут состоять из функций, определенных на различных пространствах с мерой.

Определения (множества, определяемые последовательностями).

a) Множество $U \subset L_0(\mathbf{m})$ называется $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$-*множеством*, если для любой последовательности $a \in \mathcal{A}$ и для любой последовательности функций $(f_n) \in U^{\mathbf{N}}$ имеем

$$(a_n f_n(t)) \in \mathcal{B} \quad \text{п.в.}$$

b) Множество $U \subset L_0(\mathbf{m})$ называется *независимым* $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$-*множеством*, если для любой последовательности $a \in \mathcal{A}$, для любой последовательности $(f_n) \in U^{\mathbf{N}}$ и для любой последовательности $(X_n) \in (L_0(\mathbf{m}))^{\mathbf{N}}$ *независимых* функций таких, что

$f_n \sim X_n$, $n = 1, 2, \ldots$ имеем

$$(a_n\, X_n(t)) \in \mathcal{B} \quad \text{п.в.}$$

c) Множество $U \subset L_0(\mathbf{m})$ называется *свободным* $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$-*множеством*, если для любой последовательности $a \in \mathcal{A}$, для любой последовательности $(f_n) \in U^{\mathbf{N}}$ и для любой последовательности $(F_n) \in (L_0(\mathbf{m}))^{\mathbf{N}}$ функций таких, что $f_n \sim F_n$, $n = 1, 2, \ldots$ имеем

$$(a_n\, F_n(t)) \in \mathcal{B} \quad \text{п.в.}$$

В таком общем виде множества, определяемые пространствами последовательностей, видимо, вводятся впервые. Для конкретных пространств $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ некоторые из них получили внутреннее описание. Так, счетные (l_1, c_0)-множества описаны в [1] (см. также [7]) под названием A-системы; счетные $(\mathcal{A}, l_1)$-множества называются системами абсолютной сходимости для $\mathcal{A}$ и для $\mathcal{A} = l_p$ активно изучались [7]; в [3] описаны (l_p, l_p)-множества, а понятие, близкое к понятию (l_p, l_∞)-множества, рассматривалось в [5]. Подробнее сравнение полученных ранее результатов с результатами настоящей работы проведено ниже.

Обозначим через $\mathcal{F}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$, $\mathcal{I}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$, $\mathcal{S}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ классы свободных, независимых и $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$-множеств соответственно. Непосредственно из определений следуют включения

$$\mathcal{F}(\mathcal{A}, \mathcal{B}) \subset \mathcal{I}(\mathcal{A}, \mathcal{B})\,; \quad \mathcal{F}(\mathcal{A}, \mathcal{B}) \subset \mathcal{S}(\mathcal{A}, \mathcal{B})\,. \tag{0.1}$$

Отождествляя стандартным образом полуинтервал $[0, 1)$ с окружностью $\mathbb{T} = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$, получаем возможность ввести понятие множества, инвариантного относительно сдвига. Каждая точка $t \in \mathbb{T}$ определяет линейный *оператор сдвига* $(S_t x)(s) = x(t+s)$, где имеется в виду сложение mod 1.

Определение. *Множество $U \subset L_0(\mathbb{T})$ называется инвариантым относительно сдвига, если $S_t(U) \subset U$ для любого $t \in \mathbb{T}$.*

Оператор T, определенный на некотором инвариантном относительно сдвига пространстве $X \subset L_0$ и принимающий значения в L_0, называется инвариантным относительно сдвига, если $T \circ S_t = S_t \circ T$ для любого $t \in \mathbb{T}$.

Примером множества, инвариантного относительно сдвига, является ограниченное подмножество симметричного функционального пространства, в частности, классического пространства L_p, $0 < p \le \infty$, а примером оператора, инвариантного относительно сдвига, является оператор свертки.

Пусть X – квазибанахово пространство, $B_X = \{x : \|x\| \le 1\}$, и пусть $T : X \to L_0$.

Определение (надлинейный оператор). *Оператор $T : X \to L_0$ называется надлинейным, если он положительно однородный и сублинейный, то есть*

$$1) \qquad |T(\gamma\, x)| = |\gamma||Tx|, \quad x \in X, \quad \gamma \in \mathbb{R};$$
$$2) \qquad |T(x_1 + x_2)| \le |Tx_1| + |Tx_2| \quad \text{для любых} \ \ x_1,\ x_2 \in X.$$

С помощью теоремы Хана–Банаха–Канторовича [32, теорема 0.11] нетрудно показать, что данное определение надлинейного оператора эквивалентно тому, которое использовал Е. М. Никишин [1].

Определение (надлинейный оператор по Никишину). *Оператор $T : X \to L_0$ называется надлинейным, если для любого $x \in X$ существует линейный оператор $\mathcal{L}_x : X \to L_0$ такой, что*

$$1) \qquad \mathcal{L}_x\, x = Tx, \quad 2) \quad |\mathcal{L}_x\, y| \le |T\, y| \ \ \text{для любого} \qquad y \in X.$$

Если X является квазибанаховой решеткой и линейный оператор $\mathcal{L}_x$ является положительным для любого $x \in X$, то и надлинейный оператор T называется положительным.

Примеры надлинейных операторов [1]:

1) Любой линейный оператор $T : X \to L_0$ является надлинейным.

2) Пусть система $\{\varphi_n\} \in (L_0)^{\mathbf{N}}$ является системой сходимости для некоторого пространства последовательностей $\mathcal{A}$, то есть ряд $\sum_n a_n\, \varphi_n(x)$ сходится почти всюду на $[0,1]$, как только $a = (a_n) \in \mathcal{A}$. Оператор мажоранты частных сумм $S^* : \mathcal{A} \to L_0$, определенный равенством

$$S^*(a) = \sup_{1 \le N < \infty} \left| \sum_{n=1}^{N} a_n \varphi_n(x) \right|,$$

является надлинейным.

3) Пусть Q – измеримое сохраняющее меру преобразование отрезка $[0,1]$ на себя. Оператор $T : L_1 \to L_0$, определенный равенством

$$Tf = \sup_{N\geq 1} \frac{1}{N} \left| \sum_{n=1}^{N} f\left(Q^n x\right) \right|,$$

является надлинейным.

4) Максимальное преобразование Харди $H^* : L_1 \to L_0$, определенное формулой

$$\left(H^* f\right)(t) = \sup_{(\alpha,\beta)\ni t} \frac{1}{\beta - \alpha} \left| \int\limits_{\alpha}^{\beta} f(x)\, dx \right|.$$

5) Если $\mathcal{L}_n : X \to L_0$ – последовательность линейных операторов, то оператор $T :\ x \to \sup\limits_n |\mathcal{L}_n x|$ является надлинейным оператором.

Пространство L_0, область значений рассматриваемых операторов, наделено топологией сходимости по мере и является метрическим пространством.

Оно не является локально ограниченным и поэтому не является квазинормированным. Функционал, который определяет метрику в этом пространстве,

$$\|f\|_0 = \int\limits_{[0,1]} \frac{|f(t)|}{1+|f(t)|}\, d\mathbf{m}(t),$$

не является однородным. Фундаментальную систему окрестностей нуля образуют множества вида

$$V_\varepsilon = \left\{ f \in L_0 : \mathbf{m}[|f| > \varepsilon] < \varepsilon \right\}, \quad 0 < \varepsilon < 1,$$

или

$$U(A, \varepsilon) = \left\{ f \in L_0 : \|f \mathcal{X}_A\|_0 < \varepsilon \right\}, \quad A \in \mathcal{M}, \quad 0 < \varepsilon < 1.$$

(Символом $\mathcal{X}_A$ обозначена характеристическая функция множества A.)

Определение (множество, ограниченное в пространстве L_0). *Множество $E \subset L_0$ называется ограниченным, если для каждого $\varepsilon > 0$ существует $R > 0$ такое, что $\mathbf{m}[|f| > R] < \varepsilon$ для всех $f \in E$.*

Подробнее о пространстве L_0 и связанных с ним понятиях см. [12, 13].

Лемма 0.1 (ограниченность и непрерывность однородного оператора). *Пусть оператор $T : X \to L_0$ удовлетворяет следующему условию однородности:*

$$|T(\gamma\, x)| = |\gamma||Tx|, \quad x \in X, \quad \gamma \in \mathbb{R}.$$

Следующие утверждения эквивалентны:

1) *Образ $T\,(B_X)$ ограничен в L_0.*
2) *Образ $T\,(A)$ каждого множества, ограниченного в X, ограничен в L_0.*
3) *Оператор T непрерывен в 0, т.е. $Tx_n \to 0$ для $x_n \to 0$, или, что равносильно, для каждой окрестности нуля W в L_0 существует окрестность нуля V в X такая, что $T(V) \subset W$.*
4) *Для любого $\varepsilon \in (0, 1]$ существует число $C_\varepsilon > 0$ такое, что*

$$(Tx)^*(\varepsilon) \le C_\varepsilon \|x\|, \quad x \in X.$$

Если, кроме того, оператор T надлинейный, то каждое из утверждений 1)–4) эквивалентно следующему:

5) *оператор $x \mapsto |Tx|$ непрерывен в произвольной точке $x \in X$: $|Tx_n| \to |Tx|$, если $x_n \to x$.*

Доказательство. Эквивалентность 1) $\iff$ 2) очевидна.
2) $\Longrightarrow$ 3) Пространства X и L_0 метризуемы, поэтому существует

$$(\gamma_n)\,,\ \gamma_n > 0,\ \gamma_n \to \infty \colon \gamma_n\, a_n \to 0$$

[16, теорема 1.28]. Так как множество $(\gamma_n\, a_n)$, $n = 1, 2, \ldots$, ограничено в $\mathcal{A}$, то множество $(T\,(\gamma_n\, a_n))$, $n = 1, 2, \ldots$, ограничено в $L_0(\mathbf{m})$. Следовательно, $Tx_n = \gamma_n^{-1} T\,(\gamma_n\, a_n) \to 0$ [16, теорема 1.30].
3) $\Longrightarrow$ 2) Пусть оператор T непрерывен в нуле, тогда и оператор $|T| : x \mapsto |Tx|$ непрерывен в нуле. Пусть E ограничено в X, W – окрестность нуля в $L_0(\mathbf{m})$. Существует окрестность нуля V в X такая, что $|T|(V) \subset W$. Множество E ограничено в X, поэтому $E \subset tV$ при достаточно больших $t > 0$. Имеем:

$$|T|(E) \subset |T|(tV) = t|T|(V) \subset tW,$$

т.е. $|T|(E)$ ограничено в $L_0(\mathbf{m})$. Следовательно, и $T(E)$ ограничено в $L_0(\mathbf{m})$.
1) $\iff$ 4) Имеем цепочку эквивалентностей: 1) $\iff$ для каждого $\varepsilon > 0$ существует $C_\varepsilon > 0$ такое, что $d_{Tx}\,(C_\varepsilon) < \varepsilon$ для всех $x \in B_X$ $\iff$ для каждого $\varepsilon > 0$ существует $C_\varepsilon > 0$ такое, что $\sup\limits_{B_X}(Tx)^*(\varepsilon) \le$

C_ε. Однородность оператора и квазинормы позволяет получить из доказанного условие 4).

3) $\iff$ 5) (для надлинейного оператора). Надлинейный оператор T имеет свойство $|T(x-y)| \geq ||Tx|-|Ty||$, $x,\, y \in X$ [1], используя которое, легко установить требуемую эквивалентность. □

§1. Факторизация операторов через пространство $L_{p,\infty}$

Этот параграф содержит, в основном, известные результаты о факторизации надлинейных операторов через пространства $L_{p,\infty}$ (см., например [6, III.H]) и их обобщения на положительно однородные операторы. Мы приводим здесь эти результаты для мотивировки постановок решаемых задач и для возможности сранения операторов, факторизуемых через $L_{p,\infty}$, с операторами слабого типа p.

Напомним определения пространств Лоренца $L_{p,q}$ [20, 19]. Пусть $0<p<\infty$, $0<q\leq\infty$, $(\mathcal{J},\nu)$ – пространство с σ-конечной мерой,

$$L_{p,q}(\mathcal{J},\nu) = \Bigg\{ x \in L_0(\mathcal{J},\nu) : \|x\| =$$

$$= \Bigg[\int\limits_0^{\nu(\mathcal{J})} (x^*(t))^q \, d(t^{q/p}) \Bigg]^{1/q} < \infty \Bigg\} \quad \text{для} \quad q<\infty;$$

$$L_{p,\infty}(\mathcal{J},\nu;) = \big\{ x \in L_0(\mathcal{J},\nu) : \|x\| = \sup_{0<t<\nu(\mathcal{J})} x^*(t)\, t^{1/p} < \infty \big\}.$$

Функционалы, определяющие топологию этих пространств, являются, вообще говоря, квазинормами. Для $p=q$ имеем $L_{p,q} = L_p$; если $q_1<q_2$, то $L_{p,q_1} \subset L_{p,q_2}$. Пространства $L_{p,q}(\mathbf{N})$ обозначаются через $l_{p,q}$.

Подробнее

$$l_{p,q} = \Bigg\{ a \in \mathbb{R}^\infty : \ \|a\| = \Bigg[\sum_{i=1}^{\infty} (a_i^*)^q \ i^{q/p-1} \Bigg]^{1/q} \asymp$$

$$\asymp \Bigg[\sum_{i=1}^{\infty} (a_i^*)^q \, \Big(i^{q/p} - (i-1)^{q/p} \Big) \Bigg]^{1/q} < \infty \Bigg\} \quad \text{при} \quad q<\infty;$$

$$l_{p,\infty} = \big\{ a \in \mathbb{R}^\infty : \|a\| = \sup_i a^*(i)\, i^{1/p} < \infty \big\}.$$

Лемма 1.1 ($\mathcal{S}\,(l_1,\,l_\infty)$-множества). *Пусть $U \subset L_0([0,1])$. Следующие утверждения эквивалентны:*

1) *существует функция $g \in L_0$, $g > 0$, такая, что*

$$\left\| \frac{f}{g} \right\|_{1,\infty} \le 1, \quad f \in U;$$

2) *для любого $\varepsilon \in (0,1)$ существуют измеримые подмножества $\Omega_\varepsilon \subset [0,1]$ и $C_\varepsilon > 0$ такие, что*

$$\mathbf{m}\,(\Omega_\varepsilon) \ge 1 - \varepsilon \quad \text{и} \quad \|f \cdot \mathcal{X}_{\Omega_\varepsilon}\|_{1,\infty} \le C_\varepsilon, \quad f \in U;$$

3) *для (счетной) последовательности $(f_i) \in U^{\mathbf{N}}$ и для каждой последовательности $a = (a_i) \in l_1$ имеем $\sup\limits_i |a_i\, f_i| < \infty$ п.н.; т.е. $U \in \mathcal{S}\,(l_1,\,l_\infty)$;*

4) *для любого $\varepsilon \in (0,1]$ существует $C_\varepsilon > 0$ такое, что для каждой финитной последовательности (α_i) вещественных чисел имеем*

$$\left(\sup_i |\alpha_i\, f_i| \right)^* (\varepsilon) \le C_\varepsilon \sum_i |\alpha_i|\,, \quad f_i \in U.$$

Доказательство. 1) $\Longrightarrow$ 2) Положим $\Omega_C := \{\omega \in [0,1] : g(\omega) \le C\}$, $C > 0$. По теореме Лузина, для каждого $\varepsilon > 0$ существует $C_\varepsilon > 0$ такое, что $\mathbf{m}\,(\Omega_{C_\varepsilon}) \ge 1 - \varepsilon$. Полагая $\Omega_\varepsilon := \Omega_{C_\varepsilon}$, имеем

$$\frac{\|f \mathcal{X}_{\Omega_\varepsilon}\|}{C_\varepsilon} \le \left\| \frac{f}{g} \cdot \mathcal{X}_{\Omega_\varepsilon} \right\| \le 1, \quad f \in U.$$

2) $\Longrightarrow$ 1) По условию, для каждого натурального n существует измеримое множество Ω_n такое, что $\mathbf{m}\,([0,1] \setminus \Omega_n) < 1/n$ и $\|f \mathcal{X}_{\Omega_n}\| \le C_{1/n}$.

Положим

$$F_1 := \Omega_{\frac{1}{2}}, \quad F_2 := F_1^C \Omega_{\frac{1}{3}}, \dots, F_n := F_1^C F_2^C \dots F_{n-1}^C \Omega_{\frac{1}{n+1}}, \; \dots .$$

Определенные таким образом множества F_n, $n = 1, 2, \dots$ дизъюнктны и $\mathbf{m}\,(\bigcup F_n) = 1$. На $\bigcup F_n$ определим счетнозначную измеримую функцию

$$g(\omega) := \sum_k 2^k C_{\frac{1}{k+1}} \mathcal{X}_{F_k}(\omega).$$

Имеем

$$\mathbf{m}\left(\omega \in \bigcup F_n : \frac{|f(\omega)|}{g(\omega)} \geq y\right) = \sum_n \mathbf{m}\left(\omega \in F_n : \frac{|f(\omega)|}{2^n C_{\frac{1}{n+1}}} \geq y\right) \leq$$
$$\leq \sum_n \frac{C_{\frac{1}{n+1}}}{2^n C_{\frac{1}{n+1}} y} = \frac{1}{y}.$$

2) $\Longrightarrow$ 3) [1, теорема 14]. Для произвольного $\delta > 0$ и произвольной последовательности $a = (a_n) \in l_1$ имеем неравенство

$$\mathbf{m}\left(\omega \in \Omega_\varepsilon : \sup |a_n f_n(\omega)| \geq \delta\right) \leq \sum_n \frac{C_\varepsilon}{\delta} |a_n|. \qquad (*)$$

Так как $\varepsilon > 0$ произвольно и $\mathbf{m}(\Omega_\varepsilon) \geq 1 - \varepsilon$, то и

$$\mathbf{m}\left(\omega \in [0,1] : \sup |a_n f_n(\omega)| = \infty\right) = 0.$$

2) $\Longrightarrow$ 4) Неравенство $(*)$, полученное на предыдущем шаге для финитной последовательности скаляров (α_n), может быть записано в виде

$$\left(\sup |\alpha_n f_n|\right)^* (\varepsilon) \leq \frac{C'_\varepsilon}{\varepsilon} \sum |a_n| = C''_\varepsilon \sum |a_n|.$$

4) $\Longrightarrow$ 2) Условие 4) обеспечивает ограниченность в L_0 выпуклого множества $\mathcal{C}$, состоящего из положительных функций, определенного равенством

$$\mathcal{C} := \Big\{ f_\alpha : f_\alpha = \sup_i |\alpha_i f_i|, \ f_i \in U, \ \sum |\alpha_i| \leq 1,$$
$$(\alpha_i) \text{ -- финитная последовательность} \Big\}.$$

По теореме Морэ [3, теорема 13] (см. также [12, лемма 5.5]), для любого $\varepsilon > 0$ существует $\Omega_\varepsilon \subset [0,1]$ такое, что $\mathbf{m}([0,1] \setminus \Omega_\varepsilon) \leq 2\varepsilon$ и

$$\int_{\Omega_\varepsilon} f \, d\mathbf{m} \leq 2 \sup_{f \in C} f^*(\varepsilon), \quad f \in \mathcal{C}.$$

Отсюда, с учетом условия 4), получаем

$$\|f \mathcal{X}_{\Omega_\varepsilon}\|_{1,\infty} \leq \int_{\Omega_\varepsilon} f \, d\mathbf{m} \leq 2C_\varepsilon, \quad f \in \mathcal{C}.$$

Импликация 3) $\Longrightarrow$ 4) будет доказана ниже (см. замечание после теоремы 2.1.) $\square$

Лемма 1.2. *Пусть $f_1, \dots, f_n \in L_0(\mathbb{T}, \mathbf{m})$. Тогда функции*

$$X_j\left(s_1, \dots, s_n, \omega\right) := f_j(\omega + s_j),\ j = 1, \dots, n,$$

определенные на $\left(\mathbb{T}^{n+1}, \mathbf{m}^{n+1}\right)$, являются независимыми и $X_j \sim f_j$, $j = 1, \dots, n$.

Доказательство. Пусть $\mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_n$ – произвольные борелевские множества в $\mathbb{R}$. Тогда, учитывая инвариантность меры Лебега относительно сдвига, имеем

$$\mathbf{m}^{n+1}\left(\bigcap_{j=1}^{n}\left\{(s_1, \dots, s_n, \omega) \in \mathbb{T}^{n+1}:\ f_j(\omega + s_j) \in \mathcal{B}_j\right\}\right) =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{T}^{n+1}} \prod_{j=1}^{n} \mathcal{X}_{B_j}\left(f_j(\omega + s_j)\right)\, d\mathbf{m}^{n+1}(s_1, \dots, s_n, \omega) =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{T}} d\mathbf{m}(\omega) \int\limits_{\mathbb{T}^n} \prod_{j=1}^{n} \mathcal{X}_{B_j}\left(f_j(\omega + s_j)\right)\, d\mathbf{m}^{n}(s_1, \dots, s_n) =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{T}} d\mathbf{m}(\omega) \int\limits_{\mathbb{T}^n} \prod_{j=1}^{n} \mathcal{X}_{B_j}\left(f_j(\omega_j)\right)\, d\mathbf{m}^{n}(\omega_1, \dots, \omega_n) =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{T}} d\mathbf{m}(\omega) \prod_{j=1}^{n} \int\limits_{\mathbb{T}} \mathcal{X}_{B_j}\left(f_j(\omega_j)\right)\, d\mathbf{m}(\omega_j) =$$

$$= \prod_{j=1}^{n} \int\limits_{\mathbb{T}} \mathcal{X}_{B_j}\left(f_j(\omega)\right)\, d\mathbf{m}(\omega) = \prod_{j=1}^{n} \mathbf{m}\left(\{\omega \in \mathbb{T} : f_j(\omega) \in \mathcal{B}_j\}\right) =$$

$$= \prod_{j=1}^{n} \mathbf{m}^{n+1}\left(\left\{(s_1, \dots, s_n, \omega) \in \mathbb{T}^{n+1}:\ f_j(\omega + s_j) \in \mathcal{B}_j\right\}\right).$$

Если положить $\mathcal{B}_k = \mathbb{R}$ при всех $k \neq j$, получим $X_j \sim f_j$, $j = 1, \dots, n$. Если множества $\mathcal{B}_j$ – произвольные борелевские, то полученное равенство выражает независимость функций (или случайных величин, если пользоваться вероятностной терминологией) $X_1, \dots, X_n$. $\square$

Следствие 1.3. *Если $E_1, \dots, E_n \in \mathcal{M}(\mathbb{T})$ (измеримые подмножества окружности $\mathbb{T}$), то существуют два набора чисел*

$$\left(s_1^{'}, \dots, s_n^{'}\right) \in \mathbb{T}^n \quad \text{и} \quad \left(s_1^{''}, \dots, s_n^{''}\right) \in \mathbb{T}^n$$

такие, что

$$\mathbf{m}\Big(\bigcap_{j=1}^{n}(E_j - s_j^{'})\Big) \le \prod_{j=1}^{n} \mathbf{m}(E_j) \le \mathbf{m}\Big(\bigcap_{j=1}^{n}(E_j - s_j^{''})\Big).$$

Доказательство. Возьмем в лемме $f_j = \mathcal{X}_{E_j}$, $j = 1, \dots, n$. Тогда

$$X_j\,(s_1, \dots, s_n, \omega) := \mathcal{X}_{E_j - s_j}(\omega),\ j = 1, \dots, n,$$

и, следовательно,

$$\mathbf{m}^{n+1}\Big(\Big\{(s_1, \dots, s_n, \omega) : \omega \in \bigcap_{j=1}^{n}(E_j - s_j)\Big\}\Big) = \prod_{j=1}^{n} \mathbf{m}(E_j).$$

После этого существование наборов

$$\left(s_1^{'}, \dots, s_n^{'}\right) \in \mathbb{T}^n \quad \text{и} \quad \left(s_1^{''}, \dots, s_n^{''}\right) \in \mathbb{T}^n$$

обосновывается с помощью теоремы Фубини. □

Следствие 1.4. *Если множество $U \subset L_0(\mathbb{T})$ инвариантно относительно сдвига, то каждое из утверждений леммы* 1.1 *эквивалентно следующему:*
5) *множество U ограничено в пространстве $L_{1,\infty}(\mathbb{T})$.*

Доказательство. То, что 5) влечет 1) из леммы 1.1, очевидно. Покажем, что 1) $\Longrightarrow$ 5). Для функции $g \in L_0(\mathbb{T})$ существует измеримое $E \subset \mathbb{T}$ такое, что $\mathbf{m}(E) > 1/2$ и сужение функции g на E ограничено: существует постоянная $C_E > 0$, для которой $|g \cdot \mathcal{X}_E| \le C_E$. Из условия 1) получаем неравенство

$$\mathbf{m}\,(\omega : |f \cdot \mathcal{X}_E(\omega)| > a) \le \frac{C_E}{a}, \quad a > 0, \quad f \in U.$$

По предыдущему следствию, существует $s \in \mathbb{T}$ такое, что

$$\mathbf{m}\,(\omega \in E : |f(\omega + s)| > a) \ge$$

$$\ge \mathbf{m}(E) \cdot \mathbf{m}\,(\omega \in \mathbb{T} : |f(\omega)| > a) \ge \frac{1}{2}\mathbf{m}\,(\omega \in \mathbb{T} : |f(\omega)| > a)\,.$$

Отсюда с учетом инвариантности множества U относительно сдвига получаем, что

$$\mathbf{m}\,(\omega \in \mathbb{T} : |f(\omega)| > a) \le \frac{2C_E}{a}, \quad a > 0, \quad f \in U. \ \square$$

Следствие 1.5. ($\mathcal{S}\,(l_p,\, l_\infty)$-множества). *Пусть $0 < p < \infty$, $U \subset L_0$. Следующие утверждения эквивалентны:*

1) *Существует функция $g \in L_0$, $g > 0$, такая, что*

$$\left\| \frac{f}{g} \right\|_{p,\infty} \le 1, \quad f \in U;$$

2) *для каждого $\varepsilon \in (0,1)$ существуют измеримое подмножество $\Omega_\varepsilon \subset [0,1]$ и постоянная $C_\varepsilon > 0$ такие, что*

$$\mathbf{m}\,(\Omega_\varepsilon) \ge 1 - \varepsilon \quad \text{и} \quad \|f \cdot \mathcal{X}_{\Omega_\varepsilon}\|_{p,\infty} \le C_\varepsilon, \quad f \in U;$$

3) *для любой (счетной) последовательности (f_i), $f_i \in U$, и для любой последовательности $a = (a_i) \in l_p$ имеем $\sup\limits_i |a_i\, f_i| < \infty$ почти всюду; т.е. $U \in \mathcal{S}\,(l_p,\, l_\infty)$;*
4) *для каждого $\varepsilon \in (0,1]$ существует $C_\varepsilon > 0$ такое, что для каждой финитной последовательности (α_i) вещественных чисел имеем*

$$\left(\sup_i |\alpha_i\, f_i| \right)^* (\varepsilon) \le C_\varepsilon \left(\sum_i |\alpha_i|^p \right)^{1/p}, \quad f_i \in U.$$

5) *Если множество $U \subset L_0$ инвариантно относительно сдвигов, то каждое из утверждений 1)–4) эквивалентно следующему: множество U ограничено в пространстве $L_{p,\infty}$.*

Доказательство непосредственно следует из леммы 1.1 и следствия 1.4, если заметить, что для

$$p > 0,\ f \in L_{p,\infty} \iff |f|^p \in L_{1,\infty},\ a \in l_p \iff (|a_i|^p) \in l_1. \quad \square$$

Интересно сравнить только что сформулированное следствие с результатами Б. Морэ и Ж. Пизье. Первым автором получено такое описание $\mathcal{S}\,(l_p,\, l_p)$-множеств [3, следствие 15]: *Пусть $0 < p \le \infty$, $U \subset L_0$. Следующие утверждения эквивалентны:*

1) *Существует функция $g \in L_0$, $g > 0$ такая, что*

$$\left\| \frac{f}{g} \right\|_p \le 1, \quad f \in U;$$

2) *для каждого $\varepsilon \in (0,1)$ существуют измеримые множества $\Omega_\varepsilon \subset [0,1]$ и $C_\varepsilon > 0$ такие, что*

$$\mathbf{m}(\Omega_\varepsilon) \ge 1 - \varepsilon \quad и \quad \|f \cdot \mathcal{X}_{\Omega_\varepsilon}\|_p \le C_\varepsilon, \quad f \in U;$$

3) *для каждого $\varepsilon \in (0,1]$ существует $C_\varepsilon > 0$ такое, что для каждого финитного набора (α_i) вещественных чисел имеем*

$$\left(\Big(\sum_i |\alpha_i f_i|^p \Big)^{1/p} \right)^*(\varepsilon) \le C_\varepsilon \Big(\sum_i |\alpha_i|^p \Big)^{1/p}.$$

В работе [5, теорема 1.1] доказана теорема о подмножествах пространства L_r для $r > 0$.

Пусть $0 < r < p < \infty$. Пусть I некоторое множество индексов и пусть $\{x_i | i \in I\}$ – некоторое подмножество в $L_r(\mathbf{m})$. Следующие утверждения эквивалентны.
1) *Существует константа $C > 0$ такая, что для всех финитных наборов $(\alpha_i)_{i \in I}$ вещественных чисел имеем*

$$\left\| \sup_i |\alpha_i x_i| \right\|_{L_r(\mathbf{m})} \le C \Big(\sum_i |\alpha_i|^p \Big)^{1/p}.$$

2) *Существуют константа $C' > 0$ и функция $f \in L_1(\mathbf{m})$, $f \ge 0$, $\int\limits_{[0,1]} f\, d\mathbf{m} \le 1$, такие, что $\{f = 0\} \subset \bigcap_i \{x_i = 0\}$ и*

$$\left\| x_i f^{-1/r} \right\|_{L_{p,\infty}(\nu)} \le C', \quad i \in I,$$

где $\nu(E) = \int\limits_E f\, d\mathbf{m}$, $E \in \mathcal{M}$.

Обозначение. Множество плотностей $f \in L_1(\mathbf{m})$, $f \ge 0$, $\int\limits_{[0,1]} f\, d\mathbf{m} \le 1$ будет обозначаться через $D(\mathbf{m})$.

Наряду с оператором $T : X \to L_0$ мы будем рассматривать оператор $\widetilde{T} : X^{\mathbf{N}} \to (L_0)^{\mathbf{N}}$, определенный следующим образом $\widetilde{T}(x_n) := (Tx_n)$. Такие операторы широко используются в теории абсолютно суммирующих операторов [24, 25]. Для его описания удобно ввести пространства функциональных последовательностей:

$$L_0(l_\infty) = \left\{ (f_i) \in (L_0)^{\mathbf{N}} : \sup_i |f_i| < \infty \text{ почти всюду} \right\};$$

$$L_{p,q}(l_r) = \left\{ (f_i) \in (L_{p,q})^{\mathbf{N}} : \|(f_i(t))\|_r \in L_{p,q} \right\},$$

$$0 < p < \infty, \quad 0 < q \leq \infty, \quad r > 0;$$

$$\mathcal{A}(X) = \left\{ (x_i) \in X^{\mathbf{N}} : (\|x_i\|_X) \in \mathcal{A} \right\}.$$

Теорема 1.6 [6. Предложение III.H.5]. *Пусть $0 < p < \infty$ и пусть $T : X \to L_0$ удовлетворяет следующему условию однородности:*

$$|T(\gamma\, x)| = |\gamma||Tx|, \quad x \in X, \quad \gamma \in \mathbb{R}.$$

Следующие утверждения эквивалентны:

1) *Существует функция $g \in L_0$, $g > 0$ такая, что*

$$\left\| \frac{Tx}{g} \right\|_{p,\infty} \leq 1, \quad x \in B_X.$$

2) *Оператор $\widetilde{T}$ отображает пространство $l_p(X)$ в пространство $L_0\,(l_\infty)$.*
3) *Для каждого $\varepsilon \in (0,1]$ существует $C_\varepsilon > 0$ такое, что для каждой финитной последовательности $x_i \in X$ имеем*

$$\left(\sup_i |T\, x_i| \right)^* (\varepsilon) \leq C_\varepsilon \left(\sum_i \|x_i\|^p \right)^{1/p}.$$

4) *Оператор T допускает факторизацию вида*

$$X \xrightarrow{T_1} L_{p,\infty}(\mathbf{m}) \xrightarrow{M_g} L_0(\mathbf{m}),$$

где M_g – (ограниченный) оператор умножения на функцию $g \in L_0$, $g > 0$, и оператор T_1 ограничен.
5) *Если оператор T инвариантен относительно сдвига, то каждое из утверждений 1)–4) эквивалентно тому, что оператор T является ограниченным из X в $L_{p,\infty}$.*

Доказательство. Лемму 1.1 применим к множеству $T\,(B_X)$. Получим, что для каждого $\varepsilon \in (0,1]$ существует $C_\varepsilon > 0$ такое, что для каждой финитной последовательности $(\alpha_i) \in \mathbb{R}^{\mathbf{N}}$ выполняется неравенство

$$\left(\sup_i |\alpha_i\, T x_i|\right)^* (\varepsilon) \le C_\varepsilon \left(\sum_i |\alpha_i|^p\right)^{1/p}, \quad (x_i) \in B_X^{\mathbf{N}}.$$

Если $z_i \in X$, $z_i \neq 0$, то $z_i/\|z_i\| \in B_X$, и в качестве α_i следует взять $\|z_i\|$. Кроме того, следует заметить, что если оператор T инвариантен относительно сдвига, то и множество $T(B_X)$ инвариантно относительно сдвига. □

Замечание. В настоящей работе среди прочего будет дан ответ на следующий вопрос: как изменятся утверждения 4) и 5), если в утверждении 1) функция g лежит в L_∞, а пространство $l_p(X)$ в утверждении 2) заменить на пространство Лоренца $l_{p,q}(X)$?

Следствие 1.7. *Пусть X – квазибанахова решетка, в которой выполнено следующее условие: существует константа $C > 0$ такая, что для всех конечных наборов (x_i) элементов X имеем*

$$\left\|\sup_i |x_i|\right\| \le C \left(\sum_i \|x_i\|^p\right)^{1/p}. \qquad (p\text{-sup})$$

Тогда каждый положительный ограниченный надлинейный оператор $T : X \to L_0$ удовлетворяет условиям теоремы, и, следовательно, допускает факторизацию через пространство $L_{p,\infty}$.

Доказательство. Для положительного надлинейного оператора T справедливо неравенство [1, лемма 3.2]:

$$\sup_{1\le i\le n} |T x_i| \le T\left(\sup_{1\le i\le n} |x_i|\right), \quad x_1, \dots, x_n \in X, \quad n = 1, 2, \dots, n.$$

Если $\varepsilon > 0$, то

$$\left(\sup_{1\le i\le n} |T x_i|\right)^* (\varepsilon) \le T\left(\sup_{1\le i\le n} |x_i|\right)^* (\varepsilon) \le C_\varepsilon \left\|\sup_i |x_i|\right\| \le$$

$$\le C_\varepsilon\, C \left(\sum_i \|x_i\|^p\right)^{\frac{1}{p}}, \quad x_1, \dots, x_n \in X, \quad n = 1, 2, \dots, n.$$

В проведенных выкладках использована лемма 0.1.

Таким образом, получаем выполнение утверждения 3) из теоремы. □

Приведем примеры квазибанаховых решеток, в которых (p-sup)-условие выполнено:

1) в произвольной банаховой решетке с $p = 1$;

2) в банаховой решетке X для $p > 1$ (p-sup)-условие эквивалентно верхней p-оценке для дизъюнктных элементов [14. 1.f.6]: существует константа $C > 0$ такая, что для любого набора попарно дизъюнктных элементов $\{x_i\}$ в X имеем

$$\left\| \sum_{i=1}^{n} x_i \right\| \leq C \left(\sum_{i=1}^{n} \|x_i\|^p \right)^{1/p}. \qquad (p\text{-ue})$$

Для L_p, $p > 0$, неравенство (p-ue) очевидно и, таким образом, для $p \geq 1$ получаем теорему Никишина [1, теорема 3], которая утверждает возможность факторизации положительного надлинейного оператора, определенного на пространстве L_p, $p \geq 1$, через пространство $L_{p,\infty}$.

3) В пространствах $L_{p,q}$, $1 < p < q < \infty$ выполнено неравенство (p-ue) [31, 30].

4) В пространствах $L_{p,\infty}$, $p > 0$ легко проверить выполнение неравенства (p-sup).

Определение. *Говорят, что квазибанахово пространство X имеет тип p-Радемахера для $0 < p \leq 2$, если существует константа $C > 0$ такая, что для любого набора элементов $\{x_i\}$ в X имеем*

$$\int_0^1 \left\| \sum_{i=1}^{n} r_i(t) x_i \right\|^p dt \leq C \sum_{i=1}^{n} \|x_i\|^p, \qquad (p\text{-type})$$

где $r_1, \dots, r_n$ – функции Радемахера на $(0,1)$, $r_n(t) = \operatorname{sgn}(\sin 2^n \pi t)$.

Следствие 1.8. *Пусть X – квазибанахово пространство типа p-Радемахера для некоторого $p \in (0,2]$. Тогда каждый ограниченный надлинейный оператор $T : X \to L_0$ удовлетворяет условиям теоремы и, следовательно, допускает факторизацию через пространство $L_{p,\infty}$:*

$$X \xrightarrow{T_1} L_{p,\infty}(\mathbf{m}) \xrightarrow{M_g} L_0(\mathbf{m}).$$

Доказательство. В пространстве типа p-Радемахера ряд

$$\sum_{i=1}^{\infty} r_i(t)x_i \tag{1.1}$$

сходится по мере Лебега ν на $(0,1)$ в пространстве X для любой последовательности $(x_i) \in l_p(X)$. Для рядов Радемахера сходимость по мере эквивалентна сходимости почти всюду, поэтому ряд (1) сходится для почти всех t в пространстве X. (Последнее предложение хорошо известно для рядов со значениями в банаховом пространстве, но оно сохраняет силу и в полном метризуемом топологическом векторном пространстве [12, с. 219].) Оператор T непрерывен (лемма 0.1), поэтому ряд

$$\sum_{i=1}^{\infty} r_i(t)Tx_i(\omega) \tag{1.2}$$

сходится в пространстве L_0 (т.е. по мере $\mathbf{m}$) для почти всех t. Воспользуемся известным утверждением о случайных рядах [12, предложение 5.2.4], с помощью которого получаем сходимость ряда (2) для почти всех ω почти всюду по мере ν. Из классического неравенства Хинчина следует теперь, что

$$\sum_{i=1}^{\infty} |Tx_i(\omega)|^2 < \infty \quad \text{п.в.}$$

Следовательно, $\sup\limits_i |Tx_i| < \infty$ почти всюду, это означает, что $\widetilde{T} : l_p(X) \to L_0(l_\infty)$. Остается воспользоваться теоремой. $\square$

Примеры. 1) Пространство L_p, $p>0$, имеет тип $\min(p,2)$-Радемахера (для $p \geq 1$ [14], для $p \in (0,1)$ [15, с. 324]). Таким образом, мы получаем теорему Никишина для $p \geq 1$ и её обобщение Калтоном на $0 < p \leq 2$ [2, теорема 2], [15, теорема 3.1].

2) Еще один результат Никишина [2, теорема 3] получается аналогичным образом. Каждое банахово пространство имеет тип 1-Радемахера, поэтому каждый надлинейный оператор из банахова пространства X в L_0 может быть профакторизован через пространство $L_{1,\infty}$:

$$X \xrightarrow{T_1} L_{1,\infty}(\mathbf{m}) \xrightarrow{M_g} L_0(\mathbf{m}).$$

3) Пространство $L_{p,q}$, $1 \le q < p$, имеет тип $\min(2,q)$ [31, 30] и, следовательно, каждый ограниченный надлинейный оператор $T : L_{p,q} \to L_0$ допускает факторизацию вида

$$X \xrightarrow{T_1} L_{\min(2,q),\infty}(\mathbf{m}) \xrightarrow{M_g} L_0(\mathbf{m}).$$

Пространство $L_{p,q}$, $1 < p < q < \infty$, $p \ne 2$, имеет тип $\min(2,p)$ [31, 30] и, следовательно, каждый ограниченный надлинейный оператор $T : L_{p,q} \to L_0$ допускает факторизацию вида

$$X \xrightarrow{T_1} L_{\min(2,p),\infty}(\mathbf{m}) \xrightarrow{M_g} L_0(\mathbf{m}).$$

Близкий доказанной теореме 1.6 результат был получен в [5, теорема 1.2], где рассматривались линейные операторы со значениями в L_r, $r > 0$.

Пусть $0 < r < p < \infty$ и пусть X – квазибанахово пространство. Следующие свойства ограниченного линейного оператора $T : X \to L_r(\mathbf{m})$ эквивалентны:

1) *Существует константа $C > 0$ такая, что для всех конечных последовательностей $(x_i) \in X^I$ имеем*

$$\left\| \sup_i |T(x_i)| \right\|_{L_r(\mathbf{m})} \le C \left(\sum_i \|x_i\|^p \right)^{1/p}.$$

2) *Существуют константа $C' > 0$ и функция $f \in D(\mathbf{m})$ такие, что $\{f = 0\} \subset \bigcap_x \{T(x) = 0\}$ и*

$$\left\| f^{-1/r}\, T(x) \right\|_{L_{p,\infty}(\nu)} \le C' \|x\|, \quad x \in X,$$

где $\nu(E) = \int_E f\, d\mathbf{m}$, $E \in \mathcal{M}$.

3) *Оператор T допускает факторизацию вида*

$$X \xrightarrow{T_1} L_{p,\infty}(\nu) \xrightarrow{M} L_r(\mathbf{m}),$$

где $f \in D(\mathbf{m})$ и M – оператор умножения на $f^{1/r}$, а оператор T_1 ограничен.

§2. Совпадение независимых и свободных $(\mathcal{A}, l_\infty)$-множеств

Для $\mathcal{B} = l_\infty$ обнаружилось любопытное явление совпадения независимых и свободных $(\mathcal{A}, l_\infty)$-множеств, которое получено в предыдущей работе автора [23]. Некоторые результаты этой работы будут сформулированы здесь для полноты изложения.

Пусть U – $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$-множество и пусть $(f_n) \in U^{\mathbf{N}}$. Рассмотрим оператор

$$T_{(f_n)} : a \in \mathcal{A} \mapsto \|\,(a_n\, f_n(t))\,\|_{\mathcal{B}}.$$

Этот оператор является положительно однородным, и к нему можно применить лемму 0.1.

Теорема 2.1 [23, теорема 2.4]. *Пусть U – $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$-множество. Если квазинорма пространства $\mathcal{B}$ порядково полунепрерывна, то есть*

$$(x_n \uparrow x \in \mathcal{B} \quad \Rightarrow \quad \|x_n\| \uparrow \|x\|)\,,$$

то семейство операторов $T_{(f_n)}$, $(f_n) \in U^{\mathbf{N}}$ равномерно ограничено, то есть множество

$$\mathcal{T} = \left\{ \left(T_{(f_n)}(a)\right)(t) : \|a\|_{\mathcal{A}} \leq 1, (f_n) \in U^{\mathbf{N}} \right\}$$

ограничено в пространстве $L_0\,(\mathbf{m})$.

Замечание. Теперь легко обосновать оставшуюся недоказанной импликацию 3) $\Longrightarrow$ 4) из леммы 1.1. Для этого надо только что сформулированную теорему 2.1 применить к оператору

$$T_{(f_n)} : a \in \ell_1 \to \|\,(a_n\, f_n(t))\,\|_{\ell_\infty}.$$

Теорема 2.2. *Пусть пространство $\mathcal{B}$ имеет свойство Фату (или свойства $(B) + (C)$ в другой терминологии), т.е. $b_n \in \mathcal{B}$, $b_n \to b$ покоординатно и неравенство $\liminf_n \|b_n\|_{\mathcal{B}} < \infty$ влекут $b \in \mathcal{B}$ и неравенство $\|b\|_{\mathcal{B}} \leq \liminf_n \|b_n\|_{\mathcal{B}}$. Если множество $U \subset L_0(\mathbb{T})$ инвариантно относительно сдвига и $U \in \mathcal{S}\,(\mathcal{A}, \mathcal{B})$, то $U \in \mathcal{I}\,(\mathcal{A}, \mathcal{B})$.*

Другими словами, для множеств, инвариантных относительно сдвига, имеет место включение $\mathcal{S}\,(\mathcal{A}, \mathcal{B}) \subset \mathcal{I}\,(\mathcal{A}, \mathcal{B})$.

Доказательство. Пусть $U \subset L_0(\mathbb{T})$ инвариантно относительно сдвига и $U \in \mathcal{S}\,(\mathcal{A}, \mathcal{B})$. Для $a \in \mathcal{A}$ и $(f_n) \in U^{\mathbf{N}}$ определим функцию

$$\chi(\tau) = \sup_{(s_n) \in \mathbb{T}^{\mathbf{N}}} \mathbf{m}\,(t \in \mathbf{T} : \|\{a_n f_n(t + s_n)\}\|_{\mathcal{B}})\,,\ \tau > 0.$$

По теореме 2.1, $\lim_{\tau\to\infty}\chi(\tau)=0$.

На произвольном вероятностном пространстве $(\Omega, \mathbf{P})$ рассмотрим последовательность (X_n) независимых функций, подобную последовательности (f_n). Для произвольного $k \in \mathbf{N}$ имеем

$$\int\limits_{\mathbb{T}^k} \mathbf{m}\left\{t \in \mathbb{T} : \|(a_1 f_1(t+s_1), \dots, a_k f_k(t+s_k), 0, 0, \dots\|_{\mathcal{B}} > \tau\right\} \, d\,\mathbf{m}^k(s_1, \dots, s_k)$$

$$= \int\limits_{\mathbb{T}^k} d\,\mathbf{m}^k(s_1, \dots, s_k) \int\limits_{\mathbb{T}} \mathcal{X}_{(\tau,\infty)}\left(\|(a_1 f_1(t+s_1), \dots, a_k f_k(t+s_k), 0, 0, \dots\|_{\mathcal{B}}\right) \, d\,\mathbf{m}(t)$$

$$= \int\limits_{\mathbb{T}} d\,\mathbf{m}(t) \int\limits_{\mathbb{T}^k} \mathcal{X}_{(\tau,\infty)}\left(\|(a_1 f_1(t+s_1), \dots, a_k f_k(t+s_k), 0, 0, \dots\|_{\mathcal{B}}\right) d\,\mathbf{m}^k(s_1, \dots, s_k)$$

$$= \int\limits_{\mathbb{T}^k} \mathcal{X}_{(\tau,\infty)}\left(\|(a_1 f_1(t_1), \dots, a_k f_k(t_k), 0, 0, \dots\|_{\mathcal{B}}\right) d\,\mathbf{m}^k(t_1, \dots, t_k)$$

$$= \mathbf{m}^k\left\{(t_1, \dots, t_k) \in \mathbb{T}^k : \|(a_1 f_1(t_1), \dots, a_k f_k(t_k), 0, 0, \dots\|_{\mathcal{B}} > \tau\right\} =$$

$$= \mathbf{P}\left\{\|(a_1 X_1, \dots, a_k X_k, \dots)\|_{\mathcal{B}} > \tau\right\}.$$

(Последнее равенство получается с использованием независимости функций (X_i).) Отсюда получаем, что

$$\mathbf{P}\left\{\|(a_1 X_1, \dots, a_k X_k, \dots)\|_{\mathcal{B}} > \tau\right\} \le \chi(\tau), \quad \tau > 0, \quad k \in \mathbf{N}.$$

Теперь с помощью свойства Фату пространства $\mathcal{B}$ получаем, что

$$\mathbf{P}\left\{\|(a_n X_n)\|_{\mathcal{B}} = \infty\right\} = 0. \ \square$$

Теорема 2.3 [23, теорема 3.1]. *Пусть $\mathcal{A}$ – квазибанахово симметричное пространство вещественных числовых последовательностей. Для множества $U \subset L_0(\mathbf{m})$ следующие утверждения эквивалентны:*

1) *U – независимое $(\mathcal{A}, l_\infty)$-множество.*
2) *Существует положительное число τ_0 такое, что для всех $a \in \mathcal{A}$ с $\|a\|_{\mathcal{A}} \le 1$ и для всех $(f_n) \in U^{\mathbf{N}}$ сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty} d_{a_n f_n}(\tau_0)$;*
3) *U – свободное $(\mathcal{A}, l_\infty)$-множество.*

Таким образом, для произвольного квазибанахова пространства последовательностей $\mathcal{A}$ имеет место равенство $\mathcal{F}(\mathcal{A}, l_\infty) = \mathcal{I}(\mathcal{A}, l_\infty)$.

§3. Операторы, ограниченные в пространстве $L_{p,\infty}$, $p > 0$

В начале этого раздела мы опишем несколько преобразований положительных функций, которые затем будут использованы для формулировки результатов.

Основной интерес для нас будут представлять степенные функции, но оказалось, что менее громоздкие формулировки результатов получаются, если использовать функции общего вида, сначала вогнутые, а в следующем разделе – выпуклые.

Пусть $\varphi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ – возрастающая вогнутая функция,

$$\lim_{t\to+0}\varphi(t) = 0, \quad \lim_{t\to\infty}\varphi(t) = \infty.$$

Определим функцию

$$\hat{\varphi}(t) := \inf_{s>0}\frac{1+ts}{\varphi(s)}, \quad t \in \mathbb{R}_+.$$

Функция $\hat{\varphi} : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ вогнута, как нижняя грань множества линейных функций [17, гл. 2],

$$\frac{1}{\varphi\left(\frac{1}{t}\right)} = \inf_{s>0}\frac{1}{\varphi\left(\frac{s}{1+ts}\right)} \le \hat{\varphi}(t) \le \frac{1+t\cdot\frac{1}{t}}{\varphi\left(\frac{1}{t}\right)} = \frac{2}{\varphi\left(\frac{1}{t}\right)}, \quad t > 0;$$

в частности,

$$\lim_{t\to+0}\hat{\varphi}(t) = 0, \quad \lim_{t\to\infty}\hat{\varphi}(t) = \infty.$$

Для степенной вогнутой функции $\varphi(t) = t^\alpha$, $t \in \mathbb{R}_+$, $\alpha \in (0,1]$,

$$\hat{\varphi}(t) = \frac{\varphi(t)}{\alpha^\alpha(1-\alpha)^{1-\alpha}}, \quad t \in \mathbb{R}_+, \quad \text{при} \quad \alpha \in (0,1)$$

и $\hat{\varphi}(t) = t$, $t > 0$, при $\alpha = 1$.

Функция $\hat{\varphi}$ строго возрастает и, следовательно, обладает обратной функцией $\check{\varphi} : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, которая выпукла, строго возрастает и

$$\lim_{t\to+0}\check{\varphi}(t) = 0, \quad \lim_{t\to\infty}\check{\varphi}(t) = \infty.$$

Кроме того, имеют место неравенства:

$$\frac{1}{\varphi^{-1}\left(\frac{2}{s}\right)} \le \check{\varphi}(s) \le \frac{1}{\varphi^{-1}\left(\frac{1}{s}\right)}, \quad s > 0.$$

По вогнутой функции $\varphi(t)$ определим два квазинормированных пространства, которые обычно называют пространствами Лоренца и Марцинкевича [17]. Определяем их на произвольном пространстве $(\mathcal{J},\nu)$ с σ-конечной мерой ν так, чтобы элементами этих пространств могли быть как функции из $L_0(\mathbf{m})$, так и числовые последовательности. Итак, пусть $(\mathcal{J},\nu)$ – пространство с полной σ-конечной положительной мерой ν, $L_0(\mathcal{J},\nu)$ – пространство всех измеримых почти всюду конечных функций,

$$\Lambda(\mathcal{J},\nu;\varphi) = \{x \in L_0(\mathcal{J},\nu) : \|x\| = \int\limits_0^{\nu(\mathcal{J})} x^*(t)\,d\varphi(t) < \infty\};$$

$$\mathbb{M}(\mathcal{J},\nu;\varphi) = \{x \in L_0(\mathcal{J},\nu) : \|x\| = \sup_{0<t<\nu(\mathcal{J})} x^*(t)\,\varphi(t) < \infty\}.$$

Функционал, определяющий пространство $\Lambda(\varphi)$ для вогнутой функции φ, является нормой, а функционал, определяющий пространство $\mathbb{M}(\varphi)$, – квазинормой [17, гл. 2]. Частным случаем пространств $\Lambda(\mathcal{J},\nu;\varphi)$ являются пространства числовых последовательностей

$$\Lambda(\mathbf{N};\varphi) = \Big\{a = (a_i) \colon \|a\| = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^*\big(\varphi(n) - \varphi(n-1)\big) < \infty\Big\}.$$

Лемма 3.1 [23, лемма 4.1]. *Пусть Γ – произвольное непустое множество; $\Phi : \mathbb{R}_+ \times \Gamma \to \mathbb{R}_+$ – произвольная ограниченная функция. Эквивалентны следующие утверждения:*

$$1) \qquad \exists\delta > 0 : \forall a \in \Lambda(\mathbf{N};\varphi),\ \forall(\gamma_n) \in \Gamma^{\mathbf{N}}$$

имеет место импликация

$$\|a\|_{\Lambda(\mathbf{N};\varphi)} \le \delta \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \Phi(|a_n|,\gamma_n) < \infty;$$

$$2) \qquad \exists\epsilon > 0,\ \exists k > 0 : \forall s \in [0,\epsilon],\ \forall\gamma \in \Gamma$$

имеет место неравенство

$$\Phi(s,\gamma) \le \check{\varphi}(ks).$$

Для формулировки следующей теоремы будет использовано пространство Орлича l_ψ вещественных числовых последовательностей. Напомним его определение. Пусть $\psi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ – непрерывная возрастающая и выпуклая функция такая, что $\psi(0) = 0$, $\lim_{t\to\infty} \psi(t) = \infty$. Пространство Орлича l_ψ состоит из всех последовательностей $a \in \mathbb{R}^\infty$ таких, что $\sum_{n=1}^\infty \psi(|a_n|/\rho) < \infty$ для некоторого $\rho > 0$. Пространство l_ψ с нормой

$$||a|| = \inf\left\{\rho > 0 : \sum_{n=1}^\infty \psi\left(\frac{|a_n|}{\rho}\right) \le 1\right\}$$

является банаховым пространством [18, гл. 4].

Теорема 3.2 [23, теорема 4.2]**.** *Для множества $U \subset L_0([0,1], \mathcal{M}, \mathbf{m})$ следующие утверждения эквивалентны:*

1) *U – независимое $(\Lambda(\mathbf{N}, \varphi), l_\infty)$-множество;*
2) *U ограничено в пространстве $\mathbb{M}([0,1], \mathcal{M}, \mathbf{m}; \hat{\varphi})$;*
3) *U – свободное $(l_{\tilde{\varphi}}, l_\infty)$-множество.*

Пусть $r > 0$. Построим r-степенное преобразование квазибанахова пространства X, которое обозначим через X^r. Напомним, что

$$X^r = \{y : |y|^r \in X\}, \ ||y||_{X^r} = \|\,|y|^r\,\|_X^{1/r}.$$

Заметим, что пространства $L_{p,q}$ совпадают с пространствами $\Lambda^q(t^{q/p})$, а $L_{p,\infty}$ – с $\mathbb{M}^q(t^{q/p}) = \mathbb{M}(t^{1/p})$, $0 < p < \infty$, $0 < q < \infty$.

Если применить теорему к множеству $\{|f|^r : f \in U\}$, получим

Следствие 3.3. *Пусть $r>0$. Для множества $U \subset L_0([0,1], \mathcal{M}, \mathbf{m})$ следующие утверждения эквивалентны:*

1) *U – независимое $(\Lambda^r(\mathbf{N}, \alpha), l_\infty)$-множество;*
2) *U ограничено в пространстве $\mathbb{M}^r([0,1], \mathcal{M}, \mathbf{m}; \hat{\alpha})$;*
3) *U – свободное $(l^r_{\tilde{\varphi}}, l_\infty)$-множество.*

Полагая в следствии 3.3 $\alpha = q/p$ и $r = q$, получаем основные результаты этого раздела.

Теорема 3.4 (ограниченные множества в $L_{p,\infty}$)**.** *Пусть $0 < p < \infty$, $U \subset L_0$. Следующие утверждения эквивалентны:*

1) *Существует функция $g \in L_\infty([0,1])$, $g > 0$, такая, что*

$$\left\|\frac{f}{g}\right\|_{p,\infty} \le 1, \quad f \in U.$$

2) *Множество U ограничено в пространстве $L_{p,\infty}$, то есть существует константа $C > 0$ такая, что $\|f\|_{p,\infty} \le C$, $f \in U$.*
3) *Имеем $\sup\limits_{f\in U} f^*(t) \in L_{p,\infty}$.*
4) *Существует $q \in (0, p]$ такое, что $U \in \mathcal{I}(l_{p,q},\, l_\infty)$.*
5) *Множество U лежит в $\mathcal{F}\,(l_p,\, l_\infty)$.*
6) *Существует константа $C > 0$ такая, что для любого $\varepsilon \in (0,1]$ и для любого конечного набора (α_i) вещественных чисел*

$$\left(\sup_i |\alpha_i\, f_i|\right)^*(\varepsilon) \le \frac{C}{\varepsilon^{1/p}} \left(\sum_i |\alpha_i|^p\right)^{1/p}, \quad f_i \in U.$$

7) *Последовательность $(\alpha_i\, f_i)$ лежит в $L_{p,\infty}(l_\infty)$, если $(\alpha_i) \in l_p$.*
8) *Если дополнительно предположить, что множество $U \subset L_0(\mathbb{T})$ инвариантно относительно сдвига, то каждое из утверждений 1)–7) эквивалентно следующему: существует функция $G \in L_0(\mathbb{T})$, $G > 0$, такая, что*

$$\left\|\frac{f}{G}\right\|_{p,\infty} \le 1, \quad f \in U,$$

или $U \in \mathcal{S}(l_p,\, l_\infty)$.

Доказательство. Эквивалентность 1) $\iff$ 2) очевидна.
2) $\iff$ 3). Утверждение 2) может быть записано в виде

$$f^*(t) \le \frac{C}{t^{1/p}},\ t \in (0,1],\ f \in U.$$

Замечая, что функция $\frac{1}{t^{1/p}}$ лежит в $L_{p,\infty}$, получаем 3). Обратное утверждение очевидно.

Эквивалентности 2) $\iff$ 4) $\iff$ 5) фактически доказаны выше. Достаточно положить в следствии 3.3 $\varphi(t) = t^{q/p}$ и $r = q$.
2) $\iff$ 6). Утверждение 2) может быть представлено еще и в таком виде: существует константа $C > 0$ такая, что для всякой функции $f \in U$ выполняется неравенство

$$d_f(t) \le \frac{C^p}{t^p}, \quad t > 0.$$

Отсюда следует, что

$$d_{\sup|\alpha_i f_i|}(t) \le \sum d_{f_i}\left(\frac{t}{|\alpha_i|}\right) \le$$

$$\leq \frac{C^p}{t^p} \sum |\alpha_i|^p .$$

По определению невозрастающей перестановки получаем неравенство

$$(\sup |\alpha_i f_i|)^* \left(\frac{C^p}{t^p} \sum |\alpha_i|^p \right) \leq t, \quad t > 0.$$

Обозначая теперь аргумент перестановки через ε, приходим к 6). Для получения обратной импликации следует взять набор, состоящий из одного числа.

Эквивалентность 6) $\Longleftrightarrow$ 7) очевидна.

Эквивалентность 2) $\Longleftrightarrow$ 8) доказана выше (см. следствие 1.5 о $\mathcal{S}(l_p, l_\infty)$-множествах). □

Замечание. Доказанная теорема позволяет уточнить соотношения (0.1) для $\mathcal{B} = l_\infty$. Для произвольного квазибанахова симметричного пространства последовательностей мы доказали равенство $\mathcal{F}(\mathcal{A}, l_\infty) = \mathcal{I}(\mathcal{A}, l_\infty)$ (теорема 2.3), а для $\mathcal{A} = l_p$, $p > 0$, имеем

$$\mathcal{I}(l_p, l_\infty) \overset{\neq}{\subset} \mathcal{S}(l_p, l_\infty) . \tag{3.1}$$

Для того чтобы заметить это, достаточно сравнить следствие 1.5 с теоремой 3.4.

С другой стороны, по только что доказанной теореме 3.4, имеем такие равенства:

$$\mathcal{I}(l_{p,q}, l_\infty) = \mathcal{F}(l_{p,q}, l_\infty) = \mathcal{F}(l_p, l_\infty), \quad 0 < q \leq p < \infty.$$

Следовательно, для множеств, инвариантных относительно сдвига, получаем

$$\mathcal{S}(l_{p,q}, l_\infty) = \mathcal{I}(l_{p,q}, l_\infty) = \mathcal{F}(l_{p,q}, l_\infty) = \mathcal{S}(l_p, l_\infty), \quad 0 < q \leq p < \infty$$

(см. теорему 2.5 и (3.1)).

Задача. Получить внутреннее описание множеств $\mathcal{S}(l_{p,q}, l_\infty)$ для $p \neq q$.

Следствие 3.5 (вероятностная характеризация операторов слабого типа)**.** *Пусть $0 < p < \infty$, $T : X \to L_0$ – ограниченный положительно однородный оператор. Следующие утверждения эквивалентны:*

1) *Оператор T ограничен из X в $L_{p,\infty}$.*

2) *Выполняется соотношение* $\sup\limits_{\|x\|\leq 1}(Tx)^*(t)\in L_{p,\infty}$.
3) *Существует* $q\in(0,p]$ *такое, что* $\widetilde{T}:l_{p,q}(X)\to L_0^{\mathcal{I}}(l_\infty)$, *т.е. для произвольной последовательности* (x_i), $x_i\in X$, *такой, что* $(\|x_i\|)\in l_{p,q}$, *имеем* $sup_i|Y_i|<\infty$ *почти всюду для последовательности независимых функций* (Y_i), *подобной* (Tx_i).
4) *Существует* $q\in(0,p]$ *такое, что* $\widetilde{T}:l_{p,q}(X)\to L_0^{\mathcal{F}}l_\infty)$, *т.е. для произвольной последовательности* (x_i), $x_i\in X$, *такой, что* $(\|x_i\|)\in l_{p,q}$, *имеем* $sup_i|Y_i|<\infty$ *почти всюду для произвольной последовательности функций* (Y_i), *подобной* (Tx_i).
5) *Существует константа* $C>0$ *такая, что для любого* $\varepsilon\in(0,1]$ *и для произвольного конечного набора* (x_i) *элементов пространства* X *имеем*

$$\left(\sup_i|Tx_i|\right)^*(\varepsilon)\leq\frac{C}{\varepsilon^{1/p}}\left(\sum_i\|x_i\|^p\right)^{1/p}.$$

6) *Оператор* $\widetilde{T}$ *действует из* $l_p(X)$ *в* $L_{p,\infty}(l_\infty)$.
7) *Если оператор* T *инвариантен относительно сдвига, то каждое из утверждений* 1)–6) *эквивалентно возможности его факторизации через пространство* $L_{p,\infty}$:

$$X\xrightarrow{T_1}L_{p,\infty}(\mathbf{m})\xrightarrow{M_g}L_0(\mathbf{m}),$$

где M_g *– оператор умножения на функцию* $g\in L_0$, $g>0$, *и* T_1 *– ограниченный оператор.*

Доказательство. Достаточно применить теорему к множеству $T(B_X)$.

Замечание. Утверждение 3) в следствии, формально самое слабое среди всех, позволяет по-другому посмотреть на явление, обнаруженное в [29]. Оно достаточно полно иллюстрируется таким примером. Если к пространству $L_{p,1}$ с $p>1$ применить следствие 1.8 (см. пример 3) после него), то мы сможем получить только факторизацию через пространство $L_{1,\infty}$, которая возможна и для произвольного банахова пространства. В [29] был построен пример, который показывает, что ничего лучшего в этой ситуации для общего (не инвариантного относительно сдвига оператора) получить нельзя. С другой стороны, если оператор $T:L_{p,1}\mapsto L_0$ инвариантен относительно сдвига, то для него можно получить значительно более сильный результат, а именно $T : L_{p,1} \mapsto L_{min(p,2),\infty}$. Следствие 3.5 показывает одну из причин этого явления с помощью вспомогательного оператора $\widetilde{T}$.

§4. Операторы, симметрично порядково ограниченные в пространстве $L_{p,r}$, $0 < p < \infty$, $0 < r \le \infty$

Пусть $\varphi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ – строго возрастающая непрерывная функция, $\varphi(0) = 0$. Через $L_\varphi([0,1],\mathbf{m})$ будем обозначать множество всех измеримых на отрезке $[0,1]$ функций $x(t)$, для которых

$$\int_0^1 \varphi\left(\gamma |x(t)|\right) dt < \infty$$

при некотором $\gamma > 0$.

Если функция φ удовлетворяет Δ_2-условию, то множество $L_\varphi([0,1],\mathbf{m})$ совпадает с классом $\varphi(L)$, подробно рассмотренным в [17] . Если φ является N-функцией (см. [11, 17]), то $L_\varphi([0,1],\mathbf{m})$ является банаховым пространством и называется пространством Орлича [11].

Начнем с рассмотрения более простого "крайнего" случая.

Теорема 4.1 [23, следствие 5.2]**.** *Пусть $\varphi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ – строго возрастающая непрерывная функция, $\varphi(0) = 0$. Для множества $U \subset L_0([0,1],\mathcal{M},\mathbf{m})$ следующие утверждения эквивалентны:*

1) *U – независимое $(\mathbb{M}(\mathbf{N},\, \varphi),\, l_\infty)$-множество;*
2) *существует $\tau_0 > 0$ такое, что*

$$\int_0^\infty d(U, \tau_0 \varphi(t))\, dt < \infty,$$

где $d(U,\tau) := \sup\limits_{f \in U} d_f(\tau),\ \tau > 0.$

3) *множество U симметрично порядково ограничено в пространстве $L_{\varphi^{-1}}([0,1],\mathbf{m})$, т.е. существует невозрастающая функция $h \in L_{\varphi^{-1}}([0,1],\mathbf{m})$ такая, что для всех $f \in U$ имеет место неравенство $f^*(t) \le h(t)$, $0 < t \le 1$.*
4) *U – свободное $(\mathbb{M}(\mathbf{N},\, \varphi),\, l_\infty)$-множество.*

Так же, как это было сделано в предыдущем разделе, доказываются два следствия.

Следствие 4.2. *Пусть* $\varphi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ *– строго возрастающая непрерывная функция,* $\varphi(0) = 0$, $r > 0$. *Для множества* $U \subset L_0([0,1], \mathcal{M}, \mathbf{m})$ *следующие утверждения эквивалентны:*

1) U *– независимое* $(\mathbb{M}^r(\mathbf{N}, \varphi), l_\infty)$*-множество;*
2) *множество* U *симметрично порядково ограничено в* r*-степенном преобразовании пространства Орлича* $L^r_{\varphi^{-1}}([0,1], \mathbf{m})$, *т.е. существует невозрастающая функция* $h \in L^r_{\varphi^{-1}}([0,1], \mathbf{m})$ *такая, что для всех* $f \in U$ *имеет место неравенство* $f^*(t) \le h(t)$, $0 < t \le 1$.
3) U *– свободное* $(\mathbb{M}^r(\mathbf{N}, \varphi), l_\infty)$*-множество.*

Следствие 4.3. *Пусть* $p > 0$. *Для множества* $U \subset L_0([0,1], \mathcal{M}, \mathbf{m})$ *следующие утверждения эквивалентны:*

1) U *– независимое* $(l_{p,\infty}, l_\infty)$*-множество;*
2) *множество* U *симметрично порядково ограничено в пространстве* $L_p([0,1], \mathbf{m})$, *то есть существует невозрастающая функция* $h \in L_p([0,1], \mathbf{m})$ *такая, что для всех* $f \in U$ *имеет место неравенство* $f^*(t) \le h(t)$, $0 < t \le 1$.
3) U *– свободное* $(l_{p,\infty}, l_\infty)$*-множество.*

Заметим, что условие 2) в последнем следствии можно переформулировать следующим образом: множество U ограничено в пространстве $\mathbb{M}([0,1]; \frac{1}{h(t)})$, где $h(t) \in L_p([0,1], \mathbf{m})$.

Теорема 4.4 (о симметрично порядково ограниченных множествах) [23, теорема 5.9]**.** *Пусть* $0 < p < \infty, p \le q \le \infty$, $U \subset L_0([0,1], \mathcal{M}, \mathbf{m})$. *Следующие утверждения эквивалентны:*

1) $U \in \mathcal{I}(l_{p,q}, l_\infty)$*;*
2) $U \in \mathcal{F}(l_{p,q}, l_\infty)$*;*
3) $$\sup_{x \in U} x^*(t) \in \ddot{Л}_{p,r}([0,1], \mathcal{M}, \mathbf{m}), \quad \frac{1}{r} = \frac{1}{p} - \frac{1}{q}.$$
4) *Существует убывающая функция* $\varphi \in L_{p,r}$, $1/r = 1/p - 1/q$, *такая, что множество* U *ограничено в пространстве* $\mathbb{M}([0,1],\ 1/\varphi)$.
5) *Существует* $\tau_0 > 0$ *такое, что для любой последовательности* $a \in B_{l_{p,q}}$ *и для любой последовательности* $(f_n) \in U^{\mathbf{N}}$ *имеем*
$$\sum_{n=1}^{\infty} d_{f_n}\left(\frac{\tau_0}{a_n}\right) < \infty.$$

6) *Если множество U лежит в $\mathcal{S}(l_{p,q}, l_\infty)$ и инвариантно относительно сдвига, то для него справедливо любое из утверждений 1)–5).*

Следствие 4.5 (операторный вариант теоремы). *Пусть $0 < p < \infty$, $p \le q \le \infty, T : X \mapsto L_0$ – ограниченный положительно однородный оператор. Следующие утверждения эквивалентны:*

1) *Имеем*

$$\Psi_T(t) := \sup_{\|x\|\le 1} (Tx)^*(t) \in L_{p,r}, \quad \frac{1}{r} = \frac{1}{p} - \frac{1}{q}.$$

2) *Существует убывающая функция $\psi \in L_{p,r}$, $1/r = 1/p - 1/q$, такая, что оператор T ограничен из X в $\mathbb{M}([0,1]; \frac{1}{\Psi(t)})$, т.е. множество $T(B_X)$ ограничено в пространстве $\mathbb{M}([0,1]; \frac{1}{\Psi(t)})$,*

$$\|Tx\|_{\mathbb{M}(\frac{1}{\Psi(t)})} \le 1, \quad \|x\| \le 1.$$

3) *Оператор $\widetilde{T}$ действует из $l_{p,q}(X)$ в $L_0^{\mathcal{I}}(l_\infty)$, т.е. для каждой последовательности (x_i), $x_i \in X$, такой, что $(\|x_i\|) \in l_{p,q}$, имеем $\sup_i |Y_i| < \infty$ почти всюду для каждой последовательности (Y_i) независимых функций, подобной (Tx_i);*
4) *Оператор $\widetilde{T}$ действует из $l_{p,q}(X)$ в $L_0^{\mathcal{F}}(l_\infty)$, то есть для каждой последовательности (x_i), $x_i \in X$, такой, что $(\|x_i\|) \in l_{p,q}$, имеем $\sup_i |Y_i| < \infty$ почти всюду для любой последовательности (Y_i) функций, подобной (Tx_i);*
5) *Существует константа $\tau_0 > 0$ такая, что для любого $\varepsilon \in (0,1]$ и для любой последовательности $(x_i) \in X^{\mathbf{N}}$, $(\|x_i\|) \in B_{l_{p,q}}$, имеем*

$$\sum_{n=1}^{\infty} d_{Tx_n}(\tau_0) < \infty.$$

6) *Если оператор T инвариантен относительно сдвига, а оператор $\widetilde{T}$ действует так:*

$$\widetilde{T} : l_{p,q}(X) \to L_0(l_\infty),$$

то для для оператора T справедливо любое из утверждений 1)–5).

Литература

1. Е. М Никишин, *Резонансные теоремы и надлинейные операторы.* — Успехи матем. наук **25**, 6 (1970), 129–191.
2. Е. М Никишин, *Резонансная теорема и ряды по собственным функциям оператора Лапласа.* — Изв. АН СССР. Сер. мат. **36**, 4 (1972), 795–813.
3. B. Maurey, *Théorèmes de factorisation pour les opérateurs lineáres a valeurs dans les espaces L_p.* — Astérisque, **11** (1974), 163 pp..
4. J.-L. Rubio de Francia, I. Garcia-Cuerva, *Weighted Norm Inequalities and Related Topics.*. North-Holland, Amsterdam (1985).
5. G. Pisier, *Factorisation of Operators through $L_{p,\infty}$ and $L_{p,1}$.* — Math. Annalen **276** (1986), 105–136.
6. P. Wojtaszczyk,, *Banach spaces for analysts.* Cambridge Stud. Adv. Math., **25**, Cambridge Univ. Press (1991).
7. Б. С. Кашин, А. А. Саакян, *Ортогональные ряды.* АФЦ, М. (1999).
8. К. Партасарати, *Введение в теорию вероятностей и теорию меры.* Мир, М. (1983).
9. Й. Берг, Й. Лефстрем, *Интерполяционные пространства.* Мир, М. (1980).
10. S. Rolewich, *Metric Linear Spaces.* PWN, Warsaw (1972).
11. А. Пич, *Операторные идеалы.* Мир, М. (1982).
12. Н. Н. Вахания, В. И. Тариеладзе, С. А. Чобанян, *Вероятностные распределения в банаховых пространствах.* Наука, М. (1985).
13. Н. Бурбаки, *Интегрирование. Меры, интегрирование мер.* Наука, М. (1967).
14. J. Lindenstrauss, L. Tzafriri, *Classical Banach Spaces, II.* Springer, Berlin (1979).
15. N. J. Kalton, *Linear operators on L_p for $0 < p < 1$.* — Trans. of AMS **259**, 2 (1980), 319–355.
16. У. Рудин, *Функциональный анализ.* Мир, М. (1975).
17. С. Г. Крейн, Ю. И. Петунин, Е. М. Семенов, *Интерполяция линейных операторов.* Наука, М. (1978).
18. J. Lindenstrauss, L. Tzafriri, *Classical Banach Spaces, I.* Springer, Berlin (1977).
19. И. Стейн, Г. Вейс, *Введение в гармонический анализ на евклидовых пространствах.* Мир, М. (1974).
20. R. A. Hunt, *On $L(p,q)$ spaces.* — L'Enseignement Math. **12**, 4 (1966), 249–276.
21. М. А. Красносельский, Я. Б. Рутицкий, *Выпуклые функции и пространства Орлича.* Физматгиз, М. (1958).
22. С. Я. Новиков, А. М. Штейнберг, *Пространства Лоренца и ограниченность почти наверное последовательностей независимых случайных величин.* — Сиб. матем. ж. **XXX**, 2 (1989), 138–144.
23. С. Я. Новиков, *A-системы, независимые функции и множества, ограниченные в пространствах измеримых функций.* — (в печати).
24. Б. М. Макаров, *p-абсолютно суммирующие операторы и некоторые их приложения.* — Алгебра и анализ, **3**, 2 (1991), 1–76.
25. С. В. Кисляков, *Абсолютно суммирующие операторы на диск-алгебре.* — Алгебра и анализ, **3**, 4 (1991), 1–77.

26. W. B. Johnson, G. Schechtman, *Sums of independent random variables in rearrangement invariant function spaces.* – Annals of Prob. **17**, 2 (1989), 789–808.
27. N. L. Carothers, S. J. Dilworth, *Inequalities for sums of independent random variables.* — Proceedings of AMS **104**, 1 (1988), 221–226.
28. П. Л. Ульянов, *Представление функций рядами и классы $\varphi(L)$.* — Успехи мат. наук **27**, 2 (1972), 3–52.
29. А. М. Штейнберг, *Операторы, инвариантные относительно сдвига в пространствах Лоренца.* — Функц. анализ и его прил. **20**, 2 (1986), 92–93.
30. С. Я. Новиков, *Котип и тип функциональных пространств Лоренца.* — Мат. заметки, **32**, 2 (1982), 213–221.
31. J. Creekmore, *Type and Cotype in Lorentz $L_{p,q}$ spaces.* — Proc. Kon. ned. akad. wetensch **A84**, 2 (1981), 145–152.
32. В. Л. Левин, *Выпуклый анализ в пространствах измеримых функций.* Наука, М. (1985).

Novikov S. Ya. Sequence spaces $l_{p,q}$ in probabilistic characterizations of the weak type operators.

Not necessarily linear operators $T : X \mapsto L_0\,([0,1], \mathcal{M}, \mathbf{m})$ defined on the quasi-Bahach space X and taking values in the space of real-valued Lebesgue measurable functions are considered in this paper. Factorization theorems for linear and superlinear operators with values in the space L_0 are proved with the help of Lorentz sequence spaces $l_{p,q}$. In this way sequences of functions belonging to a fixed bounded set in the spaces $L_{p,\infty}$ are characterized for $0 < p < \infty$, $0 < q \leq p$. The possibility to distinguish weak type operators (bounded in the space $L_{p,\infty}$) from the operators factorizable through $L_{p,\infty}$ is obtained in terms of sequences of independent random variables. A criterion is established for an operator to be symmetrically order bounded in $L_{p,r}$, $0 < r \leq \infty$. Some refinements for the translation invariant sets and operators are obtained.

Самарский государственный
университет
e-mail: nvks@ssu.samara.ru
nvks@transit.samara.ru

Поступило 2 сентября 2001 г.