Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 284, 2002 г.

Ю. А. Альпин, С. Н. Ильин

СТЕПЕНИ ЗНАКОВЫХ ПОРТРЕТОВ ВЕЩЕСТВЕННЫХ МАТРИЦ

Введение

Знаковым портретом вещественной матрицы $A = \|a_{ij}\|$ называется матрица $\mathrm{Sg}(A) = \|\mathrm{sg}(a_{ij})\|$, где

$$\mathrm{sg}(a_{ij}) = \begin{cases} 0, & \text{если } a_{ij} = 0, \\ 1, & \text{если } a_{ij} > 0, \\ -1, & \text{если } a_{ij} < 0. \end{cases}$$

Наибольшее применение получили портреты неотрицательных матриц (см., напр., [1]). Причина заключается в том, что портреты неотрицательных матриц можно рассматривать как матрицы над булевой алгеброй $\mathcal{B}_2$. Операции в этой алгебре хорошо известны: $0+0 = 0$, $0+1 = 1+0 = 1+1 = 1$, $0\cdot0 = 0\cdot1 = 1\cdot0 = 0$, $1\cdot1 = 1$. Булевы матрицы фиксированного порядка n образуют моноид по умножению. Имеет место очень существенное обстоятельство:

$$\mathrm{Sg}(AB) = \mathrm{Sg}(A)\mathrm{Sg}(B), \tag{1}$$

то есть отображение $A \mapsto \mathrm{Sg}(A)$ является гомоморфизмом мультипликативного моноида неотрицательных $n \times n$-матриц в мультипликативный моноид булевых $n \times n$-матриц. Из (1) для любой неотрицательной матрицы A и произвольного показателя k следует равенство

$$\mathrm{Sg}(A^k) = (\mathrm{Sg}(A))^k. \tag{2}$$

С содержательной точки зрения равенство (2) означает, что знаковый портрет неотрицательной матрицы полностью определяет знаковый портрет любой ее степени. Для вещественной матрицы это, вообще говоря, не так, но некоторая связь между матрицами $\mathrm{Sg}(A^k)$ и $\mathrm{Sg}(A)$ все же имеется. Чтобы исследовать эту связь алгебраически, введем элемент θ, символизирующий неопределенность, и рассмотрим расширение $\mathcal{B}_2$ – множество

$\mathcal{S} = \{0, 1, -1, \theta\}$, на котором определим естественные операции сложения и умножения:

$+$	0	1	-1	θ
0	0	1	-1	θ
1	1	1	θ	θ
-1	-1	θ	-1	θ
θ	θ	θ	θ	θ

$\cdot$	0	1	-1	θ
0	0	0	0	0
1	0	1	-1	θ
-1	0	-1	1	θ
θ	0	θ	θ	θ

Непосредственно проверяется

Предложение 1. *Система $\mathcal{S}$ есть коммутативное полукольцо с единицей, без делителей нуля. Оно также обладает свойством: $a + b = 0 \Rightarrow a = b = 0$.*

Множество $M_n(\mathcal{S})$ матриц над $\mathcal{S}$ образует моноид относительно обычного матричного умножения, содержащий булевы матрицы в качестве подмоноида. Элементы $\mathcal{S}$ будем называть знаками, матрицы из $M_n(\mathcal{S})$ – знаковыми матрицами. Следующее утверждение является аналогом равенства (2) в более общем случае произвольной вещественной матрицы A.

Предложение 2. *Если (i, j)-элемент матрицы $(\mathrm{Sg}(A))^k$ определен ($\neq \theta$), то он равен (i, j)-элементу матрицы $\mathrm{Sg}(A^k)$.*

Мы опускаем элементарное доказательство этого утверждения.

Как следует из Предложения 2, матрица $(\mathrm{Sg}(A))^k$ в том и только том случае не содержит никакой информации о знаковом портрете A^k, когда все элементы $(\mathrm{Sg}(A))^k$ равны θ. То есть, реализуется ситуация, противоположная той, что в случае неотрицательных матриц выражена равенством (2). Если для вещественной матрицы A существует показатель k, для которого $(\mathrm{Sg}(A))^k = \|\theta\|$, то наименьший из таких показателей обозначим $\theta(A)$. Если такого k не существует, то положим $\theta(A) = \infty$.

Основной результат работы – Теорема 5 – указывает для $\theta(A)$ точную оценку сверху, зависящую лишь от порядка матрицы.

В вещественной матрице могут быть известны не все элементы. Тогда в ее знаковом портрете этим элементам естественно сопоставить символ θ. Имея ввиду это замечание, можно считать, что любая знаковая матрица $S \in M_n(\mathcal{S})$ является знаковым портретом вещественной матрицы.

Поскольку параметр $\theta(A)$ зависит лишь от знакового портрета, то мы будем относить его к матрицам из $M_n(\mathcal{S})$. Соответственно, в основном тексте рассуждения проводятся применительно к знаковым матрицам.

Пусть $S \in M_n(\mathcal{S})$. Напомним полезное понятие графа матрицы [1, 2]. Графом матрицы $S = \|s_{ij}\|$ называется ориентированный граф с множеством вершин $\{1, 2, \ldots, n\}$, в котором дуга из вершины i в вершину j ведет тогда и только тогда, когда $s_{ij} \neq 0$. Знаком пути $i_1 \to i_2 \to \cdots \to i_k$ называется произведение знаков $s_{i_1 i_2} s_{i_2 i_3} \ldots s_{i_{k-1} i_k}$. Удобно считать, что путь длины 0 из i в j при $i \neq j$ не существует, а при $i = j$ существует и является положительным. Традиционно полагаем также, что S^0 – единичная матрица. Индукцией по k доказывается следующее

Предложение 3. *Элемент $s_{ij}^{(k)}$ матрицы S^k равен сумме знаков путей длины k в графе матрицы S, ведущих из вершины i в вершину j. В частности, $s_{ij}^{(k)} = 0$ в том и только том случае, когда таких путей нет.*

Примитивные знаковые матрицы

По аналогии с известным понятием неотрицательной примитивной матрицы назовем матрицу $S \in M_n(\mathcal{S})$ примитивной, если некоторая ее степень не содержит нулей. Справедлива следующая

Теорема 1 [2]. *Пусть матрица $S \in M_n(\mathcal{S})$ примитивна и q – наименьшая из длин простых контуров в графе матрицы S. Тогда матрица $S^{n+q(n-2)}$ не содержит нулей.*

Следующая теорема принадлежит Виландту [1–3].

Теорема 2. *Если матрица $S \in M_n(\mathcal{S})$ примитивна, то матрица S^{n^2-2n+2} не содержит нулей. Показатель $n^2 - 2n + 2$ нельзя уменьшить: примитивная матрица*

$$W = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}$$

в степени n^2-2n+1 еще содержит нуль.

Заметим, что доказательства Теорем 1 и 2 проводятся в указанных выше источниках для неотрицательных матриц, но они используют лишь те свойства полукольца неотрицательных чисел, которыми обладает и $\mathcal{S}$ (см. Предложение 1).

Докажем следующее уточнение Теоремы 2:

Теорема 3. *Для матрицы $S \in M_n(\mathcal{S})$ число n^2-2n+2 есть наименьшее значение k такое, что S^k не содержит нулей, в том и только том случае, когда графы матриц S и W изоморфны.*

Доказательство. Достаточность немедленно вытекает из Теоремы 2. Докажем необходимость. Пусть q – наименьшая из длин простых контуров в графе матрицы S. Очевидно, матрица S примитивна, а значит $0 < q \leqslant n-1$. Если $q \leqslant n-2$, то $n > 3$ и в силу Теоремы 1 $k \leqslant n + q(n-2) \leqslant n^2-3n+4 = n^2-2n+2-(n-2) < n^2-2n+2$, что противоречит выбору k.

Остается случай $q = n-1$. С точностью до изоморфизма существуют всего три графа с данным свойством: граф G, соответствующий матрице W, граф G$'$, получающийся из G добавлением дуги $1 \to 3$ (или $1 \to 1$, если $n = 2$), и граф G$''$, получающийся из G$'$ удалением дуги $1 \to 2$. Матрицы с графом G$''$ можно сразу исключить из рассмотрения, поскольку они не примитивны. Остаются матрицы с графами G и G$'$. G$'$ состоит из трех простых контуров $1 \to 2 \to \cdots \to n \to 1$, $n \to 2 \to \cdots \to n$ и $1 \to 3 \to \cdots \to n \to 1$ (или петли $1 \to 1$, если $n = 2$), обозначаемых в дальнейшем для краткости C_n, C_{n-1} и C'_{n-1}; G состоит из контуров C_n и C_{n-1}.

Лемма 1. *Пусть $S \in M_n(\mathcal{S})$ – матрица с графом G$'$. Тогда матрица S^{n^2-2n+1} не содержит нулей.*

Доказательство. Фиксируем в графе G$'$ произвольным образом вершины i и j. Для доказательства леммы достаточно установить существование пути из i в j длины n^2-2n+1. Пусть m – длина кратчайшего пути x из i в j. Очевидно, $0 \leqslant m \leqslant n-1$. Каждая вершина графа G$'$ входит в контур C_{n-1} или C'_{n-1}, поэтому при $m = 0$ (то есть при $i = j$) искомым путем является путь, состоящий из $n-1$ контуров C_{n-1} или, соответственно, C'_{n-1}. При $m > 0$ в качестве искомого пути можно взять путь, состоящий из

$n-m-1$ контуров C_n, $m-1$ контуров C_{n-1} или C'_{n-1} (в зависимости от того, в какой из них входит вешина i) и пути x.

Таким образом, если граф матрицы S изоморфен G′, то в силу доказанной леммы $k \leqslant n^2-2n+1 < n^2-2n+2$, что снова противоречит выбору k. Следовательно, условию $k = n^2-2n+2$ удовлетворяют лишь матрицы, графы которых изоморфны графу G матрицы W.

Лемма 2. *Если k-я степень примитивной матрицы $S \in M_n(\mathcal{S})$ содержит элемент θ, то θ содержится в каждой строке матрицы S^{k+n-1}.*

Доказательство. Пусть $s_{pq}^{(k)} = \theta$. Фиксируем i произвольным образом. Поскольку граф матрицы S сильно связен, в нем существует путь из вершины i в вершину p длины $l \leqslant n-1$ и путь длины $n-1-l$ из вершины q в некоторую вершину j, тем самым, в силу Предложения 3 $s_{ip}^{(l)} \neq 0$ и $s_{qj}^{(n-1-l)} \neq 0$. Но тогда $s_{ip}^{(l)} s_{pq}^{(k)} s_{qj}^{(n-1-l)} = \theta$, откуда $s_{ij}^{(k+n-1)} = \theta$, что с учетом произвольности выбора i завершает доказательство леммы.

Нам потребуется следующий результат Маржика–Птака [4, 5]. Пусть $A = \|a_{ij}\|$ – комплексная матрица порядка n и $\nu(A) = \max\limits_i \sum\limits_j |a_{ij}|$ – известная матричная норма.

Теорема 4. *Пусть $\nu(A) = 1$ и существует показатель k, для которого $\nu(A^k) < 1$. Тогда $\nu(A^{n^2-n+1}) < 1$. В этом утверждении оценку n^2-n+1 нельзя уменьшить: матрица*

$$V = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -1/2 & -1/2 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

такова, что $\nu(V^{n^2-n}) = 1$, но $\nu(V^{n^2-n+1}) < 1$.

Лемма 3. *Если некоторая степень матрицы $S \in M_n(\mathcal{S})$ обладает тем свойством, что в каждой ее строке присутствует элемент θ, то указанным свойством обладает матрица S^{n^2-n+1}.*

Доказательство. Если матрица S содержит θ, то по Лемме 2 каждая строка S^n содержит θ и наше утверждение верно. Теперь пусть S не содержит θ. В силу условия леммы в матрице S нет нулевых строк. Два последних свойства гарантируют существование такой вещественной матрицы A, что $\mathrm{Sg}(A) = S$ и притом $\sum\limits_j |a_{ij}| = 1$, $i = 1, \ldots, n$. Если мы докажем, что при любом k

$$\nu(A^k) < 1 \Leftrightarrow S^k \text{ содержит } \theta \text{ в каждой строке,} \tag{3}$$

то ввиду Теоремы 4 лемма будет доказана. На самом деле докажем несколько более сильное утверждение:

$$\text{для любого } k \quad r_i^{(k)} < 1 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow i\text{-я строка } S^k \text{ содержит } \theta, \quad (i = 1, \ldots, n), \tag{4}$$

где $r_i^{(k)} = \sum\limits_j |a_{ij}^{(k)}|$. Проведем индукцию по k. При $k = 1$ утверждение (4) тривиально верно. Допустив, что оно верно для некоторого $k \geqslant 1$, докажем его для $k+1$. Рассмотрим легко проверяемые соотношения

$$r_i^{(k+1)} = \sum_j |a_{ij}^{(k+1)}| = \sum_j \Big| \sum_l a_{il} a_{lj}^{(k)} \Big| \leqslant \sum_j \sum_l |a_{il}| |a_{lj}^{(k)}| = \\ = \sum_l |a_{il}| \sum_j |a_{lj}^{(k)}| = \sum_l |a_{il}| r_l^{(k)} \leqslant 1. \tag{5}$$

Пусть $r_i^{(k+1)} < 1$. Тогда хотя бы одно из неравенств в (5) должно быть строгим. Предположим, что первое неравенство в (5) строгое. Тогда для некоторого номера q

$$|a_{iq}^{(k+1)}| = \Big| \sum_l a_{il} a_{lq}^{(k)} \Big| < \sum_l |a_{il}| |a_{lq}^{(k)}|,$$

что возможно только тогда, когда в левой части есть ненулевые слагаемые $a_{iu} a_{uq}^{(k)}$ и $a_{iv} a_{vq}^{(k)}$ противоположных знаков. Рассмотрим теперь элемент

$$s_{iq}^{(k+1)} = \sum_l s_{il} s_{lq}^{(k)}$$

знаковой матрицы S^{k+1} и слагаемые $s_{iu} s_{uq}^{(k)}$, $s_{iv} s_{vq}^{(k)}$ последней суммы. Если хотя бы один из знаков $s_{uq}^{(k)}$, $s_{vq}^{(k)}$ равен θ, то в сумме оказывается слагаемое θ и тогда $s_{iq}^{(k+1)} = \theta$. Если же оба знака $s_{uq}^{(k)}$,

$s_{vq}^{(k)}$ не равны θ, то согласно Предложению 2 $s_{iu}s_{uq}^{(k)} = \mathrm{sg}(a_{iu}a_{uq}^{(k)})$, $s_{iv}s_{vq}^{(k)} = \mathrm{sg}(a_{iv}a_{vq}^{(k)})$. Но тогда $s_{iu}s_{uq}^{(k)} + s_{iv}s_{vq}^{(k)} = \theta$, следовательно, снова получаем $s_{iq}^{(k+1)} = \theta$.

Пусть второе неравенство в (5) строгое. Это возможно в точности тогда, когда для некоторого m $a_{im} \neq 0$ и $r_m^{(k)} < 1$. Согласно предположению индукции m-ая строка S^k содержит θ. Пусть, например, $s_{mp}^{(k)} = \theta$. Тогда $s_{ip}^{(k+1)} = \sum_l s_{il}s_{lp}^{(k)} = \theta$, поскольку сумма содержит слагаемое $s_{im}s_{mp}^{(k)} = \theta$.

Итак, в каждом из рассмотренных случаев доказали, что i-я строка S^{k+1} содержит θ. Теперь пусть $r_i^{(k+1)} = 1$. Тогда то, что второе из нестрогих неравенств в (5) есть равенство, позволяет заключить, что все элементы вида $s_{il}s_{lj}^{(k)}$ не равны θ. А из того, что первое из них – равенство, следует: ненулевые элементы указанного вида с одинаковым индексом j равны. Таким образом,

$$s_{ij}^{(k+1)} = \sum_l s_{il}s_{lj}^{(k)} \neq \theta, \qquad j = 1, \ldots, n,$$

то есть, i-я строка матрицы S^{k+1} не содержит θ. Эквивалентность (4), а с ней и лемма доказаны.

Теорема 5. *Пусть $S \in M_n(\mathcal{S})$. Если $\theta(S) < \infty$, то $\theta(S) \leqslant 2n^2 - 3n + 2$. При $n > 1$ равенство достигается тогда и только тогда, когда существуют обратимая матрица $D \in M_n(\mathcal{S})$ и элемент $\varepsilon \in \{1, -1\}$ такие, что $S = \varepsilon D \mathrm{Sg}(V) D^{-1}$.*

Доказательство. При $n = 1$ утверждение тривиально, поэтому в дальнейшем считаем, что $n > 1$. Следующая лемма вполне очевидна. (Ниже вместо $(-1)S$ пишем $-S$.)

Лемма 4. *Пусть $S \in M_n(\mathcal{S})$, $k \geqslant 1$. Тогда расположение элементов, равных θ, одинаково для матриц S^k и $(-S)^k$.*

Лемма 5. *Если все простые контуры в графе матрицы $S \in M_n(\mathcal{S})$ положительны, то $\theta(S) = \infty$.*

Доказательство. Положительность простых контуров в графе матрицы S влечет положительность всех контуров. Следовательно, в силу Предложения 3 любой диагональный элемент произвольной степени матрицы S есть либо 0, либо 1, и, значит, $\theta(S) = \infty$.

Пусть $S \in M_n(\mathcal{S})$ и $\theta(S) < \infty$. Очевидно, тогда $S^{\theta(S)} = \|\theta\|$, значит, матрица S примитивна. Пусть q – наименьшая из длин простых контуров в графе матрицы S. Как и в доказательстве Теоремы 3 рассмотрим по отдельности случаи $q \leqslant n-2$ и $q = n-1$.

Если $q \leqslant n-2$, то по Теореме 1 матрица $S^{n+q(n-2)}$ не содержит нулей, причем $n+q(n-2) \leqslant n^2-3n+4$. Согласно лемме 3 в каждой строке матрицы S^{n^2-n+1} присутствует элемент θ. Нетрудно видеть, что если такую матрицу умножить справа на матрицу без нулей, то получается матрица, все элементы которой равны θ, так что $\theta(S) \leqslant n^2-n+1+n^2-3n+4 = 2n^2-3n+2-(n-3) < 2n^2-3n+2$ при $n \geqslant 4$. В силу $0 < q \leqslant n-2$ остается случай $n = 3$ и, соответственно, $q = 1$. Докажем, что тогда найдется $k \leqslant 3$ такое, что S^k содержит θ. Это тривиально, если θ уже присутствует в S. В противном случае, с учетом Леммы 4 можно считать, что имеющаяся в графе у некоторой вершины i петля положительна. По Лемме 5 в графе существует отрицательный простой контур C длины $0 < m \leqslant 3$. Поскольку граф сильно связен, то в нем найдется путь x длины не более $3-m$ из i в некоторую вершину j, участвующую в контуре C. Легко видеть, что пути из i в j, один из которых состоит из m петель и пути x, а другой – из пути x и контура C, имеют одинаковую длину $k \leqslant m+3-m = 3$, и разные знаки, что и означает равенство $s_{ij}^{(k)} = \theta$. Применяя Лемму 2, заключаем, что каждая строка матрицы S^{k+2} содержит θ. По Теореме 1 матрица $S^{3+1(3-2)} = S^4$ не содержит нулей, следовательно, $\theta(S) \leqslant k+2+4 \leqslant 9 < 11 = 2{\cdot}3^2 - 3{\cdot}3 + 2$.

Таким образом, остается случай, когда $q = n-1$, и, значит, (см. доказательство Теоремы 3) граф матрицы S изоморфен графу G, состоящему из простых контуров C_n, C_{n-1}, или графу G$'$, состоящему из простых контуров C_n, C_{n-1} и C'_{n-1}. Обозначим через ε_n, ε_{n-1} и ε'_{n-1} знаки соответствующих контуров.

Лемма 6. *Пусть $S \in M_n(\mathcal{S})$ – матрица с графом G$'$ и $\theta(S) < \infty$. Тогда найдется $m \leqslant n^2-n$ такое, что каждая строка матрицы S^m содержит элемент θ.*

Доказательство. Заметим, что $n \leqslant n^2-n$, поэтому если хотя бы один элемент матрицы S равен θ, то по лемме 2 можно взять $m = n$. Таким образом, остается случай, когда любая дуга графа G$'$ положительна или отрицательна, так что каждый из знаков ε_n, ε_{n-1}, ε'_{n-1} простых контуров есть 1 или -1.

Докажем, что если $\varepsilon_{n-1} \neq \varepsilon'_{n-1}$, то как и выше можно взять $m = n$. Для этого ввиду Предложения 3 достаточно для каждой вершины i найти вершину j, в которую из i ведут пути длины n с разными знаками. Если вершина i входит одновременно и в контур C_{n-1}, и в контур C'_{n-1}, то искомыми путями будут, например, путь, состоящий из n шагов по контуру C_{n-1}, и путь, состоящий из $n-1$ шагов по контуру C'_{n-1} и одного шага по контуру C_{n-1}. Если же вершина i входит только в один контур, например, в C_{n-1}, то она соединена дугой с некоторой вершиной j из контура C'_{n-1}, так что в качестве искомых можно взять путь, состоящий из контура C_{n-1} и дуги $i \to j$, и путь, состоящий из дуги $i \to j$ и контура C'_{n-1}.

Перейдем к случаю $\varepsilon_{n-1} = \varepsilon'_{n-1}$. Если $\varepsilon_{n-1} = \varepsilon'_{n-1} = 1$, то $\varepsilon_n = -1$ (иначе $\theta(S) = \infty$ по Лемме 5), причем n четно (в противном случае все простые контуры в графе матрицы $-S$ будут положительны, что в силу той же Леммы 5 дает $\theta(-S) = \infty$, откуда по Лемме 4 $\theta(S) = \infty$). Нетрудно видеть, что тогда все простые контуры в графе матрицы $-S$ отрицательны. Аналогично доказывается, что при $\varepsilon_{n-1} = \varepsilon'_{n-1} = -1$ и $\varepsilon_n = 1$ число n является нечетным и все простые контуры в графе матрицы $-S$ отрицательны. Таким образом, для завершения доказательства леммы достаточно проверить случай $\varepsilon_{n-1} = \varepsilon'_{n-1} = \varepsilon_n = -1$. Но в таком графе для произвольной вершины i пути из i в i, состоящие из $n-1$ контуров C_n, и соответственно, из n контуров C_{n-1} или C'_{n-1} (в зависимости от того, в какой из них входит вершина i), имеют одинаковую длину $n^2 - n$ и разные знаки: $(-1)^{n-1}$ и $(-1)^n$, так что все диагональные элементы матрицы S^{n^2-n} равны θ.

Согласно Леммам 1 и 6 получаем, что если матрице $S \in M_n(\mathcal{S})$ соответствует граф G$'$ и $\theta(S) < \infty$, то $\theta(S) \leqslant n^2 - 2n + 1 + n^2 - n < 2n^2 - 3n + 2$.

Пусть теперь матрице $S \in M_n(\mathcal{S})$ соответствует граф G и $\theta(S) < \infty$. Рассмотрим сначала случай, когда в матрице S есть элемент θ. Если $n = 2$, то $2n^2 - 3n + 2 = 4$ и матрица S имеет вид $\left(\begin{smallmatrix} 0 & a \\ b & c \end{smallmatrix}\right)$, где элементы a, b, c отличны от 0. Непосредственно проверяется, что если хотя бы один из них равен θ, то $S^3 = \left(\begin{smallmatrix} \theta & \theta \\ \theta & \theta \end{smallmatrix}\right)$, так что $\theta(S) \leqslant 3 < 4$. Если же $n \geqslant 3$, то $n < n^2 - n$, поэтому с учетом Леммы 2 и Теоремы 1 $\theta(S) \leqslant n + n + (n-1)(n-2) < n^2 - n + n^2 - 2n + 2 = 2n^2 - 3n + 2$.

Итак, остается случай, когда все дуги графа G являются положительными или отрицательными. Опираясь на рассуждения, аналогичные тем, что применялись при доказательстве Леммы 6, можно ограничиться рассмотрением случая $\varepsilon_n = \varepsilon_{n-1} = -1$. (Этому условию удовлетворяет, в частности, матрица $\mathrm{Sg}(V)$.) Фиксируем произвольным образом вершины i, j и укажем два пути длины $2n^2-3n+2$, ведущие из i в j и имеющие разные знаки. Ввиду Предложения 3 это и будет означать справедливость равенства $s_{ij}^{(2n^2-3n+2)} = \theta$, что в силу произвольности выбора i и j влечет $\theta(S) \leqslant 2n^2-3n+2$. Пусть m – длина наикратчайшего пути x из i в j $(0 \leqslant m < n)$. Рассмотрим путь из i в j длины $2n^2-3n+2$, состоящий из $n-m$ контуров C_n, $n+m-2$ контуров C_{n-1} и пути x. Его знак $\delta_1 = (-1)^{n-m}(-1)^{n+m-2}\delta = \delta$, где δ – знак пути x. Если $m \geqslant 2$, то в качестве второго пути возьмем путь, состоящий из $2n-m-1$ контуров C_n, $m-2$ контуров C_{n-1} и пути x. Его знак $\delta_2 = (-1)^{2n-m-1}(-1)^{m-2}\delta = (-1)\delta$ отличен от δ_1, что и требовалось. При $m=0$ искомым вторым путем будет путь, состоящий из контура C_n и $2n-2$ контуров C_{n-1}. Наконец, при $m=1$ берем путь, состоящий из $2n-1$ контуров C_{n-1} и дуги x, при $x \neq 1 \to 2$, либо путь, состоящий из дуги $1 \to 2$ и $2n-1$ контуров C_{n-1} при $x = 1 \to 2$.

Покажем теперь, что полученное для не содержащих θ матриц с графом G (в частности, для матрицы $\mathrm{Sg}(V)$) нестрогое неравенство $\theta(S) \leqslant 2n^2-3n+2$ является в действительности равенством. Нужно установить, что не все элементы матрицы S^{2n^2-3n+1} равны θ. А именно, докажем, что $s_{11}^{(2n^2-3n+1)} = 1$. Для этого достаточно убедиться в положительности произвольного пути длины $2n^2-3n+1$ из вершины 1 в вершину 1. Очевидно, что любой такой путь с точностью до порядка прохождения дуг (что не влияет на знак пути) состоит из некоторого количества $m > 0$ контуров C_n и некоторого количества $k \geqslant 0$ контуров C_{n-1}. Его длина $2n^2-3n+1 = (2n-1)(n-1) = mn + k(n-1)$. При $n=2$ получаем $3 = 2m+k$, что с учетом ограничений на m и k возможно только при $m=k=1$, так что знак пути $(-1)(-1)=1$. Если же $n>2$, то в силу взаимной простоты чисел n и $n-1$ выводим $m = m_1(n-1)$ и $m_1 > 0$. Тогда $(2n-1)(n-1) = m_1(n-1)n + k(n-1)$ влечет $2n-1 = m_1 n + k$, что, как и в предыдущем случае, – с учетом ограничений на m_1 и k – возможно только при $m_1 = 1$ (а значит, $m = n-1$) и $k = n-1$, поэтому знак пути равен $(-1)^{n-1}(-1)^{n-1} = 1$.

Легко понять, что для любого $\varepsilon \in \{1,-1\}$ и для любой обратимой матрицы $D \in M_n(\mathcal{S})$ справедливо равенство $\theta(\varepsilon D\mathrm{Sg}(V)D^{-1}) = 2n^2-3n+2$, поскольку $\theta(\mathrm{Sg}(V)) = 2n^2-3n+2$. Обратно, заметим, что доказанное неравенство $\theta(S) \leqslant 2n^2-3n+2$ всякий раз оказывалось строгим за исключением матриц, с точностью до множителя $\varepsilon \in \{1,-1\}$ соответствующих графу G с отрицательными контурами C_n и C_{n-1}. Ясно, что одноименными перестановками строк и столбцов такую матрицу можно привести к виду

$$\tilde{S} = \begin{pmatrix} 0 & s_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & s_{n-1} \\ s_n & s_{n+1} & \dots & 0 \end{pmatrix},$$

где $s_1, \dots, s_{n+1} \in \{1,-1\}$. Справедлива следующая

Лемма 7. *Пусть $S \in M_n(\mathcal{S})$, $C = \mathrm{diag}[c_1, \dots, c_n]$, $c_i \in \{1,-1\}$ $(i = 1, \dots, n)$. Тогда графы матриц S и CSC совпадают, причем знак любого контура для матриц S и CSC одинаков.*

Это утверждение – частный случай Теоремы 3.8 Фидлера–Птака [6].

Продолжим доказательство теоремы. Если $n = 2$, то взяв $C = \mathrm{diag}[-s_2, 1]$, получим $C\tilde{S}C = \left(\begin{smallmatrix} 0 & s_1' \\ -1 & s_3 \end{smallmatrix}\right)$. Заметим, что s_3 – это знак петли C_1, то есть $s_3 = -1$, кроме того, в силу отрицательности контура C_2 и леммы 7 имеем $(-1)s_1' = -1$, так что $C\tilde{S}C = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{smallmatrix}\right) = \mathrm{Sg}(V)$. При $n \geqslant 3$ возьмем $C' = \mathrm{diag}[(-1)s_1, (-1)s_2, 1, \dots, 1]$. Тогда

$$C'\tilde{S}C' = \begin{pmatrix} 0 & s_1' & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & s_{n-1}' \\ -1 & -1 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

С учетом отрицательности контуров C_n, C_{n-1} и леммы 7 выводим $(-1)s_1' \dots s_{n-1}' = -1$ и $(-1)s_2' \dots s_{n-1}' = -1$, откуда $s_2' \dots s_{n-1}' = s_1' = 1$. Пусть $C'' = \mathrm{diag}[1, 1, s_2', s_2's_3', \dots, s_2's_3' \dots s_{n-2}', 1]$. Обозначая через $s_1'', \dots, s_{n-1}''$ соответствующие элементы матрицы $C''C'\tilde{S}C'C''$, получаем: $s_1'' = s_1' = 1$, $s_2'' = s_2's_2' = 1, \dots, s_k'' = s_2' \dots s_{k-1}'s_k's_2' \dots s_k' = 1, \dots, s_{n-1}'' = s_2' \dots s_{n-2}'s_{n-1}' = 1$, тем самым, полагая $C = C''C'$, приходим к $C\tilde{S}C = \mathrm{Sg}(V)$. Итак, если $S \in M_n(\mathcal{S})$ и $\theta(S) = 2n^2 - 3n + 2$, то найдутся элемент $\varepsilon \in \{1, -1\}$ и матрица $D = CU$, где $C = \mathrm{diag}[c_1, \dots, c_n]$, $c_i \in \{1, -1\}$ $(i = 1, \dots, n)$, а U – перестановочная матрица, такие, что $S = \varepsilon D \mathrm{Sg}(V) D^{-1}$.

Неразложимые импримитивные знаковые матрицы

Известно [1–3], что каждая неотрицательная неразложимая импримитивная матрица одноименными перестановками строк и столбцов приводится к блочному виду

$$A = \begin{pmatrix} 0 & A_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & A_{k-1} \\ A_k & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \tag{6}$$

где блоки $A_1, \dots, A_k$ $(1 < k \leqslant n)$ не содержат нулевых строк и столбцов, а нулевые диагональные блоки – квадратные. Кроме того, k-я степень матрицы A является блочно-диагональной матрицей, причем каждый ее диагональный блок – примитивная матрица. Указанные свойства дословно переносятся на знаковые матрицы. Из строения импримитивной матрицы $S \in M_n(\mathcal{S})$ видно, что любая ее степень содержит нули, следовательно, $\theta(S) = \infty$. Но может случиться так, что некоторая степень матрицы S содержит лишь элементы 0 и θ. Наименьшую из таких степеней обозначим $\theta'(S)$, и положим $\theta'(S) = \infty$, если степени с таким свойством нет.

Теорема 6. *Пусть матрица $S \in M_n(\mathcal{S})$ неразложима и импримитивна. Если $\theta'(S) < \infty$, то $\theta'(S) < 2n^2 - 3n + 2$.*

Доказательство. Можно считать, что матрица S уже имеет блочную структуру (6). Тогда каждый диагональный блок матрицы S^k является примитивной матрицей. Пусть m – наименьший из размеров этих блоков. Ввиду Теоремы 5 все элементы по крайней мере одного из диагональных блоков матрицы $(S^k)^{2m^2-3m+2}$ равны θ. Пусть, для определенности, это первый блок. Рассмотрим матрицу $S^{(2m^2-3m+2)k+k-1}$. Предположим, что ее (i,j)-элемент отличен от 0. Тогда в графе существует путь из i в j длины $(2m^2 - 3m + 2)k + k - 1$. В силу строения графа на этом пути через $l \leqslant k - 1$ шагов встретится такая вершина p, что p-я строка пересекает первый блок. Сделав еще

$(2m^2 - 3m + 2)k$ шагов, мы окажемся в некоторой вершине q, причем q-я строка снова пересекает первый блок. Оставшаяся часть пути из q в j имеет длину $k - 1 - l$. Ввиду Предложения 3 $s_{ip}^{(l)} \neq 0$, $s_{qj}^{(k-1-l)} \neq 0$, а $s_{pq}^{((2m^2-3m+2)k)} = \theta$ по предположению. Тогда $s_{ip}^{(l)} s_{pq}^{((2m^2-3m+2)k)} s_{qj}^{(k-1-l)} = \theta$, откуда $s_{ij}^{((2m^2-3m+2)k+k-1)} = \theta$. Таким образом, матрица $S^{(2m^2-3m+2)k+k-1}$ не содержит элементов, отличных от 0 и θ. Отсюда, с учетом неравенства $m \leqslant n/k$ выводим $\theta'(S) \leqslant (2m^2 - 3m + 2)k + k - 1 \leqslant 2n^2/k - 3n + 3k - 1$. Сравним полученную оценку с $2n^2 - 3n + 2$:

$$2n^2 - 3n + 2 - (2n^2/k - 3n + 3k - 1) = (2n^2 - 3k)(k - 1)/k.$$

Легко видеть, что при $n \geqslant 2$ и $1 < k \leqslant n$ данная разность строго положительна, так что $\theta'(S) < 2n^2 - 3n + 2$.

Литература

1. В. Н. Сачков, В. Е. Тараканов, *Комбинаторика неотрицательных матриц.* М.: ТВП, 2000.
2. Р. Хорн, Ч. Джонсон, *Матричный анализ.* М.: Мир, 1989.
3. Ф. Р. Гантмахер, *Теория матриц.* М.: Наука, 1967.
4. J. Mařik, V. Pták, *Norms, spectra and combinatorial properties of matrices.* Czechoslovak Math. J., **10**, No. 2 (1960), 181–196.
5. Г. Р. Белицкий, Ю. И. Любич, *Нормы матриц и их приложения.* Киев: Наукова думка, 1984.
6. M. Fiedler, V. Pták, *Cyclic products and an inequality for determinants.* — Czechoslovak Math. J. **19** (1969), 428–450.

Al'pin Yu. A., Il'in S. N. Powers of sign portraits of real matrices.

The sign portrait S of a real $n \times n$ matrix is a matrix over the semiring with elements 0, 1, -1, and θ, where θ symbolizes indeterminateness. It is proved that if k is the least positive integer such that all the entries of S^k are equal to θ, then $k \leqslant 2n^2 - 3n + 2$, and this bound is sharp.

Казанский государственный университет

Поступило 4 февраля 2002 г.