Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 282, 2001 г.

Ф. А. Шамоян, Е. Н. Шубабко

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ ГОЛОМОРФНЫХ В КРУГЕ ФУНКЦИЙ

Пусть $\mathbf{D}$ – единичный круг на комплексной плоскости $\mathbf{C}$, α – неотрицательное число. Обозначим через $\mathbf{N}_\alpha(\mathbf{D})$ класс голоморфных в $\mathbf{D}$ функций f, для которых $T(r,f) \le \frac{c_f}{(1-r)^\alpha}$, $r \in (0,1)$, где $T(r,f)$ – характеристика Р. Неванлинны функции f (см. [1]).

Очевидно, что $\mathbf{N}_0(\mathbf{D}) = \mathbf{N}(\mathbf{D})$ совпадает с известным классом Неванлинны функций ограниченного вида. Характеризация корневых множеств и факторизационное представление класса $\mathbf{N}_\alpha(\mathbf{D})$ $(\alpha > 0)$ получены в работе авторов [2]. В частности, в [2] установлено следующее утверждение.

Теорема A. *Пусть $\alpha > 0$. Тогда следующие утверждения равносильны:*

(1) $f \in \mathbf{N}_\alpha(\mathbf{D})$,

(2) *f допускает в единичном круге $\mathbf{D}$ представление*

$$f(z) = c_\lambda z^\lambda \Pi_\beta(z, z_k) \exp\left\{\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{\psi(e^{i\theta})}{(1-e^{-i\theta}z)^{\beta+2}} d\theta\right\}, \ z \in \mathbf{D}, \qquad (1)$$

где $\beta > \alpha - 1$, c_λ – комплексная константа, λ – неотрицательное целое число, $\{z_k\}_{k=1}^{+\infty}$ – произвольная последовательность точек из $\mathbf{D}$, для которой

$$n(r) = \mathrm{card}\{z_k : |z_k| < r\} \le \frac{C}{(1-r)^{\alpha+1}}, \quad 0 \le r < 1,$$

$\Pi_\beta(z, z_k)$ – произведение М. М. Джрбашяна:

$$\Pi_\beta(z, z_k) = \prod_{k=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{z}{z_k}\right) \times$$

Первый автор поддержан грантами МО РФ (No. E00-1.0-66) и РФФИ (No. 99-01-00103, No. 01-01-00992).

$$\times \exp\left\{-\frac{2(\beta+1)}{\pi}\int\limits_{\mathbf{D}}\frac{(1-|\zeta|^2)^\beta \ln|1-\frac{\zeta}{z_k}|}{(1-\bar{\zeta}z)^{\beta+2}}\right\} dm_2(\zeta), \qquad (2)$$

ψ – произвольная вещественная функция из класса О. Бесова $\Lambda^{1,\infty}_{\beta-\alpha+1}$ на единичной окружности.

При $\alpha = 0$, то есть в классическом случае, ψ явным образом выражается через граничные значения функции $\ln|f|$. Указанное свойство играет существенную роль в приложниях факторизационных представлений классов Неванлинны–Смирнова как в комплексном анализе, так и в других вопросах анализа (см. [3, 4]). В первой части этой заметки мы решаем аналогичную задачу в классах $\mathbf{N}_\alpha(\mathbf{D})$ при $\alpha > 0$, а во второй части мы оцениваем рост коэффициентов разложения функций из класса $\mathbf{N}_\alpha(\mathbf{D})$ и находим множество мультипликаторов из класса $\mathbf{N}_\alpha(\mathbf{D})$ в классы Харди, Бергмана и диск-алгебру.

§1. О факторизации функций из класса $\mathbf{N}_\alpha(\mathbf{D})$

Пусть $\{z_k\}_{k=1}^{+\infty}$ – произвольная последовательность из $\mathbf{D}$, $0 < |z_k| \le |z_{k+1}|$, $k = 1, 2, \dots$, для которой

$$\sum_{k=1}^{+\infty}(1-|z_k|) < +\infty, \quad \beta > -1. \qquad (3)$$

Следуя М. М. Джрбашяну (см. [5]), введем бесконечное произведение

$$B_\beta(z, z_k) = \prod_{k=1}^{+\infty}\left(1-\frac{z}{z_k}\right)\exp\left(-W_\beta(z, z_k)\right), \qquad (4)$$

где

$$W_\beta(z,w) = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\Gamma(\beta+1+n)}{\Gamma(\beta+1)\Gamma(n+1)}\int\limits_{|w|}^{1}(1-t)^\beta (z\bar{w})^n\frac{dt}{t^{n+1}} -$$
$$-\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\Gamma(\beta+1+n)}{\Gamma(\beta+1)\Gamma(n+1)}\int\limits_0^{|w|}(1-t)^\beta\left(\frac{z}{w}\right)^n t^{n-1}dt \quad (z, w \in \mathbf{D}). \qquad (5)$$

Как установлено в [5], если выполнено (3), то бесконечное произведение B_β равномерно сходится внутри $\mathbf{D}$, и имеет место равенство

$$\lim_{\rho\to 1-0} \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int\limits_0^\rho (\rho-t)^{\beta-1} \ln |B_\beta(te^{i\phi}, z_k)| dt = 0 \qquad (6)$$

при почти всех $\phi \in [-\pi, \pi]$.

Основным результатом этого параграфа является

Теорема 1. *Пусть $\alpha < \beta < \alpha + 1$ $(\alpha > 0)$. Тогда класс $\mathbf{N}_\alpha(\mathbf{D})$ совпадает с классом функций f, допускающих в $\mathbf{D}$ представление*

$$f(z) = e^{i\gamma+\lambda k_\beta} z^\lambda B_\beta(z, z_k) \times$$
$$\times \exp\left\{ \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{2}{(1-ze^{-i\theta})^{\beta+1}} - 1 \right) \psi(\theta) d\theta \right\} \quad (z \in \mathbf{D}), \qquad (7)$$

где $\psi(\theta)$ – вещественная функция из класса О. Бесова $\Lambda^{1,\infty}_{\beta-\alpha+1}$, при этом

$$\psi(\theta) = \lim_{\rho\to 1-0} \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int\limits_0^\rho (\rho-t)^{\beta-1} \ln |f(te^{i\theta})| dt, \qquad (8)$$

$$k_\beta = \beta \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+\beta)},$$

λ – произвольное неотрицательное целое число, γ – вещественное число,

$$n(r) = \operatorname{card}\{z_k : |z_k| < r\} \le \frac{C}{(1-r)^{\alpha+1}}, \quad 0 \le r < 1, \qquad (9)$$

Учитывая результаты работ [2] и [5], для доказательства теоремы 1 достаточно установить следующий факт.

Теорема 2. *Пусть $\alpha < \beta < \alpha + 1$ $(\alpha > 0)$. Предположим, что $\{z_k\}_{k=1}^{+\infty}$ – произвольная последовательность из $\mathbf{D}$, для которой выполняется (9). Тогда функция*

$$H_\beta(z, z_k) = \frac{B_\beta(z, z_k)}{\Pi_{\beta-1}(z, z_k)} \quad (z \in \mathbf{D}) \qquad (10)$$

принадлежит классу $\mathbf{N}_\alpha(\mathbf{D})$.

Доказательству теоремы 2 предпошлем несколько вспомогательных утверждений.

Лемма 1. *Пусть* $0 < \alpha < \beta < \alpha + 1$ *и*

$$h_\beta(z, z_k) =$$

$$= \int\limits_{|z_k|}^{1} \frac{(1-t)^\beta}{t} dt + \int\limits_{|z_k|^2}^{|z_k|} \frac{(1-t)^\beta}{(1-\frac{zt}{z_k})^{\beta+1}} \frac{dt}{t} - \int\limits_{|z_k|}^{1} \frac{(1-t)^\beta}{(1-\frac{z\bar{z}_k}{t})^{\beta+1}} \frac{dt}{t}, \quad (11)$$

$z \in \mathbf{D}$, $|z_k| < 1$, $z_k \neq 0$. *Тогда в условиях теоремы 2 справедливо представление*

$$H_\beta(z, z_k) = \exp\left\{ \sum_{k=1}^{+\infty} h_\beta(z, z_k) \right\} \ (z \in \mathbf{D}). \quad (12)$$

Доказательство. Используя представление (см. [6])

$$U_{\beta-1}(z, z_k) = \frac{2\beta}{\pi} \int\limits_0^1 \int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{(1-\rho^2)^\beta \ln\left|1 - \frac{\rho e^{i\phi}}{z_k}\right|}{(1 - z\rho e^{-i\phi})^{\beta+2}} \rho d\rho d\phi = \int\limits_{|z_k|^2}^{1} \frac{(1-t)^\beta}{t} dt -$$

$$- \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\Gamma(\beta+1+n)}{\Gamma(\beta+1)\Gamma(n+1)} \int\limits_0^{|z_k|^2} (1-t)^\beta \left(\frac{z}{z_k}\right)^n t^{n-1} dt \quad (13)$$

и представление (5), получим

$$W_\beta(z, z_k) = U_{\beta-1}(z, z_k) + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\Gamma(\beta+1+n)}{\Gamma(\beta+1)\Gamma(n+1)} \int\limits_{|z_k|}^{1} (1-t)^\beta (z\bar{z}_k)^n \frac{dt}{t^{n+1}} -$$

$$- \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\Gamma(\beta+1+n)}{\Gamma(\beta+1)\Gamma(n+1)} \int\limits_{|z_k|^2}^{|z_k|} (1-t)^\beta \left(\frac{z}{z_k}\right)^n t^{n-1} dt - \int\limits_{|z_k|^2}^{1} \frac{(1-t)^\beta}{t} dt =$$

$$= U_{\beta-1}(z, z_k) - \int\limits_{|z_k|}^{1} \frac{(1-t)^\beta}{t} dt -$$

$$-\int_{|z_k|^2}^{|z_k|} \frac{(1-t)^\beta}{(1-\frac{zt}{z_k})^{\beta+1}} \frac{dt}{t} + \int_{|z_k|}^{1} \frac{(1-t)^\beta}{(1-\frac{z\bar{z}_k}{t})^{\beta+1}} \frac{dt}{t}. \tag{14}$$

Из последнего равенства следует утверждение леммы.

Лемма 2. *Пусть* $0 \le r < 1$, $w \in \mathbf{D}$. *Тогда справедлива оценка*

$$\int_{-\pi}^{\pi} |h_\beta(re^{i\phi}, w)| d\phi \le$$

$$\le C\Big\{\int_{|w|}^{1} \frac{(1-t)^\beta}{(1-\frac{r|w|}{t})^\beta} \frac{dt}{t} + \int_{|w|^2}^{|w|} \frac{(1-t)^\beta}{(1-\frac{rt}{|w|})^\beta} \frac{dt}{t} + (1-|w|)^{\beta+1}\Big\}. \tag{15}$$

Доказательство леммы легко получается с помощью элементарного неравенства

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\phi}{|1-\rho e^{i\phi}|^{\lambda+1}} \le \frac{C}{(1-\rho)^\lambda}, \ \ \lambda > 0, \ \ 0 < \rho < 1. \tag{16}$$

Лемма 3. *Пусть* $0 < \delta \le x < 1$, $0 < r < 1$, *и*

$$I_1(r,x) = \int_{x}^{1} \frac{(1-t)^\beta}{(1-\frac{rx}{t})^\beta} \frac{dt}{t}, \tag{17}$$

$$I_2(r,x) = \int_{x^2}^{x} \frac{(1-t)^\beta}{(1-\frac{rt}{x})^\beta} \frac{dt}{t}. \tag{18}$$

Тогда справедливы неравенства

$$I_1(r,x) \le C_1(\delta,\beta) \begin{cases} \dfrac{(1-x)^\beta}{(1-rx)^{\beta-1}}, & \beta \ne 1, \\ (1-rx)\ln(\dfrac{1-rx}{x(1-r)}), & \beta = 1; \end{cases} \tag{19}$$

$$I_2(r,x) \le C_2(\delta,\beta) \begin{cases} \dfrac{(1-x)^\beta}{(1-r)^{\beta-1}}, & \beta \ne 1, \\ (1-x)\ln(\dfrac{1-rx}{1-r}), & \beta = 1. \end{cases} \tag{20}$$

Доказательство леммы элементарно и поэтому опускается.

Доказательство теоремы 2. Учитывая лемму 1, достаточно установить оценку

$$\sum_{k=1}^{+\infty}\int_{-\pi}^{\pi}|h_\beta(re^{i\phi},z_k)|d\phi \le \frac{\mathrm{const}}{(1-r)^\alpha},\quad r\in(0,1), \tag{21}$$

при условии, что $0<\alpha<\beta<\alpha+1$. Для доказательства указанной оценки можно предположить, не уменьшая общности, что $|z_{j+1}|\ge |z_j|\ge\delta>0$, $j=1,2,\dots$, причем $r\ne|z_k|$, $k=1,2,\dots$. Используя леммы 2 и 3, получим

$$\sum_{k=1}^{+\infty}\int_{-\pi}^{\pi}|h_\beta(re^{i\phi},z_k)|d\phi \le$$
$$\le c(\delta)\left\{\int_0^1 I_1(r,x)dn(x)+\int_0^1 I_2(r,x)dn(x)\right\},\quad r\in(0,1), \tag{22}$$

где I_1 и I_2 – интегралы из леммы 3. Приступим к оценке этих интегралов. Положим

$$J_1(r)=\int_0^1 I_1(r,x)dn(x)=$$
$$=\int_0^r I_1(r,x)dn(x)+\int_r^1 I_1(r,x)dn(x)\stackrel{\mathrm{def}}{=}J_1^1(r)+J_1^2(r). \tag{23}$$

Пусть вначале $\beta\ne1$. Используя оценку (19), имеем

$$J_1^1(r)\leqslant c_1\int_0^r\frac{(1-x)^\beta}{(1-rx)^{\beta-1}}dn(x)\le$$
$$\le c_2\left(\frac{1}{(1-r)^\alpha}+\int_0^r\frac{dx}{(1-x)^{\alpha-\beta+2}(1-rx)^{\beta-1}}\right)\leqslant\frac{c_3(\delta,\beta)}{(1-r)^\alpha}. \tag{24}$$

Если $\beta=1$, то снова используя лемму 3 и интегрируя по частям, получим

$$J_1^1(r) \leqslant c_1 \int\limits_0^r (1-rx)\ln\left(\frac{1-rx}{x(1-r)}\right) dn(x) =$$

$$= c_1 \left((1-r)n(r) + r\int\limits_0^r n(x)\left(\ln\left(\frac{1-rx}{x(1-r)}\right) + \frac{1}{x}\right) dx \right) \leqslant$$

$$\leqslant c_4 \left(\frac{1}{(1-r)^\alpha} + \int\limits_\delta^r \frac{1}{(1-x)^{\alpha+1}} \left(\ln\left(\frac{1-rx}{x(1-r)}\right) + \frac{1}{x}\right) dx \right).$$

Снова интегрируя по частям, придем к оценке

$$J_1^1(r) \leqslant \frac{c_5(\delta)}{(1-r)^\alpha}. \tag{25}$$

Теперь перейдем к оценке $J_1^2(r)$. Отметим, что

$$I_1(r,x) \leq \frac{(1-x)^{\beta+1}}{\delta(1-r)^\beta} \tag{26}$$

при $r \leqslant x < 1$. Поэтому

$$J_1^2(r) \leqslant \frac{1}{\delta(1-r)^\beta} \int\limits_r^1 (1-x)^{\beta+1} dn(x). \tag{27}$$

Интегрируя по частям и используя (9), получим

$$J_1^2(r) \leqslant \frac{c_6(\delta,\beta)}{(1-r)^\alpha}. \tag{28}$$

Объединяя оценки (24)–(28), получим оценку

$$J_1(r) \leqslant \frac{c_7(\delta,\beta)}{(1-r)^\alpha}. \tag{29}$$

Перейдем к оценке интеграла

$$J_2(r) = \int\limits_0^1 I_2(r,x)dn(x) =$$

$$= \int\limits_0^r I_2(r,x)dn(x) + \int\limits_r^1 I_2(r,x)dn(x) \stackrel{\text{def}}{=} J_2^1(r) + J_2^2(r). \tag{30}$$

Пусть $\beta \neq 1$, тогда имеем

$$J_2^1(r) \leqslant c_1 \int\limits_0^r \frac{(1-x)^\beta}{(1-r)^{\beta-1}} dn(x) \leq$$

$$\leq c_8 \left(\frac{1}{(1-r)^\alpha} + \frac{1}{(1-r)^{\beta-1}} \int\limits_0^r (1-x)^{\beta-\alpha-2} dx \right) \leqslant \frac{c_9(\delta,\beta,\alpha)}{(1-r)^\alpha}. \quad (31)$$

В последнем неравенстве мы учитывали условие $\beta \in (\alpha, \alpha+1)$. При $\beta = 1$, повторяя те же рассуждения, что и при оценке $J_1^1(r)$, получим

$$J_2^1(r) \leqslant c_{10} \int\limits_0^r (1-x) \ln \left(\frac{1-rx}{1-r} \right) dn(x) \leqslant \frac{c_{11}(\delta,\beta)}{(1-r)^\alpha}. \quad (32)$$

Оценим $J_2^2(r)$. Из элементарного неравенства

$$I_2(r,x) \leqslant \frac{2^{\beta+1}}{\delta(1-r)^\beta} (1-x)^{\beta+1}$$

приходим к оценке

$$J_2^2(r) \leqslant \frac{c_{12}(\delta,\beta)}{(1-r)^\beta} \int\limits_r^1 (1-x)^{\beta+1} dn(x) \leqslant \frac{c_{13}(\delta,\beta)}{(1-r)^\alpha}, \quad (33)$$

где интеграл взят по частям. Объединяя оценки (31) и (33), получим оценку

$$J_2(r) \leqslant \frac{c_{14}(\delta,\beta,\alpha)}{(1-r)^\alpha}. \quad (34)$$

Окончательно, из (21), (29) и (34) получим оценку (22). Теорема доказана.

§2. Оценки коэффициентов разложения функций из класса $\mathbf{N}_\alpha(\mathbf{D})$ и характеризация мультипликаторов

В этом параграфе мы устанавливаем точные оценки коэффициентов разложения функций из класса $\mathbf{N}_\alpha(\mathbf{D})$ и на этой основе получим полную характеризацию мультипликаторов из класса $\mathbf{N}_\alpha(\mathbf{D})$ в классы Харди, Бергмана и диск-алгебру.

Теорема 3. *Пусть* $f \in \mathbf{N}_\alpha(\mathbf{D})$, $\quad 0 \le \alpha < +\infty$,

$$f(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} \widehat{f}(k) z^k, \quad z \in \mathbf{D}. \tag{35}$$

Тогда справедлива оценка

$$|\widehat{f}(k)| \le e^{c_f k^{\frac{\alpha+1}{\alpha+2}}}, \quad k = 0, 1, 2 \dots, \tag{36}$$

где c_f *– положительное число, зависящее только от* f.

Обратно, для произвольного положительного числа c *можно построить аналитическую в области* $\mathbf{C} \setminus \{1\}$ *функцию* $f \in \mathbf{N}_\alpha(\mathbf{D})$ *такую, что*

$$|\widehat{f}(k)| \ge e^{ck^{\frac{\alpha+1}{\alpha+2}}}, \quad k = 0, 1, 2 \dots. \tag{37}$$

Доказательству теоремы предпошлем несколько вспомогательных утверждений.

Лемма 4. *Пусть* $0 < \rho < +\infty$ *и* $c > 0$ *– произвольные числа. Тогда можно построить целую функцию*

$$g(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} \widehat{g}(k) z^k \tag{38}$$

порядка ρ *нормального типа, такую, что* $\widehat{g}(k) \ge 0$, $k \in \mathbf{Z}_+$,

$$g(x) \ge \exp(cr^\rho), \quad x \in [0, +\infty). \tag{39}$$

Доказательство этой леммы легко вывести из результатов А. А. Гольдберга [7].

Лемма 5. *Пусть* $g(z)$ *– целая функция порядка* ρ $(0 < \rho < 1)$ *нормального типа,*

$$g(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} \widehat{g}(k) z^k, \tag{40}$$

тогда

$$G(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} \widehat{g}(k) k! z^{k+1} \tag{41}$$

– целая функция порядка $\frac{\rho}{1-\rho}$ *и нормального типа.*

Доказательство этой леммы легко следует из хорошо известного соотношения между ростом целой функции и ее коэффициентами разложения (см. [8]).

Доказательство теоремы 3. Сначала заметим, что если $f \in \mathbf{N}_\alpha(\mathbf{D})$ и $M(r,f) = \max_{|z|\leq r}|f(z)|$, $0 < r < 1$, то

$$\ln M(r,f) \leq \frac{c}{1-r}T(r,f) \leq \frac{c_1}{(1-r)^{\alpha+1}}.$$

Поэтому

$$|\widehat{f}(k)| \leq \inf_{0<r<1} \frac{\exp\frac{c_1}{(1-r)^{\alpha+1}}}{r^k} \leq \exp\left(c_2 k^{\frac{\alpha+1}{\alpha+2}}\right). \tag{42}$$

Для доказательства обратной оценки применим методику работы [9]. Пусть $g(z)$ – целая функция порядка $\rho = \frac{\alpha+1}{\alpha+2}$, построенная в лемме 4. Положим $f(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} g(k)z^k$. Очевидно, что функция $f(z)$ голоморфна в $\mathbf{D}$. Докажем, что она удовлетворяет всем условиям теоремы. Сначала заметим, что по лемме 4

$$\widehat{f}(k) = g(k) \geq \exp(ck^{\frac{\alpha+1}{\alpha+2}}), \ \ k = 0, 1, 2, \ldots .$$

Остается показать принадлежность f классу $\mathbf{N}_\alpha(\mathbf{D})$. С этой целью применим теорему Вигерта (см. [10]), согласно которой $f(z) = F(\frac{1}{1-z})$, $z \in \mathbf{D}$, где F – целая функция.

Оценим рост функции F. Сравнивая разложения функций f и g, легко заметить, что F допускает интегральное представление

$$F(w) = \frac{w}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma} \frac{H(\xi)d\xi}{w-(w-1)e^{\xi}}, \tag{43}$$

где $H(\xi) = G(\frac{1}{\xi})$, $\xi \neq 0$, G – функция, построенная в лемме 2 по функции g, Γ – произвольный замкнутый контур, охватывающий начало координат.

Пусть число $|w|$ достаточно велико, а $\mu > 0$ – достаточно мало. Положим

$$\Gamma = \left\{\xi : |\xi| = R = \frac{\mu}{|w|}\right\}. \tag{44}$$

Тогда имеем

$$|F(w)| \leq \frac{M(\frac{|w|}{\mu}, G)}{2\pi} \int\limits_{\Gamma} \frac{|d\xi|}{|1 - e^{\xi} + \frac{e^{\xi}}{w}|}. \qquad (45)$$

Подбирая $0 < \mu < 1 - \frac{e^R}{2}$, оценим интеграл

$$I = \int\limits_{\Gamma} \frac{|d\xi|}{|1 - e^{\xi} + \frac{e^{\xi}}{w}|}.$$

Нетрудно видеть, что $I \leq C_0(\mu)$, поэтому $|F(w)| \leq \exp(c_1|w|^{\rho'})$, где $\rho' = \frac{\rho}{1-\rho} = \alpha + 1$.

Таким образом,

$$|f(z)| = |F(\frac{1}{1-z})| \leq \exp \frac{c}{|1-z|^{\alpha+1}}. \qquad (46)$$

Поэтому

$$T(r, f) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \ln^+ |f(re^{i\phi})| d\phi \leq \frac{c}{(1-r)^{\alpha}}. \qquad (47)$$

Теорема 3 доказана.

Замечание. Отметим, что при $\alpha = 0$ утверждение теоремы совпадают с хорошо известной оценкой коэффициентов разложения, полученной С. Н. Мергеляном. (см. [10], с. 152).

Пусть $\mathbf{X}$ – некоторый класс голоморфных в $\mathbf{D}$ функций и $\lambda = \{\lambda_k\}_{k=1}^{+\infty}$ – последовательность комплексных чисел. Последовательность λ назовем мультипликатором из класса $\mathbf{N}_\alpha(\mathbf{D})$ в класс $\mathbf{X}$, если для произвольной функции $f \in \mathbf{N}_\alpha(\mathbf{D})$,

$$f(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k z^k,$$

функция

$$T_\lambda(f)(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} \lambda_k a_k z^k$$

принадлежит классу $\mathbf{X}$.

Класс мультипликаторов обозначим $\mathbf{M}(\mathbf{N}_\alpha(\mathbf{D}), \mathbf{X})$, а через $\mathbf{H}^p$ $(0 < p < +\infty)$, A^p, C_A – соответственно классы Харди, Бергмана и диск-алгебру.

Теорема 4. *Пусть* $\mathbf{X}$ *совпадает с одним из вышеуказанных классов. Тогда следующие утверждения равносильны:*

$$\begin{aligned} &1. \quad \lambda = \{\lambda_k\}_{k=1}^{+\infty} \in \mathbf{M}(\mathbf{N}_\alpha(\mathbf{D}), \mathbf{X}); \\ &2. \quad \lim_{k\to+\infty} \frac{\ln|\lambda_k|}{k^{\frac{\alpha+1}{\alpha+2}}} = -\infty. \end{aligned} \tag{48}$$

Литература

1. R. Nevanlinna, *Eindeutige Analytischefunktionen*. Springer, Berlin (1936).
2. F. A. Shamoyan and E. N. Shubabko, *Parametrical Represetations of Some Classes of Holomorphic Function in the Disk*. in: Operator Theory: Advances and Applications, Vol. 113, Birkhauser Verlag Basel 2000, pp. 331–338.
3. Б. Секефальви-Надь, Ч. Фойаш, *Гармонический анализ операторов в гильбертовом пространстве*. Мир, Москва (1970).
4. G. M. Gubreev, A. M. Jerbashian, *Functions of generalized bounded type in spectral theory of nonweak contractions*. — Rev. Romanie de Math. Pures et Appl., **36** (1991), 147–154.
5. М. М. Джрбашян, *Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области*. Наука, Москва (1966).
6. М. М. Джрбашян, *К проблеме представимости аналитических функций*. — Сообщ. Инст. матем. и мех. АН Арм. ССР, вып. 2 (1948), 3–40.
7. А. А. Гольдберг, *Интеграл по полуаддитивной мере и его приложение к теории целых функций*. — Мат. сборник, **65** (1964), 414–453.
8. Б. Я. Левин, *Распределение корней целых функций*. Гостехиздат, Москва (1956).
9. Ф. А. Шамоян, *Характеристика скорости убывания коэффициентов Фурье функций ограниченного вида и класса аналитических функций с бесконечно дифференцируемыми граничными значениями*. — Сиб. мат. журнал, **36**, 4 (1995), 943–953.
10. И. И. Привалов, *Граничные свойства аналитических функций*. Гостехиздат, Москва (1950).

Shamoyan F. A., Shubabko E. N. About some class of holomorphic functions in the disk.

The paper introduces new parametric representation of the class of holomorphic functions in the unit disk the Nevanlinna characteristic for which has power growth near the boundary of the disk. All the parameters of the representation in question are determined in terms of the values of the function. Moreeover, the set of multipliers from the class in question to the classes of Hardy and Bergman and the disk-algebra is described completely.

Брянский государственный
университет
root@shamoyan.bitmcnit.bryansk.su

Поступило 10 апреля 2001 г.