Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 284, 2002 г.

Х. Д. Икрамов

ДЕТЕРМИНАНТНЫЕ НЕРАВЕНСТВА ДЛЯ АККРЕТИВНО–ДИССИПАТИВНЫХ МАТРИЦ

1. Введение

Пусть $M_n(\mathbf{C})$ – пространство комплексных $n \times n$-матриц. Напомним, что матрица $A \in M_n(\mathbf{C})$ называется аккретивной, если в ее эрмитовом разложении

$$A = B + iC, \quad B = B^*, \quad C = C^* \tag{1}$$

компонента B положительно определена, и диссипативной, если положительно определена матрица C.

Определение. *Матрица $A \in M_n(\mathbf{C})$ называется аккретивно-диссипативной, если в ее эрмитовом разложении (1) положительно определены обе матрицы B и C.*

Множество аккретивно-диссипативных матриц порядка n будем обозначать символом $M_n^{++}(\mathbf{C})$.

Среди детерминантных неравенств для эрмитовых положительно определенных матриц наиболее известным является, пожалуй, неравенство Фишера. Представим матрицу $A \in M_n(\mathbf{C})$ в блочном виде

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}, \tag{2}$$

где A_{11} и A_{22} – блоки соответственно порядка k и l, $k > 0$, $l > 0$, $k + l = n$. Разумеется, для эрмитовой матрицы A справедливо $A_{21} = A_{12}^*$. Неравенство Фишера имеет вид

$$\det A \leqslant \det A_{11} \det A_{22}. \tag{3}$$

Цель настоящей статьи – доказать обобщение неравенства Фишера на класс аккретивно-диссипативных матриц, анонсированное в [1].

Теорема 1. *Пусть k и l – порядки блоков A_{11} и A_{22} в представлении (2), и пусть $m = \min\{k, l\}$. Если $A \in M_n^{++}(\mathbf{C})$, то*

$$|\det A| \leqslant 3^m |\det A_{11}||\det A_{22}|. \tag{4}$$

Для специального подкласса аккретивно-диссипативных матриц, а именно так называемых матриц Бакли (Buckley), можно получить вариант неравенства Фишера, более сильный, чем (4). Матрица $A \in M_n^{++}(\mathbf{C})$ называется *матрицей Бакли*, если в ее представлении (1) $B = I_n$ (единичная матрица порядка n). Множество матриц Бакли порядка n будем обозначать символом B_n.

Теорема 2. *Пусть k и l – порядки блоков A_{11} и A_{22} в представлении (2), и пусть $m = \min\{k, l\}$. Если $A \in B_n$, то*

$$|\det A| \leqslant \left(\frac{1+\sqrt{17}}{4}\right)^m |\det A_{11}||\det A_{22}|. \tag{5}$$

Присутствие экспоненциального по m множителя в оценках (4) и (5) неизбежно, что можно показать путем несложной модификации примера, приведенного в [1]. Заметим вначале, что теоремы 1 и 2 сохраняют силу соответственно для слабо аккретивно-диссипативных матриц и слабых матриц Бакли, к которым приводит замена требования положительной определенности матриц B и C (или только C) более слабым условием положительной полуопределенности.

Для слабой матрицы Бакли

$$A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \tag{6}$$

отношение

$$\frac{|\det A_2|}{|a_{11}||a_{22}|},$$

как легко проверить, равно $\sqrt{5/2}$. Рассмотрим кронекерово произведение матрицы A_2 и единичной матрицы I_p:

$$A = A_2 \otimes I_p.$$

Легко проверить, что для разбиения этой матрицы на блоки порядка p справедливо

$$|\det A| \leqslant \left(\sqrt{5/2}\right)^p |\det A_{11}||\det A_{22}|.$$

После того как в разделе 2 будут установлены необходимые подготовительные результаты, мы докажем вначале (более простую) теорему 2 (раздел 3), а затем теорему 1 (раздел 4).

2. Подготовительные результаты

Важную роль в дальнейшем играет отношение частичного порядка на множестве эрмитовых матриц, связанное с именем Левнера. Мы пишем $B > C$, если матрица $B - C$ положительно определена, и $B \geqslant C$, если $B - C$ положительно полуопределена. В частности, неравенства

$$B > 0 \qquad \text{и} \qquad C < 0$$

означают, что матрица B определена положительно, а C – отрицательно.

Пусть $A \in M_n^{++}(\mathbf{C})$. Нетрудно видеть, что матрица A невырождена. Представим A^{-1} в виде

$$A^{-1} = E + iF, \quad E = E^*, \quad F = F^*. \tag{7}$$

Замечательно, что E и F могут быть выписаны явно через компоненты B и C эрмитова разложения (1) самой матрицы A[2, 3].

Лемма 1. *Пусть матрица $A \in M_n^{++}(\mathbf{C})$ представлена эрмитовым разложением (1), а матрица A^{-1} – разложением (7). Тогда*

$$E = (B + CB^{-1}C)^{-1}, \tag{8}$$

$$F = -(C + BC^{-1}B)^{-1}. \tag{9}$$

Таким образом, матрица E определена положительно, а F – отрицательно, т.е. $A^{-1} \in M_n^{+-}(\mathbf{C})$, где матричный класс $M_n^{+-}(\mathbf{C})$ определяется по аналогии с $M_n^{++}(\mathbf{C})$.

В случае матриц Бакли формулы (8) и (9) существенно упрощаются.

Лемма 2. *Пусть $A = I_n + iC$ есть матрица Бакли. Тогда для матриц E и F эрмитова разложения (7) имеем*

$$E = (I_n + C^2)^{-1}, \tag{10}$$

$$F = -(C + C^{-1})^{-1} = -C(I_n + C^2)^{-1}. \tag{11}$$

Итак, в случае $A \in B_n$ матрицы E и F, будучи многочленами от одной и той же матрицы C, коммутируют. Этого и следовало ожидать, учитывая, что всякая матрица Бакли нормальна; нормальна поэтому и обратная матрица A^{-1}.

Следующее предложение хорошо известно (см., например, п. 7.7.4 в [4]).

Лемма 3. *Для эрмитовых положительно определенных матриц H_1 и H_2 неравенства $H_1 \geqslant H_2$ и $H_2^{-1} \geqslant H_1^{-1}$ равносильны.*

Еще одно утверждение, связанное с левнеровским порядком, установлено в [3]. Для удобства читателя мы приведем здесь не только формулировку этого утверждения, но и его доказательство.

Лемма 4. *Пусть B и C – эрмитовы $n \times n$-матрицы, причем $B > 0$. Тогда*

$$B + CB^{-1}C \geqslant 2C. \tag{12}$$

Доказательство. Пусть D – эрмитов положительно определенный квадратный корень из матрицы B. Тогда

$$B + CB^{-1}C - 2C =$$
$$(D - CD^{-1})(D - D^{-1}C) = (D - CD^{-1})(D - CD^{-1})^* \geqslant 0.$$

Лемма 5. *Пусть $A_1, A_2 \in M_n^{++}(\mathbf{C})$ и*

$$A_1 = B_1 + iC_1, \qquad A_2 = B_2 + iC_2 \tag{13}$$

суть эрмитовы разложения этих матриц. Если

$$B_1 \leqslant B_2, \qquad C_1 \leqslant C_2, \tag{14}$$

то

$$|\det A_1| \leqslant |\det A_2|. \tag{15}$$

Доказательство. Положим

$$A_3 = B_1 + iC_2 \tag{16}$$

и покажем, что

$$|\det A_1| \leqslant |\det A_3| \tag{17}$$

и

$$|\det A_3| \leqslant |\det A_2|, \tag{18}$$

откуда будет следовать (15). Неравенства (17) и (18) доказываются однотипным образом; для определенности, докажем (17).

Пусть D_1 – эрмитов положительно определенный квадратный корень из матрицы B_1. Полагая

$$E_1 = D_1^{-1} C_1 D_1^{-1}, \qquad E_2 = D_1^{-1} C_2 D_1^{-1} \tag{19}$$

можем написать

$$A_1 = D_1(I_n + i D_1^{-1} C_1 D_1^{-1}) D_1 = D_1(I_n + iE_1) D_1,$$

$$A_3 = D_1(I_n + iE_2) D_1.$$

Отсюда

$$\det A_1 = \det D_1^2 \det(I_n + iE_1) = \det B_1 \det(I_n + iE_1),$$

$$\det A_3 = \det B_1 \det(I_n + iE_2).$$

Тем самым неравенство (17) эквивалентно неравенству

$$|\det(I_n + iE_1)| \leqslant |\det(I_n + iE_2)|.$$

Последнее неравенство справедливо в силу следующих причин: во-первых, из $0 \leqslant C_1 \leqslant C_2$ вытекает (см. (19)), что $0 \leqslant E_1 \leqslant E_2$; во-вторых, если $\alpha_1 \geqslant \alpha_2 \geqslant \cdots \geqslant \alpha_n$ и $\beta_1 \geqslant \beta_2 \geqslant \cdots \geqslant \beta_n$ – собственные значения соответственно матриц E_1 и E_2, то

$$0 \leqslant \alpha_i \leqslant \beta_i, \qquad i = 1, 2, \ldots, n;$$

наконец, в-третьих,

$$|\det(I_n + iE_1)| = \prod_{k=1}^{n} |(1 + i\alpha_k)| = \prod_{k=1}^{n} (1 + \alpha_k^2)^{1/2},$$

$$|\det(I_n + iE_2)| = \prod_{k=1}^{n} (1 + \beta_k^2)^{1/2}.$$

Это доказывает неравенство (17) и, вместе с тем, лемму 5.

Лемма 6. *Пусть B и C – эрмитовы положительно определенные матрицы порядка n. Тогда*

$$\det(B+C) \leqslant (\sqrt{2})^n |\det(B+iC)|, \tag{20}$$

причем оценка (20) *достижима.*

Доказательство. Воспользуемся тем же приемом, что и в доказательстве предыдущей леммы. Пусть D – эрмитов положительно определенный квадратный корень из матрицы B. Полагая

$$E = D^{-1}CD^{-1},$$

имеем

$$B + C = D(I_n + E)D,$$

$$B + iC = D(I_n + iE)D.$$

Таким образом, неравенство (20) равносильно неравенству

$$\det(I_n + E) \leqslant (\sqrt{2})^n |\det(I_n + iE)|. \tag{21}$$

Пусть $\gamma_1 \geqslant \gamma_2 \geqslant \cdots \geqslant \gamma_n$ – собственные значения матрицы E. Тогда

$$\det(I_n + E) = \prod_{k=1}^{n}(1+\gamma_k),$$

$$|\det(I_n + iE)| = \prod_{k=1}^{n}(1+\gamma_k^2)^{1/2}.$$

Соотношение (21) вытекает теперь из элементарного неравенства

$$1 + \lambda \leqslant \sqrt{2}\sqrt{1+\lambda^2}.$$

Оценка (20) достигается, например, при $B = C = I_n$. Действительно,

$$\det(B+C) = \det(2I_n) = 2^n,$$

$$|\det(B+iC)| = |\det((1+i)I_n)| = (\sqrt{2})^n.$$

В разделе 4 нам потребуется одно из матричных обобщений скалярного неравенства

$$2|xy| \leqslant |x|^2 + |y|^2.$$

Лемма 7. *Пусть* Z_1 *и* Z_2 *– матрицы размера* $k \times l$ *и*

$$H = Z_1^* Z_2 + Z_2^* Z_1. \tag{22}$$

Тогда

$$H \leqslant Z_1^* Z_1 + Z_2^* Z_2. \tag{23}$$

Доказательство. Пусть x – произвольный вектор из $\mathbf{C}^l$. Тогда

$$(Hx, x) = 2\Re(Z_1 x, Z_2 x) \leqslant 2|Z_1 x||Z_2 x| \leqslant$$

$$|Z_1 x|^2 + |Z_2 x|^2 = (Z_1^* Z_1 x, x) + (Z_2^* Z_2 x, x).$$

Отсюда, ввиду произвольности x, получаем (23).

Пусть в матрице A с блочным представлением (2) блок A_{11} невырожден. Тогда, как известно (см., например, [4, п. 0.8.5]),

$$\det A = \det A_{11} \det A/A_{11}, \tag{24}$$

где

$$A/A_{11} = A_{22} - A_{21} A_{11}^{-1} A_{12} \tag{25}$$

есть дополнение Шура подматрицы A_{11}. Если A – эрмитова положительно определенная матрица, то эти же свойства имеет A/A_{11}. В силу (24), доказательства теорем 1 и 2 сводятся к проверке неравенств

$$|\det A/A_{11}| \leqslant 3^l |\det A_{22}|, \tag{26}$$

если $A \in M_n^{++}(\mathbf{C})$, и

$$|\det A/A_{11}| \leqslant \left(\frac{1+\sqrt{17}}{4}\right)^l |\det A_{22}| \tag{27}$$

для $A \in B_n$.

3. Доказательство теоремы 2

Отправляясь от заключительного замечания предыдущего раздела, докажем неравенство (27). Введем блочное разбиение матрицы C в (1), аналогичное разбиению (2):

$$C = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{12}^* & C_{22} \end{pmatrix}. \tag{28}$$

Тогда

$$A/A_{11} = A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12} =$$

$$I_l + iC_{22} + C_{12}^*(I_k + iC_{11})^{-1}C_{12}.$$

Полагая

$$(I_k + iC_{11})^{-1} = E_k + iF_k, \quad E_k = E_k^*, \quad F_k = F_k^*,$$

выпишем эрмитово разложение матрицы A/A_{11}. Если

$$A/A_{11} = R + iS, \quad R = R^*, \quad S = S^*, \tag{29}$$

то

$$R = I_l + C_{12}^*E_kC_{12}, \tag{30}$$

$$S = C_{22} + C_{12}^*F_kC_{12}. \tag{31}$$

Согласно (11), матрица F_k отрицательно определена. Поэтому

$$S \leqslant C_{22}. \tag{32}$$

Используя (12), находим

$$I_k + C_{11}^2 \geqslant 2C_{11},$$

откуда (см. (10))

$$E_k = (I_k + C_{11}^2)^{-1} \leqslant \frac{1}{2}C_{11}^{-1}$$

(лемма 3) и

$$C_{12}^*E_kC_{12} \leqslant \frac{1}{2}C_{12}^*C_{11}^{-1}C_{12}.$$

Поскольку матрица (28) положительно определена, то положительно определено дополнение Шура C/C_{11}, что равносильно неравенству

$$C_{12}^*C_{11}^{-1}C_{12} < C_{22}.$$

Окончательно имеем

$$R < I_l + \frac{1}{2}C_{22}. \tag{33}$$

По лемме 5,

$$|\det A/A_{11}| < |\det W|, \tag{34}$$

где W – матрица с эрмитовым разложением (см. (32) и (33))

$$W = (I_l + \frac{1}{2}C_{22}) + iC_{22}.$$

Определитель матрицы W может быть выражен через собственные значения $\gamma_1 \geqslant \gamma_2 \geqslant \cdots \geqslant \gamma_l$ матрицы C_{22} следующим образом:

$$|\det W| = \prod_{j=1}^{l} |(1 + \frac{1}{2}\gamma_j) + i\gamma_j| =$$

$$\prod_{j=1}^{l}[(1 + \frac{1}{2}\gamma_j)^2 + \gamma_j^2]^{1/2}. \tag{35}$$

В то же время,

$$|\det A_{22}| = |\det(I_l + iC_{22})| = \prod_{j=1}^{l}(1 + \gamma_j^2)^{1/2}. \tag{36}$$

Нетрудно проверить, что

$$\max_{x \geqslant 0} \frac{(1 + \frac{x}{2})^2 + x^2}{1 + x^2} = \frac{9 + \sqrt{17}}{8} = \left(\frac{1 + \sqrt{17}}{4}\right)^2. \tag{37}$$

Теперь требуемая оценка (27) получается из сопоставления соотношений (34)–(37).

4. Доказательство теоремы 1

Как отмечено в конце раздела 2, достаточно доказать неравенство (26). Для этого, кроме (28), нам понадобится аналогичное блочное разбиение матрицы B:

$$B = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{12}^* & B_{22} \end{pmatrix}. \tag{38}$$

Имеем

$$A/A_{11} = A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12} =$$

$$B_{22} + iC_{22} - (B_{12}^* + iC_{12}^*)(B_{11} + iC_{11})^{-1}(B_{12} + iC_{12}).$$

Полагая

$$(B_{11} + iC_{11})^{-1} = E_k + iF_k, \quad E_k = E_k^*, \quad F_k = F_k^*,$$

выпишем эрмитово разложение (29) матрицы A/A_{11}; в нем

$$R = B_{22} - B_{12}^* E_k B_{12} + C_{12}^* E_k C_{12} + B_{12}^* F_k C_{12} + C_{12}^* F_k B_{12}, \qquad (39)$$

$$S = C_{22} - B_{12}^* F_k B_{12} + C_{12}^* F_k C_{12} - C_{12}^* E_k B_{12} - B_{12}^* E_k C_{12}. \qquad (40)$$

Согласно (8) и (9), матрица E_k определена положительно, а матрица F_k – отрицательно. Опуская отрицательно (полу)определенные слагаемые – $C_{12}^* F_k C_{12}$ в (40) и $-B_{12}^* E_k B_{12}$ в (39), мы только увеличим (в левнеровском смысле) соответствующие матрицы.

Используя (12) и лемму 3, находим

$$E_k = (B_{11} + C_{11} B_{11}^{-1} C_{11})^{-1} \leqslant \frac{1}{2} C_{11}^{-1} \qquad (41)$$

и

$$-F_k = (C_{11} + B_{11} C_{11}^{-1} B_{11})^{-1} \leqslant \frac{1}{2} B_{11}^{-1}. \qquad (42)$$

Как и в разделе 3, выводим из (41) неравенство

$$C_{12}^* E_k C_{12} < \frac{1}{2} C_{22}. \qquad (43)$$

Аналогичным образом, используя положительную определенность матрицы B, показываем, что

$$-B_{12}^* F_k B_{12} < \frac{1}{2} B_{22}. \qquad (44)$$

Для оценки двух последних слагаемых в правой части равенства (39) применим лемму 7, положив в ней

$$Z_1 = GB_{12}, \qquad Z_2 = GC_{12},$$

где G – эрмитов положительно определенный квадратный корень из матрицы $-F_k$. Имеем

$$B_{12}^* F_k C_{12} + C_{12}^* F_k B_{12} \leqslant -B_{12}^* F_k B_{12} - C_{12}^* F_k C_{12}. \qquad (45)$$

Пользуясь той же леммой при

$$Z_1 = DB_{12}, \qquad Z_2 = DC_{12},$$

где D – эрмитов положительно определенный квадратный корень из E_k, оценим сумму двух последних слагаемых в правой части равенства (40):

$$-C_{12}^* E_k B_{12} - B_{12}^* E_k C_{12} \leqslant B_{12}^* E_k B_{12} + C_{12}^* E_k C_{12}. \qquad (46)$$

Возвращаясь к (41), из очевидного неравенства

$$B_{11} + C_{11}B_{11}^{-1}C_{11} > B_{11}$$

выводим оценки

$$E_k < B_{11}^{-1}$$

(лемма 3) и

$$B_{12}^* E_k B_{12} \leqslant B_{12}^* B_{11}^{-1} B_{12} < B_{22}.$$

Учитывая (43), можно оценить матрицу в правой части соотношения (46) суммой

$$B_{22} + \frac{1}{2}C_{22}. \tag{47}$$

Аналогичным образом из (42) выводятся оценки

$$-F_k < C_{11}^{-1}$$

и

$$-C_{12}^* F_k C_{12} \leqslant C_{12}^* C_{11}^{-1} C_{12} < C_{22}.$$

Вместе с (44), это дает оценку

$$\frac{1}{2}B_{22} + C_{22} \tag{48}$$

для матрицы в правой части соотношения (45).

Из проведенных рассуждений вытекает такой итог: обе матрицы R и S (см. (39) и (40)) оцениваются в смысле левнеровского порядка одной и той же матрицей

$$W = \frac{3}{2}(B_{22} + C_{22}).$$

По лемме 5,

$$|\det A/A_{11}| \leqslant |\det(W + iW)| = |1 + i|^l \det W = \\ (\sqrt{2})^l (3/2)^l \det(B_{22} + C_{22}). \tag{49}$$

С другой стороны, по лемме 6,

$$\det(B_{22} + C_{22}) \leqslant (\sqrt{2})^l |\det(B_{22} + iC_{22})| = \\ (\sqrt{2})^l |\det A_{22}|. \tag{50}$$

Сопоставление (49) и (50) приводит к требуемому неравенству (26).

Литература

1. Х. Д. Икрамов, В. Н. Чугунов, *Неравенства типа Фишера и Адамара для аккретивно-диссипативных матриц.* — Докл. РАН (to appear).
2. R. Mathias, *Matrices with positive definite Hermitian part: Inequalities and linear systems.* — SIAM J. Matrix Anal. Appl. **13** (1992), 640–654.
3. A. George, Kh. D. Ikramov, A. B. Kucherov, *On the growth factor in Gaussian elimination for generalized Higham matrices.* — Numer. Linear Algebra Appl. **9** (2002), 107–114.
4. Р. Хорн, Ч. Джонсон, *Матричный анализ.* М.: Мир (1989).
5. Kh. D. Ikramov, A. B. Kucherov, *Bounding the growth factor in Gaussian elimination for Buckley's class of complex symmetric matrices.* — Numer. Linear Algebra Appl. **7** (2000), 269–274.

Ikramov Kh. D. Determinantal inequalities for accretive-dissipative matrices.

A matrix $A \in M_n(\mathbf{C})$ is said to be *accretive-dissipative* if in its Hermitian decomposition

$$A = B + iC, \quad B = B^*, \quad C = C^*,$$

both matrices B and C are positive definite. Further, if $B = I_n$, then A is called a Buckley matrix. The following extension of the classical Fischer inequality for Hermitian positive-definite matrices is proved.

Let $A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$ be an accretive-dissipative matrix, k and l be the orders of A_{11} and A_{22}, respectively, and let $m = \min\{k, l\}$. Then

$$|\det A| \leqslant 3^m |\det A_{11}| |\det A_{22}|.$$

For Buckley matrices, the stronger bound

$$|\det A| \leqslant \left(\frac{1+\sqrt{17}}{4}\right)^m |\det A_{11}| |\det A_{22}|$$

is obtained.

Московский
государственный университет

Поступило 14 февраля 2002 г.