Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 282, 2001 г.

Н. А. Широков

КЛАССЫ ГЁЛЬДЕРА В ОБЛАСТЯХ ЛАВРЕНТЬЕВА

Область Лаврентьева – это ограниченная односвязная область G в комплексной плоскости $\mathbb{C}$ со спрямляемой границей Γ такой, что для любых точек z_1, $z_2 \in \Gamma$ длина по крайней мере одной из дуг Γ с концами z_1, z_2 не превосходит $c_0 \cdot |z_1 - z_2|$, c_0 не зависит от z_1, z_2 (при этом Γ еще называют chord-arc-кривой, а G – chord-arc-областью). Через $\Lambda^\alpha(G)$, $0 < \alpha < 1$, обозначим пространство функций, аналитичных в G и удовлетворяющих в $\overline{G}$ условию Гёльдера порядка α, $\lambda^\alpha(G) \subset \Lambda^\alpha(G)$ – подпространство функций f, удовлетворяющих условию

$$|f(z_1) - f(z_2)| = o(|z_1 - z_2|^\alpha), \quad z_1, z_2 \in \overline{G}, \quad |z_1 - z_2| \to 0. \qquad (1)$$

Свойства классов $\Lambda^\alpha(G)$ в области Лаврентьева G привлекали внимание исследователей – главным образом, речь шла о свойствах аппроксимации в них полиномами [1, 2], и об описании множеств свободной интерполяции [3].

Однако свойства функций из $\Lambda^\alpha(G)$ или $\lambda^\alpha(G)$, связанные с их мультипликативной структурой, подобной структуре аналитичных пространств в единичном круге $\mathbb{D}$, оставались неизученными: исключение составляет теорема о наличии (F)-свойства для таких весовых пространств в $\mathbb{D}$, которые содержали бы конформные пересадки в круг классов $\Lambda^\alpha(G)$ для выпуклых G (см. [4, гл. 1]).

Целью настоящей статьи является анализ свойств классов $\Lambda^\alpha(G)$ и $\lambda^\alpha(G)$, связанных с так называемой внешне-внутренней факторизацией. Мы рассмотрим эти свойства в следующем порядке:

1. описание множеств нулей функций из $\Lambda^\alpha(G)$;
2. наличие (F)-свойства в $\Lambda^\alpha(G)$;
3. описание $|f|\big|_\Gamma$ для внешних функций $f \in \Lambda^\alpha(G)$;

Работа частично поддержана грантом “Научные школы”, No. 00-15-96-022.

4. описание всех замкнутых идеалов в $\lambda^\alpha(G)$;
5. аналог теоремы Хавина–Шамояна для $\Lambda^\alpha(G)$.

На реализацию вышеуказанной программы для единичного круга ушло около 30 лет. Разные задачи потребовали привлечения разных методов. Оказывается, что подходы, примененные ранее для $\Lambda^\alpha(\mathbb{D})$, могут быть использованы и для $\Lambda^\alpha(G)$, если дополнительно воспользоваться фактами, полученными для конформных отображений областей Лаврентьева [2, 3], а также теорией псевдоаналитического продолжения Е. М. Дынькина [6]. С учетом сказанного, в данной работе будут приведены лишь те изменения, которые возникают в новой геометрической ситуации. Наиболее заметным новым ограничением является требование $0 < \alpha \leqslant 1/2$, обусловленное в пунктах 2–4 применением результатов геометрической теории функций.

0. Предварительные сведения

Пусть G – область Лаврентьева, $\Gamma = \partial G$. Не умаляя общности, полагаем $0 \in G$. Обозначим через φ конформное отображение области G на единичный круг $\mathbb{D}$, нормированное условиями $\varphi(0) = 0$, $\varphi'(0) > 0$. Если $\omega_z(d\xi)$ – гармоническая мера элемента дуги $d\xi$ относительно G, вычисляемая в точке $z \in G$, то для почти всех ξ относительно длины на Γ справедливо соотношение

$$\omega_z(d\xi) = \frac{1}{2\pi}\,\frac{1-|\varphi(z)|^2}{|\varphi(\xi)-\varphi(z)|^2}\cdot|\varphi'(\xi)|\,|d\xi| \qquad (0.1)$$

и для гармонической меры любого измеримого множества $E \subset \Gamma$ относительно G, вычисленной в точке z, имеем

$$\omega_z(E) = \int\limits_E \omega_z(d\xi) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_E \frac{1-|\varphi(z)|^2}{|\varphi(\xi)-\varphi(z)|^2}\cdot|\varphi'(\xi)|\,|d\xi|. \qquad (0.2)$$

Пусть, далее, $H^\infty(G)$ – пространство всех аналитических и ограниченных в G функций. Пользуясь тем, что пространство $H^\infty(G)$ при конформном отображении области G на $\mathbb{D}$ переходит в обычное $H^\infty(\mathbb{D})$, и опираясь на классические результаты из [8], гл. 3, получаем, что для всякой функции $f \in H^\infty(G)$ справедлива следующая внешне-внутренняя факторизация:

$$f = c_f \cdot B_f \cdot S_f \cdot H_f, \qquad (0.3)$$

где c_f – постоянная, $|c_f| = 1$,

$$B_f(z) = \varphi^m(z) \cdot \prod_{\substack{\beta\in G:\beta\neq 0\\ f(\beta)=0}} \left(\frac{\varphi(\beta)-\varphi(z)}{1-\overline{\varphi(\beta)}\,\varphi(z)}\right)^{k(\beta)} \cdot \left(\frac{\overline{\varphi(\beta)}}{|\varphi(\beta)|}\right)^{k(\beta)}, \tag{0.4}$$

$$S_f(z) = \exp\left(-\int\limits_\Gamma \frac{\varphi(\xi)+\varphi(z)}{\varphi(\xi)-\varphi(z)} d\nu(\xi)\right), \tag{0.5}$$

где в (0.5) ν – неотрицательная сингулярная относительно длины на Γ мера, H_f – так называемая внешняя функция, для которой выполнено

$$|H_f(z)| = \exp\left(\int\limits_\Gamma \log|f(\xi)|\omega_z(d\xi)\right), \quad |H_f(\xi)| = |f(\xi)| \ \text{ п.в. на } \ \Gamma \tag{0.6}$$

и

$$H_f(z) = \exp\left(\frac{1}{2\pi}\int\limits_\Gamma \log|f(\xi)| \cdot \frac{\varphi(\xi)+\varphi(z)}{\varphi(\xi)-\varphi(z)} \cdot |\varphi'(\xi)|\;|d\xi|\right). \tag{0.7}$$

Произведение $I_f = c_f B_f S_f$ будем называть *внутренней функцией*. В соотношении (0.4) m – кратность нуля функции f при $z = 0$, а $k(\beta)$ – кратность нуля функции f при $z = \beta$. Обозначим через Z_f множество нулей функции f в G. Справедливо следующее условие Бляшке ($f \neq 0$):

$$\sum_{\beta\in Z_f} k(\beta)(1-|\varphi(\beta)|) < \infty. \tag{0.8}$$

Далее, для $z \in G$ справедливо следующее соотношение [5], гл. 7:

$$1-|\varphi(z)| \asymp |\varphi'(z)| \cdot \operatorname{dist}(z,\Gamma), \tag{0.9}$$

поэтому (0.8) может быть переписано в виде

$$\sum_{\beta\in Z_f} k(\beta)\cdot|\varphi'(\beta)|\cdot\operatorname{dist}(\beta,\Gamma) < \infty. \tag{0.10}$$

Нам потребуется также лемма П. М. Тамразова [7], гл. 2, которую мы сформулируем в следующем виде:

Лемма 1. *Пусть G – область Лаврентьева, $z_0 \in \Gamma = \partial G$, $h \geqslant 0$, $z \in G$. Существует абсолютная постоянная $A_0 > 0$ такая, что справедливо соотношение*

$$\int\limits_{\Gamma} \log(|\xi - z_0| + h)\omega_z(d\xi) \leqslant \log\bigl[A_0(|z - z_0| + h)\bigr]. \tag{0.11}$$

Далее, условие Йенсена для функций из $H^\infty(\mathbb{D})$ вместе с (0.1) дают, что для $f \in H^\infty(G)$, $f \neq 0$, выполняется соотношение

$$\int\limits_{\Gamma} \log|f(\xi)| \cdot |\varphi'(\xi)|\,|d\xi| > -\infty. \tag{0.12}$$

1. Множества нулей функций из $\Lambda^\alpha(G)$

Пусть $f \in \Lambda^\alpha(G)$, $f \not\equiv 0$, $Z_f \subset \overline{G}$ – множество различных нулей функции f.

Обозначим через $\xi(z)$, $z \in G$, любую из ближайших к точке z точек на Γ, и пусть точки $\xi_+(z)$, $\xi_-(z) \in \Gamma$ лежат по разные стороны от точки $\xi(z)$, причем они выбраны так, что

$$|\xi_+(z) - \xi(z)| = |\xi_-(z) - \xi(z)| = |z - \xi(z)|.$$

Положим

$$Z_f' = (Z_f \cap \Gamma) \cup \Bigl(\bigcup_{\beta \in Z_f \cap G} \bigl(\{\xi_+(\beta)\} \cup \{\xi_-(\beta)\}\bigr)\Bigr). \tag{1.1}$$

Если $Z_f \subset \Gamma$, то, естественно, положим $Z_f' = Z_f$. Соотношения (0.10) и (0.12) влекут, что h^1-мера Хаусдорфа множества Z_f' равна нулю, множество Z_f' замкнуто.

Пусть $\{\sigma_\nu\}_{\nu \geqslant 1}$ – множество дополнительных дуг на Γ множества Z_f, $\{\sigma_\nu'\}_{\nu \geqslant 1}$ – множество дополнительных дуг на Γ множества Z_f', $\varphi(\sigma_\nu)$, $\varphi(\sigma_\nu')$ – образы σ_ν, σ_ν' при отображении φ.

Теорема 1. а) *Пусть $f \in \Lambda^\alpha(G)$, $f \not\equiv 0$. Тогда выполнены следующие эквивалентные соотношения:*

$$\int\limits_{\Gamma} \log \operatorname{dist}(\xi, Z_f) \cdot |\varphi'(\xi)|\,|d\xi| > -\infty; \tag{1.2}$$

$$\sum_{\nu} \log|\sigma'_\nu| \cdot |\varphi(\sigma'_\nu)| > -\infty; \tag{1.3}$$

$$\sum_{\nu} \log|\varphi(\sigma'_\nu)| \cdot |\varphi(\sigma'_\nu)| > -\infty. \tag{1.4}$$

b) *Пусть Z, $Z \subset \overline{G}$, – замкнутое множество, для которого множество Z', построенное в* (1.1), *имеет h^1-меру Хаусдорфа, равную нулю.*

Предположим, что натуральные числа $k(\beta)$, $\beta \in Z \cap G$, удовлетворяют соотношению (0.8) *(с заменой Z_f на Z в условии). Предположим далее, что выполнено любое из соотношений* (1.2)–(1.4). *Тогда существует функция $f_0 \in \Lambda^\alpha(G)$, $0 < \alpha < 1$, для которой $Z_{f_0} = Z$ и кратность нуля $\beta \in Z \cap G$ равна $k(\beta)$.*

Замечание. Соотношение (1.4) показывает, что возможные множества нулей Z_f, $f \in \Lambda^\alpha(G)$, – это прообразы при отображении φ карлесоновых множеств в единичном круге.

Доказательство. Соотношение (1.2) следует из неравенства

$$|f(\xi)| \leqslant c_f \operatorname{dist}^\alpha(\xi, Z_f), \quad \xi \in \Gamma,$$

и соотношения (0.12). Условия (1.3) и (1.4) эквивалентны в силу того, что для областей Лаврентьева справедливо свойство $\log|\varphi(\sigma)| \asymp \log\sigma$ для любой дуги $\sigma \subset \Gamma$ [5], гл. 7. Эквивалентность соотношений (1.2) и (1.3) доказывается стандартным диадическим разбиением каждой дуги σ'_ν с использованием еще одного свойства отображений областей Лаврентьева на круге [5], гл. 7, именно, существования чисел $\varkappa > 0$, $A > 0$, зависящих лишь от G таких, что для любых дуг $\Gamma \supset I \supset J$ удовлетворяется оценка

$$\frac{|\varphi(J)|}{|\varphi(I)|} \leqslant A\left(\frac{|J|}{|I|}\right)^\varkappa.$$

Построим область Лаврентьева $\widetilde{G} \supset G$ с границей $\widetilde{\Gamma}$ такую, что $\Gamma \cap \widetilde{\Gamma} = Z'$ и при $\xi \in \Gamma \setminus Z'$ справедливо соотношение

$$\operatorname{dist}(\xi, Z') \asymp \operatorname{dist}(\xi, \widetilde{\Gamma}). \tag{1.6}$$

Такое построение можно выполнить многими способами – один из них приведен, например, в [3]. Теоремы сравнения для гармонической меры в таком случае дают, что для гармонических мер $\widetilde{\omega}_0$ и ω_0 относительно, соответственно, $\widetilde{G}$ и G выполнено

$$\omega_0(\sigma'_\nu) \asymp \widetilde{\omega}_0(\widetilde{\sigma}'_\nu), \quad \sigma'_\nu \subset \Gamma \setminus Z', \quad \widetilde{\sigma}'_\nu \subset \widetilde{\Gamma} \setminus Z'. \tag{1.7}$$

При этом $\omega_0(\sigma'_\nu) = |\varphi(\sigma'_\nu)|$, $\widetilde{\omega}_0(\widetilde{\sigma}'_\nu) = |\widetilde{\varphi}(\widetilde{\sigma}'_\nu)|$, где $\widetilde{\varphi}$ – конформное отображение области $\widetilde{G}$ на единичный круг, такое, что $\widetilde{\varphi}(0) = 0$, $\widetilde{\varphi}'(0) > 0$. Поэтому для области $\widetilde{G}$ выполнено соотношение

$$\sum_\nu \log|\widetilde{\sigma}'_\nu| \cdot |\widetilde{\varphi}(\widetilde{\sigma}'_\nu)| > -\infty. \tag{1.8}$$

Диадическое разбиение каждой дополнительной дуги $\widetilde{\sigma}'_\nu \subset \widetilde{\Gamma} \setminus Z'$ и соотношения (1.5) и (1.8) повлекут условие

$$\int_{\widetilde{\Gamma}} \log \operatorname{dist}(\xi, Z') \cdot |\widetilde{\varphi}'(\xi)|\ |d\xi| > -\infty. \tag{1.9}$$

Построим теперь в области $\widetilde{G}$ внешнюю функцию f_0 такую, что

$$|f_0(\xi)| = \operatorname{dist}(\xi, Z'), \quad \xi \in \widetilde{\Gamma} \setminus Z'. \tag{1.10}$$

Условия (1.9), (0.6) и (0.2) показывают, что это возможно. Лемма 1 и (1.6) влекут при $z \in \widetilde{G}$ оценку

$$|f_0(z)| \leqslant A \operatorname{dist}(z, Z'). \tag{1.11}$$

Геометрическое условие (1.6), оценка (1.11) и формула Коши для производной в точке $z \in G$ с интегрированием по окружности $\{\xi : |\xi - z| = \frac{1}{2}\operatorname{dist}(z, \widetilde{\Gamma})\}$ влечет, что

$$|f'_0(z)| \leqslant A_1, \quad z \in G. \tag{1.12}$$

Далее, построение множества Z' и принцип Монтеля для сравнения гармонических мер [8], гл. 4, дают соотношение

$$1 - |\varphi(\beta)| \asymp 1 - |\widetilde{\varphi}(\beta)|, \quad \beta \in Z \cap G. \tag{1.13}$$

В таком случае (0.8) и (1.13) показывают, что функция $\widetilde{B}(z)$, построенная по формуле (0.4) для области $\widetilde{G}$, множества Z и кратностей $k(\beta)$, не равна тождественно нулю. Поскольку $|\widetilde{B}(z)| \leqslant 1$, $z \in \widetilde{G}$, то опять, применяя формулу Коши и (1.6), имеем

$$|\widetilde{B}'(z)| \leqslant 2\operatorname{dist}^{-1}(z, \widetilde{\Gamma}) \leqslant A_2 \operatorname{dist}^{-1}(z, Z'), \quad z \in G. \tag{1.14}$$

Пусть теперь $f = f_0\widetilde{B}$. Тогда Z – множество нулей функции f и (1.11), (1.12), (1.14) дают, что $f' \in H^\infty(G)$, т.е. $f \in \Lambda^\alpha(G)$ для всякого α, $0 < \alpha < 1$, что и требовалось.

2. (F)-свойство для $\Lambda^\alpha(G)$

Понятие (F)-свойства было определено В. П. Хавиным [9] для банаховой алгебры $X \subset H^\infty(\mathbb{D})$ следующим образом: X обладает (F)-свойством, если для всякой функции $f \in X$ и для всякой внутренней функции I такой, что $f/I \in H^\infty$, имеем $f/I \in X$. Это свойство присутствует во многих банаховых алгебрах [9, 11–13] (см. [4], гл. 1). Для подалгебр алгебры $H^\infty(G)$ приведенное качество также может быть проверяемым, поскольку в $H^\infty(G)$ имеется внешне-внутренняя факторизация. Для $\Lambda^\alpha(G)$ его удается установить, выяснив, какое влияние оказывает наличие внутреннего множителя I на $|f(\xi)|\big|_\Gamma$ по схеме, использованной в [4], гл. 1 и в [1, 2].

Для формулировки следующей теоремы нам потребуется определить некоторые объекты. Каждую точку $\xi \in \Gamma$ соединим с точкой O такой кривой $\tau(\xi)$, что для всякого $z \in \tau(\xi)$ выполнено $|z-\xi| \asymp \operatorname{dist}(z,\Gamma)$, что возможно для областей Лаврентьева. Далее, если $I(z) = B(z)S(z)$ – внутренняя в G функция, где B определена в (0.4), а S – в (0.5), то положим

$$Z_I = \overline{Z_B \cup \operatorname{supp}\nu}.$$

Предполагаем, что I – такая внутренняя функция, что $Z_I \cap \Gamma$ имеет нулевую линейную меру. Если $\xi \in \Gamma \setminus Z_I$, то через $z[\xi]$ обозначаем такую точку на $\tau(\xi)$, что

$$|z[\xi]-\xi| = \frac{1}{2}\operatorname{dist}(\xi, Z_I), \tag{2.1}$$

и положим

$$a_I^*(\xi) = |I'(z[\xi])|,$$

$$a_I(\xi) = \begin{cases} a_I^*(\xi), & \text{если } \ a_I^*(\xi) \leqslant |z[\xi]-\xi|^{-1}, \\ \min\bigl\{\delta : z_\delta \in \tau(\xi),\, |z_\delta - \xi| = \delta,\, |I'(z_\delta)| \geqslant \delta^{-1}\bigr\}, \\ \text{если } \ a_I^*(\xi) > |z[\xi]-\xi|^{-1}. \end{cases} \tag{2.2}$$

Из определения $a_I(\xi)$ ясно, что в случае $a_I^*(\xi) > |z[\xi]-\xi|^{-1}$ на кривой $\tau(\xi)$ найдется точка $\widehat{z}[\xi]$ такая, что

$$|\widehat{z}[\xi]-\xi| < \frac{1}{2}\operatorname{dist}(\xi, Z_I), \quad |I'(\widehat{z}[\xi])| = |\widehat{z}[\xi]-\xi|^{-1}. \tag{2.3}$$

Теорема 2. *Пусть* $f \in \Lambda^\alpha(G)$, $0 < \alpha < 1$, I – *внутренняя в* G *функция, причем* $f/I \in H^\infty(G)$. *Тогда*

a) *для всякой точки* $\xi \in \Gamma \setminus Z_f$ *справедлива оценка*

$$|f(\xi)| \leqslant c_f \min\big(\operatorname{dist}^\alpha(\xi, Z_f), a_I^{-\alpha}(\xi)\big), \tag{2.4}$$

где величина $a_I(\xi)$ *определена в* (2.2);

b) *если* $0 < \alpha \leqslant 1/2$, *то* $f/I \in \Lambda^\alpha(G)$, $fI \in \Lambda^\alpha(G)$;

c) *если для некоторой функции* $f \in \Lambda^\alpha(G)$, $0 < \alpha \leqslant 1/2$, *и некоторой внутренней функции* I *выполнено неравенство* (2.4), *то* $fI \in \Lambda^\alpha(G)$.

Доказательство теоремы 2 проводится по схеме доказательства аналогичных утверждений для круга, использованной в [4], гл. 1 и в [13]. Первая модификация, связанная с действиями с областью G, состоит в следующем. Пусть $\Omega = \varphi(Z_B)$, $I = BS$,

$$V(w) = \prod_{\substack{\omega \in \Omega,\\ \omega \neq 0}} \left(\frac{\omega - w}{1 - w\overline{\omega}} \cdot \frac{\overline{\omega}}{|\omega|}\right)^{k(\varphi^{-1}(\omega))},$$

$$P(w) = \exp\left(-\int\limits_{\partial\mathbb{D}} \frac{\omega + w}{\omega - w} d\mu(\omega)\right),$$

где $d\mu$ – сингулярная мера на $\partial\mathbb{D}$, определяемая равенством

$$d\mu(\omega) = d\nu(\varphi^{-1}(\omega)), \quad J(w) = V(w)P(w).$$

Лемма 2. *Пусть* $\xi \in \Gamma \setminus Z_I$, $\omega_0 = \varphi(\xi)$, *точка* $\widehat{z}[\xi] \in \tau(\xi)$ *определяется в* (2.2) *и* (2.3), $a_I(\xi)$ *определено в* (2.2). *Тогда*

$$a_I(\xi) \asymp \big|J'(\omega_0)\big| \cdot \big|\varphi'(\widehat{z}[\xi])\big|. \tag{2.5}$$

Получение (2.5) требует рутинной техники.

Далее, в процессе применения метода [4] используется соотношение, которое для областей Лаврентьева аналогично подобному для круга, именно, то, что при $\xi \in \Gamma$, $z \in G$ выполнено

$$\left|\left(\frac{\varphi(\xi) + \varphi(z)}{\varphi(\xi) - \varphi(z)}\right)'_z\right| = \frac{2|\varphi'(z)|}{|\varphi(\xi) - \varphi(z)|^2} \asymp \frac{1 - |\varphi(z)|^2}{|\varphi(\xi) - \varphi(z)|^2} \cdot \frac{1}{\operatorname{dist}(z, \Gamma)}. \tag{2.6}$$

Вкратце изложим доказательство (2.4), соответствующие постоянные A_j, как оказывается, можно подобрать, как потребуется.

При получении оценки (2.4) считаем, что $a_I(\xi) > A_1 \operatorname{dist}^{-1}(\xi, Z_f)$, где A_1 – постоянная, зависящая от G; ее величина согласуется в дальнейшем с другими постоянными $A_2, \ldots$. Затем, при $z \in \tau(\xi)$, $|z-\xi| \leqslant A_2 a_I^{-1}(\xi)$ с помощью (2.6) и леммы 2 находим, что

$$|I(z)| \leqslant \exp\bigl(-A_3 \cdot \operatorname{dist}(z, \Gamma) \cdot a_I(\xi)\bigr). \tag{2.7}$$

Выбрав $z_1 \in \tau(\xi)$ так, что $|z_1 - \xi| = A_2 a_I^{-1}(\xi)$, $A_2 \geqslant 2$, аналогично (2.7) находим, что

$$|I(z_1)| \leqslant \exp(-A_4). \tag{2.8}$$

Пусть $x = |f(\xi)|$; предположим, не умаляя общности, что $|f(z_1) - f(z_2)| \leqslant |z_1 - z_2|^\alpha$. Тогда лемма 1 влечет, что для внешнего множителя F функции f справедлива оценка

$$|F(z)| \leqslant A_\alpha(x + |z - \xi_0|^\alpha), \quad z \in \overline{G}, \tag{2.9}$$

постоянная A_α зависит лишь от α. Выбирая A_1, а затем A_2, A_3, A_4 так, что

$$A_\alpha \cdot e^{-A_4} \leqslant \frac{1}{2}, \tag{2.10}$$

из (2.8)–(2.10) получаем, что

$$\begin{aligned} x &= |f(\xi)| \leqslant |f(\xi) - f(z_1)| + |f(z_1)| \leqslant \\ &\leqslant \bigl(A_2^{-1} a_I(\xi)\bigr)^{-\alpha} + |F(z_1)|\,|I(z_1)| \leqslant \\ &\leqslant A_2^\alpha\, a_I^{-\alpha}(\xi) + A_\alpha \cdot e^{-A_4}(x + |z_1 - \xi_0|^\alpha) \leqslant \\ &\leqslant \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}A_2^\alpha\, a_I^{-\alpha}(\xi), \end{aligned}$$

откуда

$$x \leqslant 3A_2^\alpha\, a_I^{-\alpha}(\xi),$$

что представляет самую существенную часть оценки (2.4).

После получения (2.4) утверждения (b) и (c) теоремы 2 выводятся буквально, как в [4], гл. 1. В качестве новшества приходится использовать лемму 2. Например, в наиболее трудном из подслучаев, разбираемых в [4] для $\mathbb{D}$, именно, когда $\xi_1, \xi_2 \in \Gamma$ и $|\xi_1 - \xi_2| \leqslant \frac{1}{A_5} a_I^{-1}(\xi_1)$, имеем для доказательства (b):

$$\begin{aligned} &\bigl|f(\xi_2)/I(\xi_2) - f(\xi_1)/I(\xi_1)\bigr| \leqslant \\ \leqslant &\bigl|(f(\xi_2) - f(\xi_1))/I(\xi_2)\bigr| + \bigl|f(\xi_1)\bigr|\,\bigl|1/I(\xi_2) - 1/I(\xi_1)\bigr| \leqslant \\ \leqslant &\bigl|\xi_2 - \xi_1\bigr|^\alpha + A\, a_I^{-\alpha}(\xi_1)\bigl|I(\xi_2) - I(\xi_1)\bigr| \leqslant \\ \leqslant &\bigl|\xi_2 - \xi_1\bigr|^\alpha + A\, a_I^{-\alpha}(\xi_1) \cdot \bigl|J'(\omega_1)\bigr|\,|\omega_2 - \omega_1|, \end{aligned} \tag{2.11}$$

где в (2.11) $\omega_j = \varphi(\xi_j)$, $j = 1, 2$. Далее, по свойствам областей Лаврентьева [5], гл. 7, имеем

$$|\omega_2 - \omega_1| = |\varphi(\xi_2) - \varphi(\xi_1)| \asymp |\varphi'(\,\widehat{\xi}\,)| \cdot |\xi_2 - \xi_1|, \tag{2.12}$$

где $\widehat{\xi} \in \tau(\xi_1)$, $|\,\widehat{\xi} - \xi_1| = |\xi_2 - \xi_1|$. Если $\widehat{z}[\xi_1] \in \tau(\xi_1)$ определена в (2.3) и (2.4) при введении величины $a_I(\xi_1)$, то из леммы 2 получаем

$$|J'(\omega_1)|\,\big|\varphi'(\widehat{z}[\xi_1])\big| \asymp a_I(\xi_1), \tag{2.13}$$

а свойство производной φ' для областей Лаврентьева [5] дает оценку

$$\frac{|\varphi'(\,\widehat{\xi}\,)|}{|\varphi'(\widehat{z}[\xi_1])|} \leqslant A\left(\frac{|\widehat{z}[\xi_1] - \xi_1|}{|\,\widehat{\xi} - \xi_1|}\right)^{1/2}. \tag{2.14}$$

При $0 < \alpha \leqslant 1/2$ из соотношений (2.11)–(2.14) и (2.4) получим

$$\begin{aligned} &a_I^{-\alpha}(\xi_1) \cdot \big|J'(\omega_1)\big|\,|\omega_2 - \omega_1| \asymp \\ &\asymp a_I^{-\alpha}(\xi_1) \cdot \big|J'(\omega_1)\big| \cdot |\varphi'(\,\widehat{z}[\xi_1])| \cdot \frac{|\varphi'(\,\widehat{\xi}\,)|}{|\varphi'(\widehat{z}[\xi_1])|} \cdot |\xi_1 - \xi_2| \asymp \\ &\asymp a_I^{1-\alpha}(\xi_1) \cdot \frac{|\varphi'(\,\widehat{\xi}\,)|}{|\varphi'(\widehat{z}[\xi_1])|} \cdot |\xi_1 - \xi_2| \leqslant \\ &\leqslant A_6\, a_I^{1/2-\alpha}(\xi_1)|\xi_1 - \xi_2| \leqslant A_7|\xi_1 - \xi_2|^{\alpha}. \end{aligned} \tag{2.15}$$

Рассмотрение случая $|\xi_1 - \xi_2| > \frac{1}{A_5}\, a_I^{-\alpha}(\xi_1)$, как и для круга, проще чем в (2.15) и (2.11), и в итоге находим, что функция f/I удовлетворяет на Γ условию Гёльдера, а поскольку $f/I \in H^\infty(G)$, то по теореме Тамразова [14] заключаем, что $f/I \in \Lambda^\alpha(G)$. Часть c) теоремы 2 устанавливается аналогично, также с использованием теоремы Тамразова [14].

3. Внешние функции в $\Lambda^\alpha(G)$

Обозначим через $H^\alpha(\Gamma)$, $0 < \alpha < 1$, пространство комплекснозначных функций, определенных на Γ и удовлетворяющих α-условию Гёльдера. Гармоническая мера $\omega_z(\,\cdot\,)$ определена в (0.1) и (0.2). Для $z \in G$ точки $\xi(z)$ определены в начале п. 1. Пусть

$$|||f|||_\alpha = \sup_{z,\xi\in\Gamma, z\neq\xi} |f(z) - f(\xi)|/|z - \xi|^\alpha.$$

Теорема 3. a) *Пусть* $f \in \Lambda^\alpha(G)$, $0 < \alpha < 1$, $f \not\equiv 0$, $|||f|||_\alpha \leqslant 1$. *Существует постоянная* c_f, *зависящая лишь от* f, *такая, что для всякой* $z \in G$, *для которой выполнено условие*

$$|f(\xi(z))| \geqslant |z - \xi(z)|^\alpha, \tag{3.1}$$

справедливо неравенство

$$\int\limits_\Gamma \left|\log \frac{|f(\xi)|}{|f(\xi(z))|}\right| \omega_z(d\xi) \leqslant c_f. \tag{3.2}$$

b) *Пусть* $f \in H^\alpha(\Gamma)$, $0 < \alpha \leqslant 1/2$, $f \geqslant 0$, $|||f|||_\alpha \leqslant 1$ *и* f *удовлетворяет условию* (1.12), F – *внешняя в* G *функция, построенная по формуле* (0.7) *с использованием функции* f *в ней (т.е.* $|F|\big|_\Gamma = f$*). Предположим далее, что существует некоторая постоянная* c_f, *зависящая лишь от* f, *такая, что для всякой точки* $z \in G$, *в которой выполнено* (3.1), *справедливо неравенство* (3.2). *Тогда* $F \in \Lambda^\alpha(G)$.

Замечание. Теоремы 2 и 3 дают полное описание внешне-внутренней факторизации в $\Lambda^\alpha(G)$ при $0 < \alpha \leqslant 1/2$.

В процессе доказательства теоремы 3, применяя неравенство Харнака к положительной гармонической в G функции, каковой является интеграл в левой части (3.2), при фиксированной $\xi_0 = \xi(z_0)$ и меняющейся z, подобно [4], гл. 2, получаем вначале следующее утверждение, эквивалентное теореме 3. Для $z \in G$ обозначим через $\gamma(z) \subset \Gamma$ дугу, ограниченную точками $\xi_+(z)$ и $\xi_-(z)$ и содержащую точку $\xi(z)$ (см. п. 1).

Для функции $f \in C(\Gamma)$ положим

$$M_f(z) = \max_{\xi \in \gamma(z)} |f(\xi)|. \tag{3.3}$$

Теорема 3′. *Заключения* a) *и* b) *теоремы* 3 *остаются в силе, если условие* (3.1) *заменить условием*

$$M_f(z) = |z - \xi(z)|^\alpha, \tag{3.4}$$

где величина $M_f(z)$ *определена в* (3.3), *и заменить в интеграле* (3.2) *величину* $|f(\xi(z))|$ *на величину* $M_f(z)$.

После этого часть a) доказывается буквальным повторением рассуждений из [4], гл. 2, что оказывается возможным в силу того, что постоянная A_0 из леммы 1, используемой в доказательстве, не зависит от G.

Далее, как в [4], при доказательстве части b) воспользуемся эквивалентностью

$$F \in \Lambda^\alpha(G) \Leftrightarrow |F'(z)| \leqslant C_F \operatorname{dist}^{\alpha-1}(z,\Gamma), \quad z \in G. \tag{3.5}$$

В свою очередь, случай, когда $M_f(z) \leqslant \operatorname{dist}^\alpha(z,\Gamma)$, разбирается буквально, как в [4], с использованием формулы Коши для производной и леммы 1. Поэтому трудность представляет лишь получение оценки (3.5) для тех $z \in G$, для которых справедливо (3.4). Пусть $M = M_f(z)$. Пользуясь тем, что G – область Лаврентьева, можно найти такое $z_1 \in G$, что $\operatorname{dist}(z_1,\Gamma) \leqslant M^{1/\alpha}$, $\operatorname{dist}(z_1,\Gamma) \asymp M^{1/\alpha}$ и $\gamma(z_1) \supset \gamma(z)$. В таком случае $M_f(z_1) \asymp M_f(z) = M$, и для точки z_1 также справедливо (3.4). Далее, при $z \in G$ формула Коши влечет

$$\int\limits_\Gamma \frac{|\varphi'(\xi)|\,|d\xi|}{(\varphi(\xi)-\varphi(z))^2} = \int\limits_{\partial\mathbb{D}} \frac{|d\omega|}{(\omega-\varphi(z))^2} = \frac{1}{i}\int\limits_{\partial\mathbb{D}} \frac{d\omega}{\omega(\omega-\varphi(z))^2} = 0,$$

поэтому из (0.7) находим, что

$$\begin{aligned} F'(z) &= \frac{\varphi'(z)}{\pi}\int\limits_\Gamma \log|f(\xi)| \cdot \frac{|\varphi'(\xi)|\,|d\xi|}{(\varphi(\xi)-\varphi(z))^2}\cdot F(z) = \\ &= \frac{\varphi'(z)}{\pi}\int\limits_\Gamma \log\frac{|f(\xi)|}{M} \cdot \frac{|\varphi'(\xi)|\,|d\xi|}{(\varphi(\xi)-\varphi(z))^2}\cdot F(z), \end{aligned}$$

откуда получаем

$$|F'(z)| \leqslant \frac{|\varphi'(z)|}{\pi}\int\limits_\Gamma \left|\log\frac{|f(\xi)|}{M}\right| \cdot \frac{|\varphi'(\xi)|\,|d\xi|}{|\varphi(\xi)-\varphi(z)|^2}\cdot |F(z)|. \tag{3.6}$$

Применяя лемму 1 и то, что

$$|f(\xi)| \leqslant |f(\xi(z))| + |\xi - \xi(z)|^\alpha \leqslant M + |\xi-\xi(z)|^\alpha,$$

мы находим оценку

$$|F(z)| \leqslant A_\alpha\big(M + |z-\xi(z)|^\alpha\big) \leqslant 2A_\alpha M. \tag{3.7}$$

Пусть $\gamma_0(z) \subset \Gamma$ – дуга, содержащая точку $\xi(z)$, ограниченная точками $\xi_{*\pm}$ такими, что $|\xi_{*\pm} - \xi(z)| = \frac{1}{2}M^{1/\alpha}$. Пусть $\rho = \operatorname{dist}(z,\Gamma)$,

$\xi_{+n}(z)$, $\xi_{-n}(z)$ – точки на Γ, расположенные таким образом, что точки $\xi_\pm(z)$ лежат на дуге с концами $\xi_{\pm n}(z)$ и $\xi(z)$, такие, что $|\xi_{\pm n}(z)-\xi(z)| = 2^n\rho$, $n \geqslant 1$. Выберем N так, чтобы $2^N\rho \leqslant \frac{1}{2}M^{1/\alpha} < 2^{N+1}\rho$. Полагая для единообразия $\xi_{\pm 0}(z) = \xi_\pm(z)$, обозначим через $\gamma_{\pm n}(z)$ дуги на Γ с концами соответственно $\xi_{+n}(z)$, $\xi_{+,n-1}(z)$, $\xi_{-n}(z)$, $\xi_{-,n-1}(z)$, не содержащие внутри других точек $\xi_{\pm k}(z)$, и пусть

$$S = \Gamma \setminus \left[\left(\gamma(z) \cup \bigcup_{n=1}^{N} \gamma_{\pm n}(z)\right) \cap B\right] = \Gamma \setminus \left(\gamma^0(z) \cup \bigcup_{n=1}^{N} \gamma^0_{\pm n}(z)\right),$$

где

$$B = \left\{\xi : |\xi - \xi(z)| \leqslant \frac{1}{2}M^{1/\alpha}\right\},$$
$$\gamma^0(z) = \gamma(z) \cap B, \quad \gamma^0_{\pm n}(z) = \gamma_{\pm n}(z) \cap B.$$

Далее учтем, что для конформного отображения φ и дуг $I \supset J$ на Γ с некоторыми постоянными A_Γ и $\varkappa > 1/2$ имеется неравенство [5], гл. 7

$$\frac{|\varphi(J)|}{|\varphi(I)|} \leqslant A_\Gamma \left(\frac{|J|}{|I|}\right)^{\varkappa}. \tag{3.8}$$

Применяя и другие хорошо известные свойства отображений [2], гл. 9, [5], гл. 7, находим оценки:

$$\frac{|\varphi'(z)|}{\pi} \int\limits_{\gamma^0(z)} \left|\log \frac{|f(\xi)|}{M}\right| \cdot \frac{|\varphi'(\xi)|\,|d\xi|}{|\varphi(\xi)-\varphi(z)|^2} \leqslant$$
$$\leqslant c|\varphi'(z)| \cdot \int\limits_{\gamma(z)} \frac{\rho^\alpha + |\xi-\xi(z)|^\alpha}{M} \cdot |\varphi'(\xi)|\,|d\xi| \cdot \frac{1}{|\varphi(z)-\varphi(\xi(z))|^2} \leqslant$$
$$\leqslant c|\varphi'(z)| \cdot \rho^\alpha \cdot \frac{|\varphi(z)-\varphi(\xi(z))|}{M} \cdot \frac{1}{|\varphi(z)-\varphi(\xi(z))|^2} \leqslant$$
$$\leqslant c\frac{\rho^\alpha|\varphi'(z)|}{|\varphi'(z)|\cdot|z-\xi(z)|} = c\frac{\rho^{\alpha-1}}{M} \tag{3.9}$$

и

$$\frac{|\varphi'(z)|}{\pi} \int\limits_{\gamma^0_{\pm n}(z)} \left|\log \frac{|f(\xi)|}{M}\right| \cdot \frac{|\varphi'(\xi)|}{|\varphi(\xi)-\varphi(z)|^2} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{c|\varphi'(z)|}{M} \cdot \int\limits_{\gamma_{\pm n}(z)} \frac{\rho^\alpha + |\xi - \xi(z)|^\alpha}{|\varphi(\xi) - \varphi(z)|^2} \cdot |\varphi'(\xi)|\,|d\xi| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{c|\varphi'(z)|}{M} \cdot 2^{n\alpha}\rho^\alpha \cdot \frac{1}{|\varphi(\xi_{+n}(z)) - \varphi(\xi(z))|^2} \int\limits_{\gamma_{\pm n}(z)} |\varphi'(\xi)|\,|d\xi| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{c|\varphi'(z)|}{M} \cdot 2^{n\alpha}\rho^\alpha \cdot \frac{1}{|\varphi(\gamma_{\pm n}(z))|} \leqslant \frac{c|\varphi'(z)|}{M} \cdot 2^{n\alpha}\rho^\alpha \cdot \frac{1}{|\varphi(\gamma(z))|} \cdot 2^{-n\varkappa} \leqslant$$

$$\leqslant c2^{n(\alpha-\varkappa)} \cdot \frac{\rho^{\alpha-1}}{M}. \tag{3.10}$$

Учитывая (3.7), из (3.9) и (3.10) заключаем, что

$$|F(z)| \cdot \frac{|\varphi'(z)|}{\pi} \int\limits_{\gamma^0(z) \cup \bigcup\limits_{n=1}^{N} \gamma^0_{\pm n}(z)} \left|\log \frac{|f(\xi)|}{M}\right| \cdot \frac{|\varphi'(\xi)|\,|d\xi|}{|\varphi(\xi) - \varphi(z)|^2} \leqslant$$

$$\leqslant cM \cdot \left(\frac{\rho^{\alpha-1}}{M} + \frac{\rho^{\alpha-1}}{M} \sum_{n=1}^{N} 2^{n(\alpha-\varkappa)}\right) \leqslant c\rho^{\alpha-1}. \tag{3.11}$$

Затем, если точка z_1 определена выше, то для $\xi \in S$ выполнено $|\varphi(\xi) - \varphi(z)| \asymp |\varphi(\xi) - \varphi(z_1)|$, поэтому

$$\begin{aligned} &\frac{|\varphi'(z)|}{\pi} \int\limits_S \left|\log \frac{|f(\xi)|}{M}\right| \cdot \frac{|\varphi'(\xi)|\,|d\xi|}{|\varphi(\xi) - \varphi(z)|^2} \asymp \\ &\asymp \frac{|\varphi'(z)|}{\pi} \int\limits_S \left|\log \frac{|f(\xi)|}{M}\right| \cdot \frac{|\varphi'(\xi)|\,|d\xi|}{|\varphi(\xi) - \varphi(z_1)|^2} \leqslant \\ &\leqslant \frac{|\varphi'(z)|}{\pi} \int\limits_\Gamma \left|\log \frac{|f(\xi)|}{M}\right| \cdot \frac{|\varphi'(\xi)|\,|d\xi|}{|\varphi(\xi) - \varphi(z_1)|^2}. \end{aligned} \tag{3.12}$$

Так как для точки z_1 выполнено (3.4), то справедлива оценка (3.2) с заменой $|f(\xi(z_1))|$ в интеграле (3.2) на M, поэтому

$$\operatorname{dist}(z_1, \Gamma) \cdot \frac{|\varphi'(z_1)|}{\pi} \int\limits_\Gamma \left|\log \frac{|f(\xi)|}{M}\right| \cdot \frac{|\varphi'(\xi)|\,|d\xi|}{|\varphi(\xi) - \varphi(z_1)|^2} \leqslant c_f. \tag{3.13}$$

Но из (3.8) имеем неравенство

$$\frac{|\varphi'(z)|}{|\varphi'(z_1)|} \leqslant c\left(\frac{\rho}{M^{1/\alpha}}\right)^\varkappa \cdot \frac{M^{1/\alpha}}{\rho} = c\frac{(M^{1/\alpha})^{1-\varkappa}}{\rho^{1-\varkappa}}, \tag{3.14}$$

тогда (3.7), (3.12)–(3.14) влекут в силу $0 < \alpha \leqslant 1/2$, $\varkappa > 1/2$:

$$|F(z)| \cdot \frac{|\varphi'(z)|}{\pi} \int\limits_S \left| \log \frac{|f(\xi)|}{M} \right| \cdot \frac{|\varphi'(\xi)|\,|d\xi|}{|\varphi(\xi) - \varphi(z)|^2} \leqslant$$

$$\leqslant cM \cdot \frac{(M^{1/\alpha})^{1-\varkappa}}{\rho^{1-\varkappa}} \cdot \frac{1}{M^{1/\alpha}} \leqslant c\rho^{\alpha-1}. \tag{3.15}$$

Соотношения (3.11) и (3.15) заканчивают доказательство части b) теоремы 3.

4. Замкнутые идеалы алгебры $\lambda^\alpha(G)$

Алгебра $\lambda^\alpha(G) \subset \Lambda^\alpha(G)$, $0 < \alpha < 1$, определена в (1). Пусть $I(z) = B(z)S(z)$, где функции B и S определены в (0.4) и (0.5), $E_0 \subset \Gamma$ – некоторое замкнутое множество нулевой h^1-меры Хаусдорфа, и пусть

$$E = E_0 \cup Z_B \cup \operatorname{supp} \nu. \tag{4.1}$$

Предполагаем, что множество Z_B удовлетворяет условию (0.8), а множество E – условию (1.2). Обозначим через $\lambda^\alpha_{I,E_0}(G) \subset \lambda^\alpha(G)$ множество всех функций $f \in \lambda^\alpha(G)$, удовлетворяющих условиям

$$f/I \in H^\infty(G), \quad f\big|_{E_0} = 0. \tag{4.2}$$

Теорема 4. a) *Если $0 < \alpha < 1$, то $\lambda^\alpha_{I,E_0}(G)$ – замкнутый идеал алгебры $\lambda^\alpha(G)$.*

b) *Если $0 < \alpha \leqslant 1/2$, $X \subset \lambda^\alpha(G)$ – некоторый замкнутый идеал в $\lambda^\alpha(G)$, $X \neq \{0\}$, то существуют внутренняя функция I и замкнутое множество $E_0 \subset \Gamma$ такие, что $X = \lambda^\alpha_{I,E_0}(G)$.*

Впервые все замкнутые идеалы в алгебре A^n в единичном круге $\mathbb{D}$ были описаны Б. И. Коренблюмом [10]. Для этого им была создана минитеория, которую удавалось реализовать и для других банаховых алгебр аналитических функций [10–12], [4], гл. 4. Оказывается, что всю эту теорию шаг за шагом можно реализовать и для областей Лаврентьева, получив утверждение b) теоремы 4 (утверждение a) просто и требуется для полноты формулировки). При этом условие $0 < \alpha \leqslant 1/2$ возникает в некоторых технических местах подобно тому, как это проявлялось в пп. 2 и 3. Единственным шагом в методе Коренблюма, который непригоден для действий с областями Лаврентьева, оказывается использование ядра Пуассона для того, чтобы любую функцию $f \in h^\alpha(\partial\mathbb{D})$ приближать в норме $\Lambda^\alpha(\partial\mathbb{D})$ функциями, аналитичными в кольце, содержащем единичную окружность (формула (2.2) в [9], лемма 2.1 там же). Оказывается, тем не менее, что требуемое утверждение может быть получено с помощью псевдоаналитического продолжения Дынькина [6].

Пусть $h^\alpha(\Gamma) \subset H^\alpha(\Gamma)$, $0 < \alpha < 1$, – подпространство функций, удовлетворяющих условию (1), $|||f|||_\alpha$ определена в начале п. 3 и пусть $\|f\|_\alpha = |||f|||_\alpha + \|f\|_{C(\Gamma)}$. Положим, далее,

$$D_\delta(z) = \{\xi \in \mathbb{C} : |\xi - z| < \delta\}, \quad \Omega_\delta(\Gamma) = \bigcup_{z\in\Gamma} D_\delta(z).$$

Лемма 3 (аналог леммы 2.1 [9] для chord-arc кривой Γ). *Существует семейство линейных операторов $T_\delta : h^\alpha(\Gamma) \to h^\alpha(\Gamma)$ со следующими свойствами:*

a) *для всякой функции $f \in h^\alpha(\Gamma)$ функция $T_\delta f$ аналитична в $\Omega_\delta(\Gamma)$;*

b) *для всякой функции $f \in h^\alpha(\Gamma)$ выполняется соотношение $\|T_\delta f - f\|_\alpha \underset{\delta\to+0}{\longrightarrow} 0$.*

Доказательство леммы 3. Пусть $R_0 > 0$ столь велико, что $\Gamma \subset D_{R_0}(0)$. Обозначим через S канонический линейный оператор Дынькина [6] псевдоаналитического продолжения функции f на всю плоскость: $Sf \in C(\mathbb{C})$, $Sf(z) \equiv 0$ при $|z| \geqslant R_0$ и

$$\left|\frac{\partial}{\partial \overline{z}} Sf(z)\right| \leqslant c_\alpha \cdot |||f|||_\alpha \cdot \big(\operatorname{dist}(z,\Gamma)\big)^{\alpha-1}, \quad z \in \mathbb{C}\setminus\Gamma.$$

Специфика обстоятельств ($f \in h^\alpha(\Gamma)$) дает чуть лучшую оценку, именно, получается, что

$$\left|\frac{\partial}{\partial \overline{z}} Sf(z)\right| = o\big(\operatorname{dist}^{\alpha-1}(z,\Gamma)\big), \quad z \in \mathbb{C}\setminus\Gamma. \tag{4.3}$$

Дынькиным [6] проверено, что для chord-arc кривой Γ и $f \in H^\alpha(\Gamma)$ справедлива формула Коши–Грина

$$f(z) = -\frac{1}{\pi} \iint\limits_{D_{R_0}(0)} \frac{\frac{\partial Sf(\xi)}{\partial \overline{\xi}}}{\xi - z} dm_2(\xi), \quad z \in \Gamma. \tag{4.4}$$

Положим

$$T_\delta f(z) = -\frac{1}{\pi} \iint\limits_{D_{R_0}(0)\setminus\Omega_\delta(\Gamma)} \frac{\partial Sf(\xi)}{\partial\overline{\xi}}\, \frac{dm_2(\xi)}{\xi - z}, \quad z \in \Gamma. \tag{4.5}$$

В таком случае утверждение a) очевидно, и (4.4) и (4.5) дают, что

$$T_\delta f(z) - f(z) = \frac{1}{\pi} \iint\limits_{\Omega_\delta(\Gamma)} \frac{\partial Sf(\xi)}{\partial\overline{\xi}}\, \frac{dm_2(\xi)}{\xi - z}, \quad z \in \Gamma. \tag{4.6}$$

Применяя далее к интегралу (4.6) методику оценок Дынькина из [6] дословно и учитывая (4.3), мы получим и утверждение b) леммы 3.

После доказательства леммы 3 вся остальная теория Коренблюма из [9] может быть шаг за шагом реализована для областей Лаврентьева с использованием свойств конформных отображений на круг подобно тому, как это приводилось в пп. 1–3, что и докажет теорему 4.

5. Теорема Хавина–Шамояна для $\Lambda^\alpha(G)$

Для областей Лаврентьева в классах Гёльдера, как оказывается, справедлив аналог теоремы Хавина–Шамояна для круга [15].

Теорема 5. *Пусть G – область Лаврентьева, $\Gamma = \partial G$, $f \in H^\alpha(\Gamma)$, $0 < \alpha < 1$, f удовлетворяет условию (0.12), F – внешняя в G функция, определяемая равенством $|F|\big|_\Gamma = |f|$. Существует δ, зависящее от G, такое, что $0 < \delta \leqslant 1$ и*

$$F \in \Lambda^{\delta\alpha/2}(G).$$

Замечание. В отличие от случая круга, в котором получаемая возможная гладкость $\Lambda^{\alpha/2}(\mathbb{D})$ была оптимальной, для областей Лаврентьева вопрос об оптимальности класса $\Lambda^{\delta\alpha/2}(G)$ с величиной δ, определенной ниже в (5.2), остается открытым. Если Γ – кривая ограниченного вращения, то можно полагать $\delta = \theta_{\min}/\theta_{\max}$, где $\theta_{\min}$ – минимальный внутренний угол, а $\theta_{\max}$ – максимальный внутренний угол (по отношению к G).

Доказательство. Для областей Лаврентьева с некоторыми постоянными $\varkappa_-$, $\varkappa_+$, c_1, c_2, $1/2 < \varkappa_- \leqslant \varkappa_+ < \infty$, и для дуги $I \subset \Gamma$ справедливы неравенства

$$c_1|I|^{\varkappa_+} \leqslant |\varphi(I)| < c_2|I|^{\varkappa_-}. \tag{5.1}$$

Пусть $\varkappa_+$, $\varkappa_-$ взяты из (5.1), положим

$$\delta = \frac{\varkappa_-}{\varkappa_+}. \tag{5.2}$$

Если $\beta = \delta/2$, I, $J \subset \Gamma$, $|J| \geqslant c_0|I|^\beta$, то (5.1) дает

$$|\varphi(J)|^2 \geqslant c_1'|J|^{2\varkappa_+} \geqslant c_1''|I|^{\varkappa_-} \geqslant c_2'|\varphi(I)|. \tag{5.3}$$

Применим теорему 3 для рассматриваемой ситуации. Предположим, что $|||f|||_\alpha \leqslant 1$, и пусть в обозначениях п. 3 для $z \in G$ выполнено $|f(\xi(z))| \geqslant |\xi(z)-z|^{\alpha\delta/2}$. Положим для краткости $\rho = |z-\xi(z)|$. Пусть J – наибольшая дуга Γ, содержащая точку $\xi(z)$ и помещающаяся в круге $D_{\xi(z)}(\frac{1}{2}\rho^\beta)$. Тогда при $\xi \in J$ имеем

$$|f(\xi)| \geqslant |f(\xi(z))| - \left(\frac{1}{2}\rho^\beta\right)^\alpha \geqslant \left(1 - \frac{1}{2^\alpha}\right)\rho^{\alpha\delta/2},$$

поэтому при $\xi \in J$ имеем

$$\left|\log\frac{|f(\xi)|}{|f(\xi(z))|}\right| \asymp 1,$$

значит,

$$\int\limits_J \left|\log\frac{|f(\xi)|}{|f(\xi(z))|}\right| \omega_z(d\xi) \leqslant c. \tag{5.4}$$

Далее,

$$\left|\log\left|\frac{f(\xi)}{f(\xi(z))}\right|\right| \leqslant \bigl|\log|f(\xi)|\bigr| + \bigl|\log|f(\xi(z))|\bigr|. \tag{5.5}$$

При $\xi \in \Gamma \setminus J$ в силу (5.3) и свойств отображения φ имеем, учитывая соотношение $|J| \geqslant c_0|\gamma(z)|^\beta$:

$$|\varphi(\xi) - \varphi(z)|^2 \geqslant c|J|^2 \geqslant c'|\varphi(I)| \geqslant \widetilde{c}\,(1 - |\varphi(z)|^2), \tag{5.6}$$

тогда условие (0.12) и (5.6) влекут

$$\int\limits_{\Gamma\setminus J} \bigl|\log|f(\xi)|\bigr|\omega_z(d\xi) =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\Gamma\setminus J} \frac{1-|\varphi(z)|^2}{|\varphi(\xi)-\varphi(z)|^2}\bigl|\log|f(\xi)|\bigr| \cdot |\varphi'(\xi)|\,|d\xi| \leqslant$$

$$\leqslant c \int\limits_{\Gamma\setminus J} \big|\log|f(\xi)|\big|\cdot|\varphi'(\xi)|\,|d\xi| \leqslant c\int\limits_{\Gamma} \big|\log|f(\xi)|\big|\cdot|\varphi'(\xi)|\,|d\xi| \leqslant c_*. \quad (5.7)$$

Затем, $\rho^\alpha \leqslant |f(\xi(z))| \leqslant c$, тогда

$$\big|\log|f(\xi(z))|\big| \leqslant c\big|\log(1-|\varphi(z)|)\big|, \quad (5.8)$$

и (5.6) влечет

$$\int\limits_{\Gamma\setminus J} \omega_z(d\xi) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\Gamma\setminus J} \frac{1-|\varphi(z)|^2}{|\varphi(\xi)-\varphi(z)|^2}|\varphi'(\xi)|\,|d\xi| \leqslant$$

$$\leqslant (1-|\varphi(z)|^2) \int\limits_{\substack{\omega\in\partial\mathbb{D}:|\omega-\omega_0|\geqslant\\ c(1-|\varphi(z)|)^{1/2}}} \frac{|d\omega|}{|\omega-\omega_0|^2} \leqslant c(1-|\varphi(z)|)^{1/2}. \quad (5.9)$$

Из (5.5)–(5.9) заключаем, что

$$\int\limits_{\Gamma\setminus J} \left|\log\left|\frac{f(\xi)}{f(\xi(z))}\right|\right| \omega_z(d\xi) \leqslant \widehat{c}. \quad (5.10)$$

Теорема 3 приложима к нашей ситуации в силу (5.4) и (5.10).

Теорема 5 доказана.

Литература

1. В. Н. Дзядык, *Применение методов теории квазиконформных отображений к получению прямых теорем приближения функций.* — ДАН СССР **225**, No. 3 (1975), 491–494.
2. В. К. Дзядык, *Введение в теорию равномерного приближения функций полиномами.* Наука, Москва, 1977.
3. А. М. Коточигов, Н. А. Широков, *Свободная интерполяция для классов Гёльдера в жордановых областях.* Проблемы математического анализа, изд-во СпбГУ **15**, (1995), 109–138.
4. N. A. Shirokov, *Analytic function smooth up to the boundary.* — Lecture Motes in Math. **1312** (1988).
5. Ch. Pommerenke, *Boundary behaviour of conformal maps.* — Grundlehren der mathematischen Wissenschaften **299** (1992).
6. Е. М. Дынькин, *Гладкие функции на плоских множествах.* — ДАН СССР **208**, No. 1 (1972), 25–27.
7. П. М. Тамразов, *Гладкости и полиномиальные приближения.* Наукова думка, Киев 1975.
8. И. И. Привалов, *Граничные свойства аналитических функций.* М.-Л. (1950).

9. В. П. Хавин, *Факторизация аналитических функций гладких вплоть до границы.* — Зап. научн. семин. ЛОМИ **22** (1971), 202–205.
10. Б. И. Коренблюм, *Замкнутые идеалы кольца* A^n. — Функц. анализ и его приложения **6**, No. 3 (1972), 38–53.
11. Б. И. Коренблюм, *Инвариантные подпространства оператора сдвига во взвешенном гильбертовом пространстве.* — Мат. сб. **89**, No. 1 (1972), 110–137.
12. Ф. А. Шамоян, *Замкнутые идеалы в алгебрах аналитических функций гладких вплоть до границы.* — Изв. АН Арм. ССР, сер. мат. **16**, No. 3 (1981), 173–191.
13. Н. А. Широков, *Фнутренние функции в аналитических классах О. В. Бесова.* — Алгебра и Анализ **8**, No. 4 (1996), 193–221.
14. П. М. Тамразов, *Контурные и телесные структурные свойства голоморфных функций комплексной переменной.* — Успехи мат. наук **28**, No. 1 (1973), 131–161.
15. В. П. Хавин, Ф. А. Шамоян, *Аналитические функции с липшицевым модулем граничных значений.* — Зап. научн. семин. ЛОМИ **19** (1970), 237–239.

Shirokov N. A. Hölder classes in Lavrent'ev domains.

Multiplicative properties of Hölder classes of analytic functions in the disk are shown to persist in the setting of Lavrent'ev domains.

С.-Петербургский
государственный
электротехнический
университет

Поступило 25 июня 2001 г.