Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 282, 2001 г.

С. М. Саприкин

ТЕОРИЯ ДИССИПАТИВНЫХ ЛИНЕЙНЫХ СТАЦИОНАРНЫХ СИСТЕМ РАССЕЯНИЯ С ДИСКРЕТНЫМ ВРЕМЕНЕМ С π_κ-ПРОСТРАНСТВАМИ СОСТОЯНИЙ

Введение

Настоящая работа посвящена развитию теории линейных стационарных диссипативных систем рассеяния с дискретным временем, у которых, как и в предшествующих исследованиях [1–3] (см. также список литературы в [3]), пространства входных и выходных данных $\mathcal{U}$ и $\mathcal{Y}$ являются сепарабельными гильбертовыми, однако пространство состояний $\mathcal{X}$ уже является пространством Понтрягина класса π_κ, то есть с индефинитной метрикой, имеющей κ отрицательных квадратов.

Мы обобщаем результаты, известные для $\kappa = 0$ (когда $\mathcal{X}$ – сепарабельное гильбертово пространство), на случай $\kappa \geq 0$. Методы – те же, что и при $\kappa = 0$, см. [3]. При этом существенно используется материал статьи [4] (см. также [5, 6]). В частности, используется тот факт, что характеристические функции простых унитарных узлов с внутренним пространством $\mathcal{X}$ класса π_κ и с внешними сепарабельными гильбертовыми пространствами $\mathcal{U}$ и $\mathcal{Y}$ (а в терминах теории систем - передаточные функции простых консервативных систем рассеяния с дискретным временем) при фиксированных пространствах входных и выходных данных составляют множество $S^0_\kappa(\mathcal{U},\mathcal{Y})$ голоморфных при $z = 0$ функций класса Шура–Такаги $S_\kappa(\mathcal{U},\mathcal{Y})$ (именуемого также в англоязычной литературе обобщенным классом Шура).

Основным результатом данной работы является представление произвольной функции класса $S^0_\kappa(\mathcal{U},\mathcal{Y})$ как передаточной функции двух минимальных и экстремальных систем (оптимальной и $*$-оптимальной) с π_κ-пространством состояний.

Результаты этой статьи, кроме теоремы 2.3, были анонсированы в [7].

Автор статьи выражает благодарность Д. З. Арову за постановку задач.

1. Линейные системы с пространством состояний Понтрягина

Через $\mathcal{L}(\mathcal{R},\mathcal{K})$ обозначается пространство линейных непрерывных операторов, действующих из $\mathcal{R}$ в $\mathcal{K}$, где $\mathcal{R}$ и $\mathcal{K}$ могут быть как гильбертовыми пространствами, так и пространствами Понтрягина. О пространствах класса Понтрягина π_κ и линейных операторах в этих пространствах см. [8].

Пространство класса π_κ будем называть π_κ-пространством. Желая подчеркнуть, что какое-либо свойство относится к индефинитной метрике π_κ-пространства, мы будем добавлять к этому свойству приставку π- (например, π-ортогональный, π-унитарный).

Рассмотрим произвольную линейную стационарную систему с дискретным временем

$$\Sigma : \begin{cases} x(n+1) = Ax(n) + Bu(n) \\ y(n) = Cx(n) + Du(n) \end{cases}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots, \tag{1.1}$$

где $x(n)$ принадлежит π_κ-пространству $\mathcal{X}$ $(\kappa \geq 0)$, $u(n)$ и $y(n)$ принадлежат соответственно сепарабельным гильбертовым пространствам $\mathcal{U}$ и $\mathcal{Y}$, $A \in \mathcal{L}(\mathcal{X},\mathcal{X})$, $B \in \mathcal{L}(\mathcal{U},\mathcal{X})$, $C \in \mathcal{L}(\mathcal{X},\mathcal{Y})$, $D \in \mathcal{L}(\mathcal{U},\mathcal{Y})$. Такую систему будем обозначать через $\Sigma = (A,B,C,D;\mathcal{X},\mathcal{U},\mathcal{Y};\kappa)$. В дальнейшем вместо "линейная стационарная система с дискретным временем" будем писать просто "система"; $\mathcal{X}$ называется *пространством состояний* системы Σ, $\mathcal{U}$ и $\mathcal{Y}$ – соответственно пространствами *входных* и *выходных данных*. Числа $x(n)$, $u(n)$ и $y(n)$ называются, соответственно, *внутренним состоянием*, *входными* и *выходными данными* системы Σ в момент времени n; A называется основным оператором системы Σ.

Система $\Sigma^* = (A^*,C^*,B^*,D^*;\mathcal{X},\mathcal{Y},\mathcal{U},\kappa)$ называется *сопряженной* системе Σ. Здесь и далее в работе A^* обозначает оператор, π-сопряженный оператору A. Аналогично $[Bu,x]_\mathcal{X} = (u,B^*x)$, $(Cx,y) = [x,C^*y]_\mathcal{X}$, где $[\cdot,\cdot]_\mathcal{X}$ - скалярное (индефинитное) произведение в π_κ-пространстве $\mathcal{X}$, а $(\cdot,\cdot)$ - скалярное произведение в гильбертовых пространствах $\mathcal{U}$ и $\mathcal{Y}$.

Оператор-функция

$$\theta_\Sigma(z) = D + zC(I - zA)^{-1}B \tag{1.2}$$

называется *передаточной функцией* системы Σ.

Система Σ называется *реализацией* функции $\theta(z)$, если $\theta(z) = \theta_\Sigma(z)$ в некоторой окрестности точки $z = 0$. Четырехблочный оператор

$$M_\Sigma = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \in \mathcal{L}(\mathcal{X}[+]\mathcal{U}, \mathcal{X}[+]\mathcal{Y}) \tag{1.3}$$

называется *матрицей* системы Σ (символ $[+]$ обозначает прямую π-ортогональную сумму).

Очевидно, что $M_{\Sigma^*} = (M_\Sigma)^*$.

В зависимости от того, будет ли матрица системы M_Σ π-сжимающей (соответственно, π-унитарной, π-изометрической, $*$-π-изометрической), система Σ будет называться *диссипативной* (соответственно, *консервативной*, *изометрической*, $*$-*изометрической*) системой рассеяния. Условие диссипативности можно заменить следующим равносильным условием: для всех $n \geq 0$, при любых $u(k) \in \mathcal{U}$ $(0 \leq k \leq n)$ и $x(0) \in \mathcal{X}$ выполнены неравенства:

$$\|u(n)\|^2 - \|y(n)\|^2 \geq [x(n+1), x(n+1)]_\mathcal{X} - [x(n), x(n)]_\mathcal{X}. \tag{1.4}$$

Через $\|\cdot\|$, как обычно, обозначена норма в соответствующем гильбертовом пространстве. В дальнейшем будем пользоваться обозначением

$$E_\mathcal{X}(h) := [h, h]_\mathcal{X}. \tag{1.5}$$

Заметим, что если Σ – диссипативная (консервативная) система рассеяния, то и сопряженная система Σ^* является диссипативной (соответственно консервативной) системой рассеяния, так как в π_κ-пространстве оператор, π-сопряженный π-сжимающему (π-унитарному), сам является π-сжимающим (соответственно π-унитарным), см. [5], следствие 2.5. В случае консервативной системы вместо неравенства (1.4) будем иметь равенство и аналогичное равенство будем иметь для системы Σ^*.

Заметим также, что, поскольку пространства $\mathcal{U}$ и $\mathcal{Y}$ – гильбертовы, основной оператор A диссипативной системы Σ, равный $P_\mathcal{X} M_\Sigma|_\mathcal{X}$, является π-сжатием (через $P_\mathcal{X}$ обозначается π-ортогональный проектор на подпространство $\mathcal{X}$).

Система $\widehat{\Sigma} = (\widehat{A}, \widehat{B}, \widehat{C}, D; \widehat{\mathcal{X}}, \mathcal{U}, \mathcal{Y}; \widehat{\kappa})$ называется *дилатацией* системы $\Sigma = (A, B, C, D; \mathcal{X}, \mathcal{U}, \mathcal{Y}, \kappa)$, если:

$$\begin{gathered} \widehat{\mathcal{X}} = E[+]\mathcal{X}[+]E_*, \quad A = P_{\mathcal{X}}\widehat{A}|_{\mathcal{X}}, \quad B = P_{\mathcal{X}}\widehat{B}, \quad C = \widehat{C}|_{\mathcal{X}}, \\ \widehat{A}E \subset E, \quad \widehat{A}^* E_* \subset E_*, \quad \widehat{C}E = \{0\}, \quad \widehat{B}^* E_* = \{0\}. \end{gathered} \tag{1.6}$$

При этом Σ называется *сужением* системы $\widehat{\Sigma}$.

Условия (1.6) равносильны тому, что операторы $\widehat{A}$, $\widehat{B}$ и $\widehat{C}$ относительно декомпозиции $\widehat{\mathcal{X}} = E[+]\mathcal{X}[+]E_*$ представимы в следующем виде:

$$\widehat{A} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ 0 & A & A_{23} \\ 0 & 0 & A_{33} \end{bmatrix}, \quad \widehat{B} = \begin{bmatrix} B_1 \\ B \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \widehat{C} = [\,0 \quad C \quad C_3\,]. \tag{1.7}$$

Отсюда вытекает, что передаточные функции системы и ее дилатации совпадают в окрестности точки $z = 0$.

Замечание. Предполагается, что рассматриваемые в (1.6) компоненты E и E_* являются проекционно-полными подпространствами пространства $\widehat{\mathcal{X}}$.

При этом, очевидно, что $E[+]E_*$ – $\pi_{\widehat{\kappa}-\kappa}$-пространство, так что $\widehat{\kappa} \geq \kappa$. Если же $\widehat{\kappa} = \kappa$, то в этом и только в этом случае E и E_* – гильбертовы (то есть положительные) подпространства пространства Понтрягина $\mathcal{X}$.

Введем обозначения для системы $\Sigma = (A, B, C, D; \mathcal{X}, \mathcal{U}, \mathcal{Y}; \kappa)$:

$$\begin{gathered} \mathcal{X}^c_\Sigma = \bigvee_{n=0}^{\infty} A^n B\mathcal{U} = \bigvee_{z\in\Omega} (I - zA)^{-1} B\mathcal{U}, \\ \mathcal{X}^o_\Sigma = \bigvee_{n=0}^{\infty} (A^*)^n C^*\mathcal{Y} = \bigvee_{z\in\Omega} (I - \overline{z}A^*)^{-1} C^*\mathcal{Y}, \end{gathered} \tag{1.8}$$

где символ $\mathbf{V}$ обозначает замкнутую линейную оболочку рассматриваемого семейства множеств, Ω – некоторая окрестность точки $z = 0$.

Система Σ называется *управляемой*, если $\mathcal{X}^c_\Sigma = \mathcal{X}$, *наблюдаемой*, если $\mathcal{X}^o_\Sigma = \mathcal{X}$, *простой*, если $\mathcal{X}^c_\Sigma \mathbf{V} \mathcal{X}^o_\Sigma = \mathcal{X}$. Система Σ называется *минимальной*, если она является одновременно управляемой и наблюдаемой.

Пусть $\mathcal{U}, \mathcal{Y}$ – сепарабельные гильбертовы пространства. Будем говорить, что функция θ принадлежит *классу Шура–Такаги*

$S_\kappa(\mathcal{U},\mathcal{Y})$, если θ мероморфна в единичном круге $K=\{z:|z|<1\}$, принимает значения из $\mathcal{L}(\mathcal{U},\mathcal{Y})$ и эрмитово ядро двух переменных

$$K_\theta(z,w)=(1-\overline{w}z)^{-1}(I-\theta^*(w)\theta(z)) \tag{1.9}$$

на $\Omega\times\Omega$, где $\Omega\subset K$ – область голоморфности θ, имеет ровно κ отрицательных квадратов.

При $\kappa=0$ класс $S_\kappa(\mathcal{U},\mathcal{Y})$ совпадает с классом Шура $S(\mathcal{U},\mathcal{Y})$ сжимающих голоморфных в K функций со значениями из $\mathcal{L}(\mathcal{U},\mathcal{Y})$. Подкласс функций из $S_\kappa(\mathcal{U},\mathcal{Y})$, голоморфных в нуле, будем обозначать через $S^0_\kappa(\mathcal{U},\mathcal{Y})$.

Две системы $\Sigma_j=(A_j,B_j,C_j,D;\mathcal{X}_j,\mathcal{U},\mathcal{Y};\kappa)$, $j=1,2$, называются *унитарно эквивалентными*, если существует оператор $R\in\mathcal{L}(\mathcal{X}_1,\mathcal{X}_2)$, π-изометрически отображающий $\mathcal{X}_1$ на $\mathcal{X}_2$ так, что $A_2R=RA_1, B_2=RB_1, C_2R=C_1$.

В теории характеристических функций унитарных узлов с внутренним пространством класса π_κ получены результаты (смотри [6], теоремы 2.1.2, 2.1.3, 2.3.1), формулируемые ниже в терминах систем.

Теорема 1.1. *Пусть $\Sigma=(A,B,C,D;\,\mathcal{X},\mathcal{U},\mathcal{Y};\kappa)$ – простая консервативная система рассеяния. Тогда $\theta_\Sigma(z)\in S^0_\kappa(\mathcal{U},\mathcal{Y})$.*

Теорема 1.2. *Пусть $\theta(z)\in S^0_\kappa(\mathcal{U},\mathcal{Y})$. Тогда существует простая консервативная система $\Sigma=(A,B,C,D;\,\mathcal{X},\mathcal{U},\mathcal{Y};\kappa)$ с $\theta_\Sigma(z)=\theta(z)$ в K. Такая система Σ определяется по θ с точностью до унитарной эквивалентности.*

2. Предварительные результаты

Теорема 2.1. *Всякая диссипативная система рассеяния $\Sigma=(A,B,C,D;\mathcal{X},\mathcal{U},\mathcal{Y};\kappa)$ имеет консервативную дилатацию $\widehat{\Sigma}=(\widehat{A},\widehat{B},\widehat{C},D;\widehat{\mathcal{X}},\mathcal{U},\mathcal{Y};\kappa)$.*

Замечание. Несмотря на то, что определение дилатации допускает ситуацию, при которой $\mathcal{X}$ и $\widehat{\mathcal{X}}$ принадлежат разным классам π_κ и $\pi_{\widehat{\kappa}}$, теорема утверждает, что существует дилатация с пространством состояний того же класса π_κ, что и $\mathcal{X}$.

Доказательство. Поскольку $M_\Sigma=\begin{bmatrix} A & B\\ C & D\end{bmatrix}$ – π-сжатие, теорема 2.3 из [5] утверждает, что существуют гильбертовы пространства $\mathcal{T}$, $\widetilde{\mathcal{T}}$ и операторы

$$T\in\mathcal{L}(\mathcal{T},\mathcal{X}[+]\mathcal{Y}),\ \widetilde{T}\in\mathcal{L}(\widetilde{\mathcal{T}}[+]\mathcal{U},\mathcal{X}),\ L\in\mathcal{L}(\mathcal{T},\widetilde{\mathcal{T}})$$

такие, что оператор

$$U = \begin{bmatrix} M_\Sigma & T \\ \widetilde{T}^* & L \end{bmatrix} \in \mathcal{L}(\mathcal{X}[+]\mathcal{U}[+]\mathcal{T}, \mathcal{X}[+]\mathcal{Y}[+]\widetilde{\mathcal{T}}) \tag{2.1}$$

является π-унитарным.

Построим систему $\widehat{\Sigma} = (\widehat{A}, \widehat{B}, \widehat{C}, D; \widehat{\mathcal{X}}, \mathcal{U}, \mathcal{Y}; \widehat{\kappa})$ следующим образом. Пусть $l_2^-(\widetilde{\mathcal{T}}) := \bigoplus\limits_{-\infty}^{-1} \widetilde{\mathcal{T}}$ и $l_2^+(\mathcal{T}) := \bigoplus\limits_{1}^{+\infty} \mathcal{T}$ – гильбертовы пространства ($\bigoplus$ обозначает ортогональную сумму гильбертовых пространств). Положим

$$\widehat{\mathcal{X}} := l_2^-(\widetilde{\mathcal{T}})[+]\mathcal{X}[+]l_2^-(\mathcal{T}),$$

$$\widehat{A}(\dots, \widetilde{t}_{-2}, \widetilde{t}_{-1}, \underline{x}, t_1, t_2, t_3, \dots) :=$$

$$= (\dots, \widetilde{t}_{-1}, \widetilde{T}^*|_{\mathcal{X}} x + Lt_1, \underline{Ax + P_{\mathcal{X}} T t_1}, t_2, t_3, \dots),$$

$$\widehat{B}u := (\dots, 0, 0, \widetilde{T}^*|_{\mathcal{U}} u, \underline{Bu}, 0, 0, \dots),$$

$$\widehat{C}(\dots, \widetilde{t}_{-2}, \widetilde{t}_{-1}, \underline{x}, t_1, t_2, t_3, \dots) := Cx + P_{\mathcal{Y}} T t_1$$

(подчеркнуты элементы из $\mathcal{X}$). Непосредственно проверяется, что $\widehat{\Sigma}$ – дилатация системы Σ, и что оператор $M_{\widehat{\Sigma}}$ π-унитарен. Очевидно, что $\widehat{\mathcal{X}}$ и $\mathcal{X}$ одного класса π_κ. $\square$

Теорема 2.2. *Пусть $\Sigma = (A, B, C, D; \mathcal{X}, \mathcal{U}, \mathcal{Y}; \kappa)$ – диссипативная система рассеяния. Тогда $\theta_\Sigma(z) \in S^0_{\kappa_0}(\mathcal{U}, \mathcal{Y})$ при некотором $\kappa_0 \le \kappa$.*

Доказательство. Рассмотрим $M_\Sigma = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$ – матрицу системы Σ. Тогда для π-самосопряженного оператора $I - M_\Sigma^* M_\Sigma$ существует факторизация Богнара–Крамли ([5], теорема 1.1)

$$I - M_\Sigma^* M_\Sigma = \begin{bmatrix} M^* \\ N^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M & N \end{bmatrix}, \tag{2.2}$$

где $M \in \mathcal{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Y}_1), N \in \mathcal{L}(\mathcal{U}, \mathcal{Y}_1)$, причем так как M_Σ – π-сжатие, то $\mathcal{Y}_1$ – гильбертово пространство.

Равенство (2.2) можно переписать покомпонентно с учетом определения матрицы M_Σ:

$$\begin{gathered} I - A^*A - C^*C = M^*M, \quad -A^*B - C^*D = M^*N, \\ I - D^*D - B^*B = N^*N. \end{gathered} \tag{2.3}$$

Учитывая (2.3), после преобразований получаем:

$$I-\theta^*(w)\theta(z)=(1-z\overline{w})B^*(I-\overline{w}A^*)^{-1}(I-zA)^{-1}B+\varphi^*(w)\varphi(z),$$

где $\varphi(z)=[N+wM(I-zA)^{-1}B]$.

Учитывая, что пространство $\mathcal{X}$ является π_κ-пространством, а ядро $(1-\overline{w}z)^{-1}\varphi^*(w)\varphi(z)$ является неотрицательно определенным на $\Omega\times\Omega$, где Ω – область голоморфности функции $(I-zA)^{-1}$ в K, получаем, что $\theta(z)\in S^0_{\kappa_0}(\mathcal{U},\mathcal{Y})$, где $\kappa_0\le\kappa$. □

Далее мы будем рассматривать только такие системы рассеяния $\Sigma=(A,B,C,D;\mathcal{X},\mathcal{U},\mathcal{Y};\kappa)$, передаточные функции которых принадлежат множеству $S^0_\kappa(\mathcal{U},\mathcal{Y})$, то есть для которых $\kappa=\kappa_0$. Такому условию удовлетворяют, например, простые консервативные, изометрические управляемые, $*$-изометрические наблюдаемые системы рассеяния. Это следует из теорем 2.1.3, 2.2.1, 2.2.2 и 2.3.1 работы [6]. Следующая теорема говорит о том, что таким свойством обладают и минимальные диссипативные системы.

Теорема 2.3. *Если $\Sigma=(A,B,C,D;\mathcal{X},\mathcal{U},\mathcal{Y};\kappa)$ – произвольная минимальная диссипативная система рассеяния, то $\theta_\Sigma(z)\in S^0_\kappa(\mathcal{U},\mathcal{Y})$.*

Доказательство. Пусть $\Sigma=(A,B,C,D;\mathcal{X},\mathcal{U},\mathcal{Y};\kappa)$ – произвольная минимальная диссипативная система рассеяния. По теореме 2.2 $\theta_\Sigma(z)\in S^0_{\kappa_0}(\mathcal{U},\mathcal{Y})$, где $\kappa_0\le\kappa$. Остается доказать, что $\kappa_0=\kappa$, если система Σ минимальна. Так как A – π-сжатие, то оператор A имеет неположительный собственный вектор x_0 ([9], теорема 11.2): $Ax_0=\lambda x_0$. Докажем, что x_0 – отрицательный вектор. В самом деле, из диссипативности системы Σ вытекает, что $A^*A+C^*C\le I$, $[A^*Ax_0,x_0]_{\mathcal{X}}+[C^*Cx_0,x_0]_{\mathcal{X}}\le[x_0,x_0]_{\mathcal{X}}$. Если x_0 – нейтральный вектор, то $[x_0,x_0]_{\mathcal{X}}=0$ и

$$[A^*Ax_0,x_0]_{\mathcal{X}}=[Ax_0,Ax_0]_{\mathcal{X}}=|\lambda|^2[x_0,x_0]_{\mathcal{X}}=0,$$

поэтому

$$(Cx_0,Cx_0)_{\mathcal{Y}}=0,\quad Cx_0=0.$$

Но тогда $CA^nx_0=\lambda^nCx_0=0$, то есть $x_0\in\bigcap_{n\ge0}\ker CA^n$, что противоречит наблюдаемости, а следовательно, и минимальности Σ.

Таким образом, оператор A имеет отрицательное одномерное инвариантное подпространство $\mathcal{X}'$, порожденное вектором x_0.

Так как A – π-сжатие, то соответствующее собственное значение λ по модулю больше 1.

Пусть $\mathcal{X}'' = \mathcal{X}[-]\mathcal{X}'$. Тогда A принимает вид

$$A = \begin{bmatrix} A'_{11} & A'_{12} \\ 0 & A'_{22} \end{bmatrix},$$

где $A'_{11} \in \mathcal{L}(\mathcal{X}', \mathcal{X}')$, $A'_{12} \in \mathcal{L}(\mathcal{X}'', \mathcal{X}')$, $A'_{22} \in \mathcal{L}(\mathcal{X}'', \mathcal{X}'')$; A'_{22} тоже является сжатием, поскольку $A'_{22} = (A^*|_{\mathcal{X}''})^*$, а в π_κ-пространствах сопряжение к π-сжатию есть снова π-сжатие (см. [5], следствие 2.5). Проводя аналогичные рассуждения для A'_{22} и повторяя их κ раз, получим отрицательное подпространство $\mathcal{X}_-$ размерности κ, инвариантное относительно A. Обозначим

$$\mathcal{X}_+ = \mathcal{X}[-]\mathcal{X}_-.$$

Относительно декомпозиции $\mathcal{X} = \mathcal{X}_-[+]\mathcal{X}_+$ оператор A имеет вид

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix}.$$

Все собственные значения оператора A_{11} по модулю больше 1, поэтому $\mathcal{X}_-$ представляет собой прямую сумму корневых подпространств оператора A_{11} и, следовательно, множество линейных комбинаций некоторых корневых векторов оператора A, соответствующих собственным значениям A, большим по модулю единицы. Но спектр оператора A, лежащий вне круга $\overline{K} = \{z : |z| \le 1\}$, состоит из конечного числа собственных значений оператора A общим числом κ (с учетом размерности соответствующих корневых подпространств, см. [9]). А тогда $\mathcal{X}_-$ есть образ проектора Рисса P_-, соответствующего той части спектра A, которая лежит вне $\overline{K}$ (см. [10], глава 7, §3, теорема 24). Обозначим $P_+ = I - P_-$, $\mathcal{X}_+ = P_+\mathcal{X}$. Относительно прямой суммы $\mathcal{X} = \mathcal{X}_- \dot{+} \mathcal{X}_+$ операторы A, B и C имеют вид

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix}, \quad C = [\,C_1 \quad C_2\,].$$

Тогда

$$\theta_\Sigma(z) = D + zC_1(I - zA_1)^{-1}B_1 + zC_2(I - zA_2)^{-1}B_2.$$

Последнее слагаемое голоморфно внутри K, поэтому количество полюсов (всегда подсчитываемое с учетом порядка) функции $\theta_\Sigma(z)$ совпадает с количеством полюсов функции $D + zC_1(I -$

$zA_1)^{-1}B_1$. Так как $\theta_\Sigma(z) \in S^0_{\kappa_0}(\mathcal{U},\mathcal{Y})$, то количество полюсов функции $\theta_\Sigma(z)$ не превосходит κ_0 (определение используемого здесь порядка полюса см. в [11], §2). Так как система Σ минимальна, то и система $\Sigma_1 = (A_1, B_1, C_1, D; \mathcal{X}_-, \mathcal{U}, \mathcal{Y}; \kappa)$ минимальна, а поэтому ее передаточная функция $\theta_{\Sigma_1}(z) = D + zC_1(I - zA_1)^{-1}B_1$ имеет столько же полюсов, сколько и функция $(I - zA_1)^{-1}$ (с учетом порядка), то есть κ. Таким образом, $\kappa \le \kappa_0$, и поэтому $\kappa = \kappa_0$. □

Лемма 2.4. *Пусть $\Sigma = (A, B, C, D; \mathcal{X}, \mathcal{U}, \mathcal{Y}; \kappa)$ – произвольная консервативная система рассеяния, передаточная функция которой $\theta_\Sigma(z)$ лежит в $S^0_\kappa(\mathcal{U},\mathcal{Y})$. Тогда подпространства $\mathcal{X}^c_\Sigma$ и $\mathcal{X}^o_\Sigma$ являются проекционно-полными, более того, их π-ортогональные дополнения $(\mathcal{X}^c_\Sigma)^{[\perp]}$ и $(\mathcal{X}^o_\Sigma)^{[\perp]}$ гильбертовы.*

Доказательство. Покажем, например, что пространство $(\mathcal{X}^c_\Sigma)^{[\perp]}$ – гильбертово. Для функции $\theta(z) = \theta_\Sigma(z)$ существует $*$-изометрическая наблюдаемая система $\Sigma_0 = (A_0, B_0, C_0, D_0; \mathcal{X}_0, \mathcal{U}, \mathcal{Y}; \kappa)$, являющаяся реализацией функции $\theta(z)$, где $\mathcal{X}_0$ - пространство с воспроизводящим ядром $K_{\theta_\Sigma}(z,w)$, определяемым по формуле (1.9) (см. [6], теорема 2.2.1). Так как Σ – консервативная система, то

$$K_{\theta_\Sigma(z,w)} = C(I - zA)^{-1}(I - \overline{w}A^*)^{-1}C^* \tag{2.4}$$

(там же, теорема 2.1.2). Определим линейное отношение $V \subset \mathcal{X}_0 \times \mathcal{X}$ следующим образом:

$$V = \{(C(I - zA)^{-1}\sum_{j=1}^{n}(I - \overline{w}_jA^*)^{-1}C^*\xi_j;\quad \sum_{j=1}^{n}(I - \overline{w}_jA^*)^{-1}C^*\xi_j)|$$
$$|w_j| < 1, \xi_j \in \mathcal{Y}, n = 0, 1, 2, \ldots\}.$$

В силу соотношений

$$\left[\sum_{j=1}^{n}K_{\theta_\Sigma}(z,w_j)\xi_j;\quad \sum_{l=1}^{n}K_{\theta_\Sigma}(z,w_j^{'})\eta_j\right]_{\mathcal{X}_0}$$
$$= \sum_{j=1}^{n}\sum_{l=1}^{n}\left[K_{\theta_\Sigma}(z,w_j)\xi_j;\quad K_{\theta_\Sigma}(z,w_l^{'})\eta_l\right]_{\mathcal{X}_0}$$
$$= \sum_{j=1}^{n}\sum_{l=1}^{n}\left[K_{\theta_\Sigma}(w_l^{'},w_j)\xi_j;\quad \eta_l\right]_{\mathcal{Y}}$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \sum_{l=1}^{n} \Big[C(I - w_l' A)^{-1} (I - \overline{w}_j A^*)^{-1} C^* \xi_j; \quad \eta_l \Big]_{\mathcal{Y}}$$

$$= \left[\sum_{j=1}^{n} (I - \overline{w}_j A^*)^{-1} C^* \xi_j; \quad \sum_{l=1}^{n} (I - \overline{w_l'} A^*)^{-1} C^* \eta_l \right]_{\mathcal{X}}$$

V – π-изометрическое отношение на своей области определения.

Так как область определения отношения V плотна в $\mathcal{X}_0$ (в силу наблюдаемости системы Σ_0), то V продолжается по непрерывности на все пространство $\mathcal{X}_0$ до изометрического оператора V_0 ([6], теорема 1.4.2). Так как $V_0 \mathcal{X}_0 = \mathcal{X}_\Sigma^o$, то $\mathcal{X}_\Sigma^o$ – пространство Понтрягина с тем же числом отрицательных квадратов, что и $\mathcal{X}_0$, то есть κ. Поэтому пространство $\mathcal{X}_\Sigma^o$ регулярно, а так как пространство $\mathcal{X} \supset \mathcal{X}_\Sigma^o$ само имеет κ отрицательных квадратов, то пространство $(\mathcal{X}_\Sigma^c)^{[\perp]}$ гильбертово.

Для $(\mathcal{X}_\Sigma^o)^{[\perp]}$ утверждение леммы доказывается применением уже доказанного утверждения к сопряженной системе $\Sigma^* = (A^*, C^*, B^*, D^*; \mathcal{X}, \mathcal{Y}, \mathcal{U}, \kappa)$. □

Лемма 2.5. *Пусть $\Sigma = (A, B, C, D; \mathcal{X}, \mathcal{U}, \mathcal{Y}; \kappa)$ – произвольная диссипативная система рассеяния, передаточная функция которой $\theta_\Sigma(z)$ лежит в $S_\kappa^0(\mathcal{U}, \mathcal{Y})$. Тогда подпространства $\mathcal{X}_\Sigma^c$ и $\mathcal{X}_\Sigma^o$ являются проекционно-полными, более того, их π-ортогональные дополнения $(\mathcal{X}_\Sigma^c)^{[\perp]}$ и $(\mathcal{X}_\Sigma^o)^{[\perp]}$ гильбертовы.*

Доказательство. Пусть $\Sigma = (A, B, C, D; \mathcal{X}, \mathcal{U}, \mathcal{Y}; \kappa)$ – произвольная диссипативная система рассеяния с передаточной функцией $\theta(z) = \theta_\Sigma(z) \in S_\kappa^0(\mathcal{U}, \mathcal{Y})$. Пусть $\widehat{\Sigma} = (\widehat{A}, \widehat{B}, \widehat{C}, D; \widehat{\mathcal{X}}, \mathcal{U}, \mathcal{Y}; \kappa)$ – существующая согласно теореме 2.1 консервативная дилатация системы Σ. Для нее лемма 2.4 гарантирует, что подпространства $\widehat{\mathcal{X}}_{\widehat{\Sigma}}^c$ и $\widehat{\mathcal{X}}_{\widehat{\Sigma}}^o$ регулярны, $(\widehat{\mathcal{X}}_{\widehat{\Sigma}}^c)^{[\perp]}$ и $(\widehat{\mathcal{X}}_{\widehat{\Sigma}}^o)^{[\perp]}$ гильбертовы.

Согласно (1.7)

$$\widehat{A}^n \widehat{B} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ 0 & A_{22} & A_{23} \\ 0 & 0 & A_{33} \end{bmatrix}^n \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_n \\ A^n B \\ 0 \end{bmatrix},$$

где $F_n \in \mathcal{L}(\mathcal{U}, E)$ – некоторый оператор, зависящий от n. Далее,

$$\widehat{\mathcal{X}}_{\widehat{\Sigma}}^c = \bigvee_{n \geq 0} \begin{bmatrix} F_n \\ A^n B \\ 0 \end{bmatrix} \mathcal{U}.$$

Поэтому, если вектор $x \in \mathcal{X}$ π-ортогонален $\mathcal{X}^c_\Sigma$, то $\begin{bmatrix} 0 \\ x \\ 0 \end{bmatrix} [\perp] \widehat{\mathcal{X}}^c_{\widehat{\Sigma}}$. Следовательно, любой вектор $x \in \mathcal{X}$, π-ортогональный $\mathcal{X}^c_\Sigma$, положителен. Тогда $(\mathcal{X}^c_\Sigma)^{[\perp]}$ – невырожденное подпространство пространства Понтрягина $\mathcal{X}$, а следовательно, оно регулярно ([8], теорема I.9.11). Стало быть, пространство $\mathcal{X}^c_\Sigma$ тоже регулярно. Для $\mathcal{X}^o_\Sigma$ доказательство аналогично. □

Пусть $\Sigma = (A, B, C, D; \mathcal{X}, \mathcal{U}, \mathcal{Y}; \kappa)$ – консервативная система, $\theta_\Sigma(z) \in S^0_\kappa(\mathcal{U}, \mathcal{Y})$. Введем обозначения

$$N(\Sigma) = (\mathcal{X}^c_\Sigma)^{[\perp]} \cap (\mathcal{X}^o_\Sigma)^{[\perp]}, \quad R(\Sigma) = N(\Sigma)^{[\perp]}. \tag{2.5}$$

По лемме 2.4 $N(\Sigma)$ – гильбертово подпространство пространства $\mathcal{X}$, $R(\Sigma)$ регулярно.

Система Σ будет простой тогда и только тогда, когда $R(\Sigma) = \mathcal{X}$.

Собственной частью системы Σ будем называть систему $\Sigma_R = (P_{R(\Sigma)}A|_{R(\Sigma)}, P_{R(\Sigma)}B, C|_{R(\Sigma)}, D; R(\Sigma), \mathcal{U}, \mathcal{Y}; \kappa)$. Σ_R снова является консервативной системой, причем $\theta_\Sigma(z) = \theta_{\Sigma_R}(z)$ в некоторой окрестности нуля, так как Σ_R есть сужение системы Σ.

Предложение 2.6. *Пусть $\Sigma = (A, B, C, D; \mathcal{X}, \mathcal{U}, \mathcal{Y}; \kappa)$ – консервативная система рассеяния, и пусть $\theta_\Sigma(z) \in S^0_\kappa(\mathcal{U}, \mathcal{Y})$. Тогда:*

1) Максимальное A-инвариантное подпространство, аннулируемое оператором C, на котором A действует как π-изометрия, есть $(\mathcal{X}^o_\Sigma)^{[\perp]}$

2) Максимальное A^*-инвариантное подпространство, аннулируемое оператором B^*, на котором A^* действует как π-изометрия, есть $(\mathcal{X}^c_\Sigma)^{[\perp]}$

3) Максимальное A-инвариантное подпространство, аннулируемое операторами B^* и C, на котором A индуцирует π-унитарный оператор, есть $N(\Sigma) = (\mathcal{X}^c_\Sigma)^{[\perp]} \cap (\mathcal{X}^o_\Sigma)^{[\perp]}$.

Доказательство. Нужно повторить доказательство соответствующего утверждения для систем с гильбертовым пространством состояний, см. [3], предложение 2.2. □

3. Минимальные сужения

Лемма 3.1. *Пусть X – π_κ-пространство, M и N – его регулярные подпространства, причем $M^{[\perp]}$ и $N^{[\perp]}$ – гильбертовы. Тогда $\overline{P_M N}$ и $\overline{P_N M}$ – регулярные подпространства.*

Доказательство. Докажем, например, что $\overline{P_N M}$ – регулярное подпространство.

Заметим, что
$$N^{[\perp]} + P_N M = N^{[\perp]} + M. \tag{3.1}$$

Далее, для любых двух линеалов L_1 и $L_2 \subset \mathcal{X}$ выполняется равенство $L_1^{[\perp]} \cap L_2^{[\perp]} = (L_1 + L_2)^{[\perp]}$. Так как пространство N регулярно, то $\left((N)^{[\perp]}\right)^{[\perp]} = N$. Получаем

$$\begin{aligned} N \cap (P_N M)^{[\perp]} &= (N^{[\perp]})^{[\perp]} \cap (P_N M)^{[\perp]} \\ = (N^{[\perp]} + P_N M)^{[\perp]} &= (N^{[\perp]} + M)^{[\perp]} = N \cap M^{[\perp]} \end{aligned} \tag{3.2}$$

Заметим, что $N \cap (P_N M)^{[\perp]}$ – это π-ортогональное дополнение к $P_N M$ в N. Так как пространство $N \cap M^{[\perp]}$ гильбертово, то оно невырождено, поэтому $N \cap (P_N M)^{[\perp]}$ невырождено, а следовательно, $N \cap (P_N M)^{[\perp]}$ – регулярное подпространство в N. Поэтому $\overline{P_N M}$ – регулярное подпространство в N, а потому и в $\mathcal{X}$. □

Теорема 3.2. *Пусть* $\Sigma = (A, B, C, D; \mathcal{X}, \mathcal{U}, \mathcal{Y}; \kappa)$ *– диссипативная система рассеяния с передаточной функцией* $\theta_\Sigma(z) \in S_\kappa^0(\mathcal{U}, \mathcal{Y})$. *Определим следующие подпространства:*
$$\mathcal{X}_1 := (\mathcal{X}_\Sigma^o)^{[\perp]}, \mathcal{X}_2 := \overline{P_{\mathcal{X}_\Sigma^o} \mathcal{X}_\Sigma^c}, \mathcal{X}_3 := \mathcal{X}_\Sigma^o \cap (\mathcal{X}_\Sigma^c)^{[\perp]}. \tag{3.3}$$

Тогда
$$\mathcal{X} = \mathcal{X}_1 [+] \mathcal{X}_2 [+] \mathcal{X}_3, \tag{3.4}$$

причем матрица системы Σ *относительно декомпозиции* (3.4) *имеет вид:*
$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & B_1 \\ 0 & A_{22} & A_{23} & B_2 \\ 0 & 0 & A_{33} & 0 \\ 0 & C_2 & C_3 & D \end{bmatrix}.$$

Доказательство. Леммы 2.5 и 3.1 гарантируют регулярность пространств $\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2, \mathcal{X}_3$ и гильбертовость пространств $\mathcal{X}_1$ и $\mathcal{X}_3$. Поэтому, в частности, $\mathcal{X}$ и $\mathcal{X}_2$ принадлежат одному классу π_κ.

Дальнейшие рассуждения повторяют рассуждения для систем с гильбертовыми пространствами состояний (см. [3], лемма 1.3). □

Теорема 3.2 говорит о том, что любая диссипативная система $\Sigma = (A, B, C, D;\ \mathcal{X}, \mathcal{U}, \mathcal{Y}; \kappa)$ с передаточной функцией $\theta_\Sigma(z) \in$

$S^0_\kappa(\mathcal{U},\mathcal{Y})$ является дилатацией некоторой системы, которую мы обозначим через $\Sigma_{\text{res},1}$:

$$\Sigma_{\text{res},1} = (P_{\mathcal{X}_2}A|_{\mathcal{X}_2}, P_{\mathcal{X}_2}B, C|_{\mathcal{X}_2}, D; \mathcal{X}_2, \mathcal{U}, \mathcal{Y}; \kappa) \tag{3.5}$$

в обозначениях (3.3).

Система $\Sigma_{\text{res},1}$ диссипативна, поскольку $M_{\Sigma_{\text{res},1}} = P_{\mathcal{X}_2}M_\Sigma|_{\mathcal{X}_2}$ является π-сжатием, так как $\mathcal{X}_1[+]\mathcal{X}_3 = \mathcal{X}[-]\mathcal{X}_2$ – положительное подпространство.

Покажем, что система $\Sigma_{\text{res},1}$ минимальна. Обозначим $A' = P_{\mathcal{X}_2}A|_{\mathcal{X}_2}$, $B' = P_{\mathcal{X}_2}B$, $C' = C|_{\mathcal{X}_2}$. Для всех $k \geq 0$

$$(A')^k B' = P_{\mathcal{X}_2}A^k B, \quad (A')^{*^k}(C')^* = P_{\mathcal{X}_2}(A^*)^k C^*,$$

$$\mathcal{X}^c_{\Sigma_{\text{res},1}} = \bigvee_{k\geq 0}(A')^k B'\mathcal{U} = \bigvee_{k\geq 0} P_{\mathcal{X}_2}A^k B\mathcal{U} = \overline{P_{\mathcal{X}_2}\bigvee_{k\geq 0}A^k B\mathcal{U}}$$
$$= \overline{P_{\mathcal{X}_2}\mathcal{X}^c_\Sigma} = \overline{P_{\mathcal{X}_2}P_{\mathcal{X}^o_\Sigma}\mathcal{X}^c_\Sigma} = P_{\mathcal{X}_2}\mathcal{X}_2 = \mathcal{X}_2,$$

$$\mathcal{X}^o_{\Sigma_{\text{res},1}} = \overline{P_{\mathcal{X}_2}\mathcal{X}^o_\Sigma} = \mathcal{X}_2.$$

Систему $\Sigma_{\text{res},1}$ будем называть *первым минимальным сужением* системы Σ.

Исходя из всего вышесказанного, верно следующее

Предложение 3.3. *Всякая диссипативная система рассеяния $\Sigma = (A, B, C, D; \mathcal{X}, \mathcal{U}, \mathcal{Y}; \kappa)$ с передаточной функцией $\theta_\Sigma(z) \in S^0_\kappa(\mathcal{U},\mathcal{Y})$ является дилатацией некоторой минимальной диссипативной системы рассеяния с π_κ-пространством состояний, а именно, своего первого минимального сужения $\Sigma_{\text{res},1}$.*

Лемма 3.4. *Первое минимальное сужение консервативной системы $\Sigma = (A, B, C, D; \mathcal{X}, \mathcal{U}, \mathcal{Y}; \kappa)$ и ее собственной части $\Sigma_R = (A_R, B_R, C_R, D;\ R(\Sigma), \mathcal{U},\ \mathcal{Y}; \kappa)$ совпадают.*

Доказательство. Рассуждения такие же, как и для систем с гильбертовыми пространствами состояний (см. [3], лемма 2.3). □

4. Минимальные и оптимальные реализации

Пусть дана диссипативная система рассеяния $\Sigma_0 = (A_0, B_0, C_0, D_0; \mathcal{X}_0, \mathcal{U}, \mathcal{Y}; \kappa)$ с передаточной функцией $\theta(z) = \theta_{\Sigma_0}(z) \in S^0_\kappa(\mathcal{U},\mathcal{Y})$. Систему Σ_0 будем называть *оптимальной*, если для любой другой диссипативной системы рассеяния $\Sigma = (A, B, C, D; \mathcal{X}, \mathcal{U}, \mathcal{Y}; \kappa)$, являющейся реализацией функции $\theta(z)$, для всех $N \geq 0$ и для любой последовательности входных данных $\{u(k)\}_{k=0}^{N-1}$ выполняются неравенства

$$E_{\mathcal{X}_0}(x_0(N)) \leq E_{\mathcal{X}}(x(N)), \tag{4.1}$$

где $x_0(N)$ и $x(N)$ – соответственно, состояния систем Σ_0 и Σ в момент времени N при начальных состояниях $x_0(0) = 0$ и $x(0) = 0$ и при рассматриваемых входных данных $u(k)$ $(0 \leq k \leq N)$. Используя определение системы, неравенство (4.1) можно переписать в виде

$$E_{\mathcal{X}_0}(\sum_{k=0}^{N-1} A_0^{k-1} B_0 u(N-k-1)) \leq E_{\mathcal{X}}(\sum_{k=0}^{N-1} A^{k-1} B u(N-k-1)). \tag{4.2}$$

Замечание. Пусть $\Sigma_0 = (A_0, B_0, C_0, D_0; \mathcal{X}_0, \mathcal{U}, \mathcal{Y}; \kappa)$ – произвольная диссипативная система рассеяния с передаточной функцией $\theta_{\Sigma_0}(z) = \theta(z) \in S_\kappa^0(\mathcal{U}, \mathcal{Y})$. Для того, чтобы проверить минимальность Σ_0, не обязательно сравнивать ее со всеми диссипативными системами $\Sigma = (A, B, C, D; \mathcal{X}, \mathcal{U}, \mathcal{Y}; \kappa)$ с той же передаточной функцией, а достаточно сравнить ее только с минимальными. В самом деле, пусть $\Sigma = (A, B, C, D; \mathcal{X}, \mathcal{U}, \mathcal{Y}; \kappa)$ – произвольная диссипативная реализация функции $\theta(z)$, $\Sigma_{\mathrm{res},1} = (\breve{A}, \breve{B}, \breve{C}, \breve{D}; \breve{\mathcal{X}}, \mathcal{U}, \mathcal{Y}; \kappa)$ – ее первое минимальное сужение. Тогда $\Sigma_{\mathrm{res},1}$ – диссипативная реализация функции $\theta(z)$. Так как $\mathcal{X}[-]\breve{\mathcal{X}}$ – гильбертово пространство, то π-ортопроектор $P_{\breve{\mathcal{X}}} : \mathcal{X} \to \breve{\mathcal{X}}$ является π-сжатием, а потому для всех $N \geq 0$ и для любой последовательности входных данных $\{u(k)\}_{k=0}^{N-1}$ выполняются неравенства

$$\begin{aligned} E_{\breve{\mathcal{X}}}(\sum_{k=0}^{N-1} \breve{A}^{k-1} \breve{B} u(N-k-1)) &= E_{\breve{\mathcal{X}}}(P_{\breve{\mathcal{X}}}(\sum_{k=0}^{N-1} A^{k-1} B u(N-k-1))) \\ &\leq E_{\mathcal{X}}(\sum_{k=0}^{N-1} A^{k-1} B u(N-k-1)). \end{aligned} \tag{4.3}$$

Предложение 4.1. *Если система $\Sigma = (A, B, C, D; \mathcal{X}, \mathcal{U}, \mathcal{Y}; \kappa)$ оптимальна, то $\mathcal{X}_\Sigma^c \subset \mathcal{X}_\Sigma^o$. Более того, система $\Sigma_{\mathrm{res},1}$ тоже оптимальна.*

Доказательство. В самом деле, пусть $\theta(z) = \theta_\Sigma(z) \in S_\kappa^0(\mathcal{U}, \mathcal{Y})$ – передаточная функция оптимальной системы $\Sigma = (A, B, C, D; \mathcal{X}, \mathcal{U}, \mathcal{Y}; \kappa)$.

Пусть существует $x = \sum\limits_{k=0}^{N-1} A^{k-1}Bu(N-k-1)$ при некоторых $N \geq 0$ и $u(k) \in \mathcal{U}, k = 0,1,2,\dots,N-1$, $x\overline{\in}\mathcal{X}_\Sigma^o$. Тогда $E_\mathcal{X}(x,x) > E_\mathcal{X}(P_{\mathcal{X}_\Sigma^o}x, P_{\mathcal{X}_\Sigma^o}x)$, поскольку по лемме 2.5 $\mathcal{X}[-]\mathcal{X}_\Sigma^o$ – гильбертово подпространство пространства $\mathcal{X}$ и $P_{\mathcal{X}_\Sigma^o}$ – сжатие.

Относительно представления $\mathcal{X} = (\mathcal{X}_\Sigma^o)^{[\perp]}[+]\mathcal{X}_\Sigma^o$ матрица системы M_Σ запишется в виде блок-оператора

$$M_\Sigma = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & B_1 \\ 0 & A_{22} & B_2 \\ 0 & C_2 & D \end{bmatrix}.$$

Система $\Sigma_2 = (A_{22}, B_2, C_2, D; \mathcal{X}_\Sigma^o, \mathcal{U}, \mathcal{Y}; \kappa)$ – тоже диссипативная реализация функции $\theta(z)$ и

$$E_\mathcal{X}(x) = E_\mathcal{X}(\sum_{k=0}^{N-1} A^{k-1}Bu(N-k-1)) > E_{\mathcal{X}_\Sigma^o}(\sum_{k=0}^{N-1} A_{22}^{k-1}B_2u(N-k-1)),$$

что противоречит оптимальности системы Σ.

Если $\Sigma = (A,B,C,D;\mathcal{X},\mathcal{U},\mathcal{Y};\kappa)$ – оптимальная система, то в силу неравенства (4.3) система $\Sigma_{\mathrm{res},1}$ тоже должна быть оптимальной. □

Лемма 4.2. *Пусть* $\Sigma = (A,B,C,D;\mathcal{X},\mathcal{U},\mathcal{Y};\kappa)$ – *произвольная диссипативная реализация функции* $\theta(z) \in S_\kappa^0(\mathcal{U},\mathcal{Y})$, $\widehat{\Sigma} = (\widehat{A},\widehat{B},\widehat{C},\widehat{D};\widehat{\mathcal{X}},\mathcal{U},\mathcal{Y};\kappa)$ – *ее консервативная дилатация*, $\Sigma_{\mathrm{res},1} = (\breve{A},\breve{B},\breve{C},\breve{D};\breve{\mathcal{X}},\mathcal{U},\mathcal{Y};\kappa)$ – *первое минимальное сужение системы* $\widehat{\Sigma}$. *Тогда для всех* $N \geq 0$ *и для любой последовательности входных данных* $u(k)_{k=0}^{N-1}$ *выполнены неравенства*

$$E_{\breve{\mathcal{X}}}(\sum_{k=0}^{N-1} \breve{A}^{k-1}\breve{B}u(N-k-1)) \leq E_\mathcal{X}(\sum_{k=0}^{N-1} A^{k-1}Bu(N-k-1)). \quad (4.4)$$

Доказательство. Пусть $\widehat{\mathcal{X}} = E[+]\mathcal{X}[+]E_*$, и относительно этой декомпозиции система Σ выглядит следующим образом:

$$M_{\widehat{\Sigma}} = \begin{bmatrix} \widehat{A} & \widehat{B} \\ \widehat{C} & \widehat{D} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & B_1 \\ 0 & A & A_{23} & B \\ 0 & 0 & A_{33} & 0 \\ 0 & C & C_3 & D \end{bmatrix}.$$

Согласно теореме 3.2

$$M_{\widehat{\Sigma}} = \begin{bmatrix} \widehat{A} & \widehat{B} \\ \widehat{C} & \widehat{D} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A'_{11} & A'_{12} & A'_{13} & B'_1 \\ 0 & \breve{A} & A'_{23} & \breve{B} \\ 0 & 0 & A'_{33} & 0 \\ 0 & C & C'_3 & D \end{bmatrix}$$

относительно разложения

$$\widehat{\mathcal{X}} = \widehat{\mathcal{X}}_1[+]\widehat{\mathcal{X}}_2[+]\widehat{\mathcal{X}}_3,$$

где $\widehat{\mathcal{X}}_1 = (\widehat{\mathcal{X}}^o_{\widehat{\Sigma}})^{[\perp]}$, $\widehat{\mathcal{X}}_2 = \breve{\mathcal{X}} = \overline{P_{\widehat{\mathcal{X}}^o_{\widehat{\Sigma}}}\widehat{\mathcal{X}}^c_{\widehat{\Sigma}}}$, $\widehat{\mathcal{X}}_3 = \widehat{\mathcal{X}}^o_{\widehat{\Sigma}} \cap (\widehat{\mathcal{X}}^c_{\widehat{\Sigma}})^{[\perp]}$.

С одной стороны,

$$E_{\breve{\mathcal{X}}}(\sum_{k=0}^{N-1} \breve{A}^{k-1}\breve{B}u(N-k-1)) = E_{\widehat{\mathcal{X}}}(P_{\widehat{\mathcal{X}}_2}\sum_{k=0}^{N-1} \widehat{A}^{k-1}\widehat{B}u(N-k-1))$$

$$= E_{\widehat{\mathcal{X}}}(\sum_{k=0}^{N-1} \widehat{A}^{k-1}\widehat{B}u(N-k-1)) - E_{\widehat{\mathcal{X}}}(P_{\widehat{\mathcal{X}}_1}\sum_{k=0}^{N-1} \widehat{A}^{k-1}\widehat{B}u(N-k-1))$$

$$-E_{\widehat{\mathcal{X}}}(P_{\widehat{\mathcal{X}}_3}\sum_{k=0}^{N-1} \widehat{A}^{k-1}\widehat{B}u(N-k-1))$$

$$= E_{\widehat{\mathcal{X}}}(\sum_{k=0}^{N-1} \widehat{A}^{k-1}\widehat{B}u(N-k-1)) - E_{\widehat{\mathcal{X}}}(P_{\widehat{\mathcal{X}}_1}\sum_{k=0}^{N-1} \widehat{A}^{k-1}\widehat{B}u(N-k-1)), \quad (4.5)$$

так как $\widehat{\mathcal{X}}_3 \subset (\widehat{\mathcal{X}}^c_{\widehat{\Sigma}})^{[\perp]}$.

С другой стороны,

$$E_{\mathcal{X}}(\sum_{k=0}^{N-1} A^{k-1}Bu(N-k-1)) = E_{\widehat{\mathcal{X}}}(P_{\mathcal{X}}\sum_{k=0}^{N-1} \widehat{A}^{k-1}\widehat{B}u(N-k-1))$$

$$= E_{\widehat{\mathcal{X}}}(\sum_{k=0}^{N-1} \widehat{A}^{k-1}\widehat{B}u(N-k-1)) - E_{\widehat{\mathcal{X}}}(P_E\sum_{k=0}^{N-1} \widehat{A}^{k-1}\widehat{B}u(N-k-1))$$

$$-E_{\widehat{\mathcal{X}}}(P_{E_*}\sum_{k=0}^{N-1} \widehat{A}^{k-1}\widehat{B}u(N-k-1))$$

$$= E_{\widehat{\mathcal{X}}}(\sum_{k=0}^{N-1} \widehat{A}^{k-1}\widehat{B}u(N-k-1)) - E_{\widehat{\mathcal{X}}}(P_E\sum_{k=0}^{N-1} \widehat{A}^{k-1}\widehat{B}u(N-k-1)), \quad (4.6)$$

так как $\widehat{B}^* E_* = \{0\}$, и поэтому $E_* \subset (\widehat{\mathcal{X}}^o_{\widehat{\Sigma}})^{[\perp]}$.

По предложению 2.6, так как $\widehat{A}E \subset E$, $\widehat{C}E = \{0\}$ и $A|_E$ – π-изометрия, то $E \subset (\widehat{\mathcal{X}}^o_{\widehat{\Sigma}})^{[\perp]} = \widehat{\mathcal{X}}_1$, причем $\widehat{\mathcal{X}}_1$ и, тем более, E – гильбертовы подпространства. Поэтому из (4.5) и (4.6) вытекает

$$E_{\breve{\mathcal{X}}}(\sum_{k=0}^{N-1} \breve{A}^{k-1}\breve{B}u(N-k-1)) \leq E_{\mathcal{X}}(\sum_{k=0}^{N-1} A^{k-1}Bu(N-k-1)),$$

что и доказывает лемму. □

Теорема 4.3 (основная). *Для всякой функции $\theta(z) \in S^0_\kappa(\mathcal{U},\mathcal{Y})$ существует единственная с точностью до π-унитарного подобия минимальная и оптимальная система $\Sigma_0 = (A_0, B_0, C_0, D_0; \mathcal{X}_0, \mathcal{U}, \mathcal{Y}; \kappa)$ с передаточной функцией $\theta_{\Sigma_0}(z) = \theta(z)$ в единичном круге K.*

Доказательство. Пусть $\theta(z) \in S^0_\kappa(\mathcal{U},\mathcal{Y})$, $\Sigma = (A, B, C, D; \mathcal{X}, \mathcal{U}, \mathcal{Y}; \kappa)$ – произвольная консервативная реализация функции $\theta(z)$ (существование такой реализации доказано, например, в [6], теорема 2.3.1). Пусть $\Sigma_{\mathrm{res},1} = (\breve{A}, \breve{B}, \breve{C}, \breve{D}; \breve{\mathcal{X}}, \mathcal{U}, \mathcal{Y}; \kappa)$ – ее первое минимальное сужение. Согласно предложению 3.3, $\Sigma_{\mathrm{res},1}$ является минимальной диссипативной реализацией функции $\theta(z)$. Докажем, что система $\Sigma_{\mathrm{res},1}$ оптимальна.

Пусть $\sigma = (a, b, c, D; \mathcal{H}, \mathcal{U}, \mathcal{Y}; \kappa)$ – произвольная диссипативная реализация функции $\theta(z)$, $\widehat{\sigma} = (\widehat{a}, \widehat{b}, \widehat{c}, D; \widehat{\mathcal{H}}, \mathcal{U}, \mathcal{Y}; \kappa)$ – ее консервативная дилатация. Пусть $N \geq 1$ целое число, и пусть $u(k) \in \mathcal{U}$, $k = 0, 1, 2, \ldots, N-1$.

Обозначим

$$h(N) = \sum_{k=0}^{N-1} a^{k-1}bu(N-k-1), \quad \breve{x}(N) = \sum_{k=0}^{N-1} \breve{A}^{k-1}\breve{B}u(N-k-1).$$

Требуется доказать, что $E_{\mathcal{H}}(h(N)) \geq E_{\breve{\mathcal{X}}}(\breve{x}(N))$.

Пусть $\breve{\sigma}_{\mathrm{res},1} = (\breve{a}, \breve{b}, \breve{c}, D; \breve{\mathcal{H}}, \mathcal{U}, \mathcal{Y}; \kappa)$ – первое минимальное сужение системы $\widehat{\sigma}$. Положим $\breve{h}(N) = \sum\limits_{k=0}^{N-1} \breve{a}^{k-1}\breve{b}u(N-k-1)$. По лемме 4.2 $E_{\breve{\mathcal{H}}}(\breve{h}(N)) \leq E_{\mathcal{H}}(h(N))$, поэтому достаточно доказать, что $E_{\breve{\mathcal{X}}}(\breve{x}(N)) \leq E_{\breve{\mathcal{H}}}(\breve{h}(N))$.

Так как Σ и $\widehat{\sigma}$ – консервативные системы с передаточными функциями, совпадающими в некоторой окрестности нуля, то их собственные части Σ_R и $\widehat{\sigma}_R$ π-унитарно эквивалентны (см., например, [6], теорема 2.1.3). По лемме 3.4, первые минимальные сужения систем Σ и Σ_R совпадают, так же, как совпадают и первые минимальные сужения систем $\widehat{\sigma}$ и $\widehat{\sigma}_R$. Поэтому можно считать, что Σ и $\widehat{\sigma}$ π-унитарно эквивалентны, то есть существует π-унитарный оператор $S : \mathcal{X} \to \widehat{\mathcal{H}}$ такой, что

$$\widehat{a} = SAS^{-1}\ \widehat{b} = SB,\ \widehat{c} = CS^{-1}.$$

Тогда

$$(\widehat{\mathcal{H}}^{o}_{\widehat{\sigma}})^{[\perp]} = S(\mathcal{X}^{o}_{\Sigma})^{[\perp]}, \quad (\widehat{\mathcal{H}}^{c}_{\widehat{\sigma}})^{[\perp]} = S(\mathcal{X}^{c}_{\Sigma})^{[\perp]}.$$

Но тогда S отображает π-унитарно $\breve{\mathcal{X}}$ на $\breve{\mathcal{H}}$. Положим $P_{\breve{\mathcal{X}}} = SP_{\breve{\mathcal{H}}}S^{-1}$;

$$E_{\breve{\mathcal{X}}}(\breve{x}(N)) = E_{\breve{\mathcal{X}}}(\sum_{k=0}^{N-1} \breve{A}^{k-1}\breve{B}u(N-k-1))$$

$$= E_{\breve{\mathcal{X}}}(P_{\breve{\mathcal{X}}} \sum_{k=0}^{N-1} A^{k-1}Bu(N-k-1))$$

$$= E_{\breve{\mathcal{X}}}(S^{-1}P_{\breve{\mathcal{H}}} \sum_{k=0}^{N-1} SA^{k-1}Bu(N-k-1)) = E_{\widehat{\mathcal{H}}}(P_{\breve{\mathcal{H}}} \sum_{k=0}^{N-1} \widehat{a}^{k-1}\widehat{b}u(N-k-1))$$

$$= E_{\breve{\mathcal{H}}}(\sum_{k=0}^{N-1} \breve{a}^{k-1}\breve{b}u(N-k-1)) = E_{\breve{\mathcal{H}}}(\breve{h}(N)) \leq E_{\mathcal{H}}(h(N)).$$

Таким образом, существование оптимальной и минимальной системы с передаточной функцией $\theta(z)$ доказано.

Докажем единственность с точностью до π-унитарной эквивалентности.

Пусть $\Sigma_j = (A_j, B_j, C_j, D; \mathcal{X}_j, \mathcal{U}, \mathcal{Y}; \kappa)$ – оптимальные и минимальные реализации функции $\theta(z) \in S^0_\kappa(\mathcal{U}, \mathcal{Y})$, $j = 1, 2$.

Определим отношение $U \subset \mathcal{X}_1 \times \mathcal{X}_2$:

$$U = \{(\sum_{k=0}^{N-1} A_1^{k-1}B_1u(N-k-1), \sum_{k=0}^{N-1} A_2^{k-1}B_2u(N-k-1))|N > 0,$$

$$u(k) \in \mathcal{U}, k = 0, 1, 2, \dots, N-1\}.$$

В силу оптимальности систем Σ_1 и Σ_2 имеем

$$E_{\mathcal{X}_1}(\sum_{k=0}^{N-1} A_1^{k-1} B_1 u(N-k-1)) \leq E_{\mathcal{X}_2}(\sum_{k=0}^{N-1} A_2^{k-1} B_2 u(N-k-1))$$

$$\leq E_{\mathcal{X}_1}(\sum_{k=0}^{N-1} A_1^{k-1} B_1 u(N-k-1)),$$

откуда вытекает π-изометричность отношения U. В силу минимальности систем Σ_1 и Σ_2 у U плотны область определения и область значений. Поэтому ([6], теорема 1.4.2) U продолжается по непрерывности до унитарного оператора, который мы также обозначим через U.

Пусть $x = \sum\limits_{k=0}^{N-1} A_1^{k-1} B_1 u(N-k-1)$. Тогда

$$UA_1 x = U \sum_{k=0}^{N-1} A_1^{k} B_1 u(N-k-1) = \sum_{k=0}^{N-1} A_2^{k} B_2 u(N-k-1)$$

$$= A_2 \sum_{k=0}^{N-1} A_2^{k-1} B_2 u(N-k-1) = A_2 U x.$$

Вследствие непрерывности оператора U имеем $UA_1 = A_2 U$ везде на $\mathcal{X}_1$. Очевидно, что $UB_1 = B_2$. Так как Σ_1 и Σ_2 – реализации функции $\theta(z)$, то в некоторой окрестности Ω точки $z = 0$ имеем

$$C_1(I - zA_1)^{-1} B_1 = C_2(I - zA_2)^{-1} B_2 = C_2(I - zUA_1U^{-1})^{-1} UB_1$$

$$= C_2 U^{-1}(I - zA_1)^{-1} B_1.$$

Так как система Σ_1 минимальна, то $\bigvee\limits_{z\in\Omega}(I - zA_1)^{-1} B_1 \mathcal{U} = \mathcal{X}_1$, поэтому $C_1 = C_2 U^{-1}$.

Получаем, что U осуществляет π-унитарную эквивалентность Σ_1 и Σ_2. □

5. Минимальные и $*$-оптимальные реализации

Предложение 5.1. *Пусть $\theta(z) \in S_\kappa^0(\mathcal{U}, \mathcal{Y})$, и пусть $\Sigma_0 = (A_0, B_0, C_0, D_0;\ \mathcal{X}_0, \mathcal{U}, \mathcal{Y}; \kappa)$ – оптимальная реализация функции $\theta(z)$, $\Sigma_c = (A_c, B_c, C_c, D_c;\ \mathcal{X}_c, \mathcal{U}, \mathcal{Y}; \kappa)$ – консервативная реализация функции $\theta(z)$. Тогда для любой диссипативной реализации $\Sigma = (A, B, C, D; \mathcal{X},$*

$\mathcal{U},\mathcal{Y};\kappa)$ функции $\theta(z)$ и для всех $N \geq 0$ и для любой последовательности входных данных $\{u(k)\}_{k=0}^{N-1}$ выполняются неравенства

$$
\begin{aligned}
E_{\mathcal{X}_0}\Big(\sum_{k=0}^{N-1} A_0^{k-1}B_0u(N-k-1)\Big) &\leq E_{\mathcal{X}}\Big(\sum_{k=0}^{N-1} A^{k-1}Bu(N-k-1)\Big)\\
&\leq E_{\mathcal{X}_c}\Big(\sum_{k=0}^{N-1} A_c^{k-1}B_cu(N-k-1)\Big)
\end{aligned}
\tag{5.1}
$$

Более того, правая часть последнего неравенства в (5.1) не зависит от выбора Σ_c.

Доказательство. Первое из неравенств (5.1) выполняется в силу определения оптимальной системы. Докажем второе. Пусть $\widehat{\Sigma} = (\widehat{A},\widehat{B},\widehat{C},\widehat{D};\ \widehat{\mathcal{X}},\mathcal{U},\mathcal{Y};\kappa)$ – консервативная дилатация системы Σ, $\widehat{\mathcal{X}} = E[+]\mathcal{X}[+]E_*$ и

$$
\widehat{A} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ 0 & A & A_{23} \\ 0 & 0 & A_{33} \end{bmatrix}, \quad \widehat{B} = \begin{bmatrix} B_1 \\ B \\ 0 \end{bmatrix}
$$

относительно этого разбиения пространства $\widehat{\mathcal{X}}$.

Тогда

$$
\begin{aligned}
E_{\mathcal{X}}\Big(\sum_{k=0}^{N-1} A^{k-1}Bu(N-k-1)\Big) &= E_{\mathcal{X}}\Big(P_{\mathcal{X}}\sum_{k=0}^{N-1} \widehat{A}^{k-1}\widehat{B}u(N-k-1)\Big)\\
&\leq E_{\widehat{\mathcal{X}}}\Big(\sum_{k=0}^{N-1} \widehat{A}^{k-1}\widehat{B}u(N-k-1)\Big).
\end{aligned}
$$

Достаточно доказать, что

$$
E_{\widehat{\mathcal{X}}}\Big(\sum_{k=0}^{N-1} \widehat{A}^{k-1}\widehat{B}u(N-k-1)\Big) \leq E_{\mathcal{X}_c}\Big(\sum_{k=0}^{N-1} A_c^{k-1}B_cu(N-k-1)\Big).
$$

Рассмотрим собственные части $\Sigma_{cR} = (A_{cR},B_{cR},C_{cR},D_{cR};\mathcal{X}_{cR},\mathcal{U},\mathcal{Y};\kappa)$ и $\widehat{\Sigma}_R = (\widehat{A}_R,\widehat{B}_R,\widehat{C}_R,\widehat{D}_R;\widehat{\mathcal{X}}_R,\mathcal{U},\mathcal{Y};\kappa)$ систем Σ_c и $\widehat{\Sigma}$. Они π-унитарно эквивалентны, поэтому

$$
E_{\widehat{\mathcal{X}}_R}\Big(\sum_{k=0}^{N-1} \widehat{A}_R^{k-1}\widehat{B}_Ru(N-k-1)\Big) = E_{\mathcal{X}_{cR}}\Big(\sum_{k=0}^{N-1} A_{cR}^{k-1}B_{cR}u(N-k-1)\Big).
$$

Так как для всех $N \geq 0$ и $u \in \mathcal{U}$ имеем $A_c^N B_c u = A_{cR}^N B_{cR} u$ и $\widehat{A}_R^N \widehat{B}_R u = \widehat{A}^N \widehat{B} u$, то это завершает доказательство. □

Диссипативная наблюдаемая система рассеяния $\Sigma_\bullet = (A_\bullet, B_\bullet, C_\bullet, D_\bullet; \mathcal{X}_\bullet, \mathcal{U}, \mathcal{Y}; \kappa)$ с передаточной функцией $\theta(z) = \theta_{\Sigma_\bullet}(z) \in S_\kappa^0(\mathcal{U}, \mathcal{Y})$ называется $*$-оптимальной, если для любой другой наблюдаемой диссипативной системы рассеяния $\Sigma = (A, B, C, D; \mathcal{X}, \mathcal{U}, \mathcal{Y}; \kappa)$, являющейся реализацией функции $\theta(z)$, и для всех $N \geq 0$ и для любой последовательности входных данных $\{u(k)\}_{k=0}^{N-1}$ выполняются неравенства

$$E_{\mathcal{X}_\bullet}(x_\bullet(N)) \geq E_{\mathcal{X}}(x(N)), \tag{5.2}$$

где $x_\bullet(N)$ и $x(N)$ – соответственно состояния систем $\Sigma_\bullet$ и Σ в момент времени N при начальных состояниях $x_\bullet(0) = 0$ и $x(0) = 0$ и при рассматриваемых входных данных.

Неравенство (5.2) равносильно неравенству

$$E_{\mathcal{X}_\bullet}(\sum_{k=0}^{N-1} A_\bullet^{k-1} B_\bullet u(N-k-1)) \geq E_{\mathcal{X}}(\sum_{k=0}^{N-1} A^{k-1} B u(N-k-1)). \tag{5.3}$$

Теорема 5.2. *Система Σ $*$-оптимальна и минимальна тогда и только тогда, когда сопряженная система Σ^* оптимальна и минимальна.*

Доказательство. $\Leftarrow$ Пусть система $\Sigma^* = (A^*, C^*, B^*, D^*; \mathcal{X}, \mathcal{Y}, \mathcal{U}; \kappa)$ минимальна и оптимальна. Тогда Σ, очевидно, является минимальной диссипативной системой рассеяния. Докажем $*$-оптимальность системы Σ.

Пусть $\widetilde{\Sigma} = (\widetilde{A}, \widetilde{B}, \widetilde{C}, \widetilde{D}; \widetilde{\mathcal{X}}, \mathcal{U}, \mathcal{Y}; \kappa)$ – произвольная диссипативная наблюдаемая система рассеяния с $\theta_{\widetilde{\Sigma}}(z) = \theta_\Sigma(z) = \theta(z)$ в K. Тогда Σ^* и $\widetilde{\Sigma}^*$ являются реализациями функции $\widetilde{\theta}(z) = (\theta(\overline{z}))^*$. В силу оптимальности системы Σ^*, для всех $N > 0$ и при любых $\{y(k)\}_{k=0}^{N-1} \in \mathcal{Y}$ имеем

$$E_{\mathcal{X}}(\sum_{k=0}^{N-1} (A^*)^{k-1} C^* y(N-k-1)) \leq E_{\widetilde{\mathcal{X}}}(\sum_{k=0}^{N-1} (\widetilde{A}^*)^{k-1} \widetilde{C}^* y(N-k-1)).$$

Определим сжимающее отношение $S \subset \widetilde{\mathcal{X}} \times \mathcal{X}$:

$$S = \{(\sum_{k=0}^{N-1} (\widetilde{A}^*)^{k-1} \widetilde{C}^* y(N-k-1), \sum_{k=0}^{N-1} (A^*)^{k-1} C^* y(N-k-1)) | N > 0,$$

$$y(j) \in \mathcal{Y}, j = 0, 1, 2, \ldots, N-1\}.$$

Отношение S плотно определено в силу наблюдаемости системы $\widetilde{\Sigma}$, поэтому оно продолжается по непрерывности до сжатия $S : \widetilde{\mathcal{X}} \to \mathcal{X}$ ([6], теорема 1.4.2). Проверим далее, что для всех $N > 0$ и при любых $\{u(k)\}_{k=0}^{N-1} \in \mathcal{U}$ выполняется равенство

$$S^*(\sum_{k=0}^{N-1} A^{k-1}Bu(N-k-1)) = \sum_{k=0}^{N-1} \widetilde{A}^{k-1}\widetilde{B}u(N-k-1).$$

Системы Σ и $\widetilde{\Sigma}$ имеют одинаковые передаточные функции, а поэтому $\widetilde{C}\widetilde{A}^{k+m}\widetilde{B} = CA^{k+m}B$ $(k, m \geq 0)$. Так как $\widetilde{C}\widetilde{A}^m S^* = CA^m$, то $\widetilde{C}\widetilde{A}^{k+m}\widetilde{B} = CA^kA^mB = \widetilde{C}\widetilde{A}^m S^* A^k B$ $(k, m \geq 0)$.

Система $\widetilde{\Sigma}$ наблюдаема, поэтому $\widetilde{A}^k\widetilde{B} = S^*A^kB$. Так как S – сжатие, то и S^* – тоже сжатие (см., например, [5], следствие 2.5), а потому

$$E_{\widetilde{\mathcal{X}}}(\sum_{k=0}^{N-1} \widetilde{A}^{k-1}\widetilde{B}u(N-k-1)) = E_{\widetilde{\mathcal{X}}}(S^* \sum_{k=0}^{N-1} A^{k-1}Bu(N-k-1))$$

$$\leq E_{\mathcal{X}}(\sum_{k=0}^{N-1} A^{k-1}Bu(N-k-1)).$$

Поэтому Σ – $*$-оптимальная система.

$\Rightarrow$ Пусть система $\Sigma = (A, B, C, D; \mathcal{X}, \mathcal{U}, \mathcal{Y}; \kappa)$ с передаточной функцией $\theta(z) \in S_\kappa^0(\mathcal{U}, \mathcal{Y})$ минимальна и $*$-оптимальна. Тогда Σ^* – реализация функции $\widetilde{\theta}(z) = (\theta(\overline{z}))^* \in S_\kappa^0(\mathcal{Y}, \mathcal{U})$, очевидно, минимальна. Докажем оптимальность системы Σ^*.

Пусть $\widetilde{\Sigma}^* = (\widetilde{A}^*, \widetilde{C}^*, \widetilde{B}^*, \widetilde{D}^*; \widetilde{\mathcal{X}}, \mathcal{Y}, \mathcal{U}; \kappa)$ – произвольная диссипативная минимальная реализация функции $\widetilde{\theta}(z)$ (достаточно рассматривать только минимальные реализации). Докажем, что для всех $N > 0$ и при любых $\{y(k)\}_{k=0}^{N-1} \in \mathcal{Y}$ верно неравенство

$$E_{\mathcal{X}}(\sum_{k=0}^{N-1} (A^*)^{k-1}C^*y(N-k-1)) \leq E_{\widetilde{\mathcal{X}}}(\sum_{k=0}^{N-1} (\widetilde{A}^*)^{k-1}\widetilde{C}^*y(N-k-1)).$$

Так как система Σ $*$-оптимальна, а $\widetilde{\Sigma}$ – диссипативная минимальная реализация функции $\theta(z)$, то для всех $N > 0$ и при любых

$\{u(k)\}_{k=0}^{N-1} \in \mathcal{U}$ имеем

$$E_{\mathcal{X}}(\sum_{k=0}^{N-1} A^{k-1}Cu(N-k-1)) \geq E_{\widetilde{\mathcal{X}}}(\sum_{k=0}^{N-1} \widetilde{A}^{k-1}\widetilde{C}u(N-k-1)).$$

Определим сжимающее отношение $K \subset \mathcal{X} \times \widetilde{\mathcal{X}}$:

$$K = \{(\sum_{k=0}^{N-1} A^{k-1}Bu(N-k-1), \sum_{k=0}^{N-1} \widetilde{A}^{k-1}\widetilde{B}u(N-k-1))|N > 0,$$

$$u(j) \in \mathcal{U}, j = 0, 1, 2, \dots, N-1\}.$$

Так как система Σ минимальна, то K плотно определено и поэтому продолжается по непрерывности до сжатия $K : \mathcal{X} \to \widetilde{\mathcal{X}}$. Тогда $K^* : \widetilde{\mathcal{X}} \to \mathcal{X}$ – тоже сжатие. Так как для всех $m, k \geq 0$ выполнено равенство $CA^kA^mB = \widetilde{C}\widetilde{A}^k\widetilde{A}^m\widetilde{B}$, то $B^*(A^*)^mK^*(\widetilde{A}^*)^k\widetilde{C}^* = B^*(A^*)^m(A^*)^kC^*$.

В силу управляемости системы Σ^* имеем: $K^*(\widetilde{A}^*)^k\widetilde{C}^* = (A^*)^kC^*$. Так как K^* – сжатие, то

$$E_{\mathcal{X}}(\sum_{k=0}^{N-1} (A^*)^{k-1}C^*y(N-k-1)) = E_{\mathcal{X}}(K^* \sum_{k=0}^{N-1} (\widetilde{A}^*)^{k-1}\widetilde{C}^*y(N-k-1))$$

$$\leq E_{\widetilde{\mathcal{X}}}(\sum_{k=0}^{N-1} (\widetilde{A}^*)^{k-1}\widetilde{B}^*u(N-k-1)).$$

То есть, система Σ^* оптимальна. □

Теорема 5.3. *Пусть $\theta(z) \in S_\kappa^0(\mathcal{U}, \mathcal{Y})$. Тогда существует минимальная и $*$-оптимальная система $\Sigma_\bullet = (A_\bullet, B_\bullet, C_\bullet, D_\bullet; \mathcal{X}_\bullet, \mathcal{U}, \mathcal{Y}; \kappa)$ с передаточной функцией $\theta_{\Sigma_\bullet}(z) = \theta(z)$ в единичном круге K, и такая система определяется по $\theta(z)$ с точностью до π-унитарной эквивалентности.*

Доказательство. Утверждение вытекает из теорем 4.3 и 5.2. □

Литература

1. Д. З. Аров, *Пассивные линейные стационарные динамические системы.* Сибирский математический журнал, **20**, **2** (1979), 211–228.
2. Д. З. Аров, *Устойчивые диссипативные линейные стационарные динамические системы рассеяния.* Journal operator theory, **2** (1979), 95–126.

3. D. Z. Arov, M. A. Kaashoek, and D.R. Pick, *Minimal and optimal linear discrete time-invariant dissipative scattering systems.* Integral equations and operator theory, **29** (1997), 127–154.
4. A. Dijksma, H. Langer, and H. S. V. de Snoo, *Characteristic functions of unitary operator colligations in π_κ-spaces.* Operator Theory: Adv. Appl., **19**, Birkhauser, Basel-Boston (1986), 125–194.
5. M. A. Dritchel, J. Rovnyak, *Operators on indefinite inner product spaces.* Lectures on Operator Theory and its Applications, Fields Institute Monographs, vol. 3, Amer. Math. Soc., Providence, RI.
6. D. Aplay, A. Dijksma, J. Rovnyak, H. de Snoo, *Shur functions, operator colligations and reproducing kernel Pontryagin spaces.* Operator theory: Adv. Appl., vol. 96, Birkhauser, Basel-Boston, 1997.
7. С. М. Саприкин, *Теория линейных стационарных пассивных систем рассеяния с пространствами состояний Понтрягина.* Доклады АН Украины (представлено к печати).
8. Т. Я. Азизов, И. С. Иохвидов, *Основы теории линейных операторов в пространствах с индефинитной метрикой.* Наука, М., 1986.
9. I. S. Iokhvidov, M. G. Krein, H. Langer, *Introduction to the spectral theory of operators in spaces with an indefinite metric.* Akademie-Verlag, Berlin, 1982.
10. Н. Данфорд, Дж. Т. Шварц, *Линейные операторы.* Мир, М., 1966.
11. M. G. Krein, H. Langer, *Some propositions on analytic matrix functions related to the theory of operators in the spase* Π_κ. Acta Sci. Math., **43** (1981), 181–205.

Saprikin S. M. Theory of linear discrete time-invariant dissipative scattering systems with state π_κ-spaces.

An arbitrary operator-valued function in the generalized Shur class is realized as the transfer function of a minimal optimal and minimal $*$-optimal dissipative scattering system with Pontryagin state space. The results generalize D. Z. Arov's results for the Hilbert state space case.

Южноукраинский государственный
педагогический университет,
г. Одесса, 65020,
ул. Старопортофранковская, 26
e-mail: sergey_saprikin@ukr.net

Поступило 20 августа 2001 г.