Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 284, 2002 г.

Л. Ю. Колотилина

О ТЕОРЕМЕ БРУАЛЬДИ

§1. Введение

В работе [3] Р. Бруальди доказал следующий важный результат.

Теорема 1.1 [3]. *Пусть для неприводимой матрицы $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $n \geqslant 2$, выполнены неравенства*

$$\prod_{i\in\overline{\gamma}} |a_{ii}| \geqslant \prod_{i\in\overline{\gamma}} R_i(A), \quad \gamma \in \mathfrak{C}(A), \tag{1.1}$$

причем хотя бы одно из них строгое. Тогда матрица A невырождена.

Здесь и далее используются следующие обозначения:

$$R_i(A) = \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} |a_{ij}|, \quad i = 1, \dots, n;$$

$\mathfrak{C}(A)$ – это множество контуров длины $k \geqslant 2$ в ориентированном графе $D(A)$ матрицы A. Напомним, что контур в $D(A)$ – это упорядоченная последовательность вершин $i_1, \dots, i_k$, $i_{k+1} = i_1$, $k \geqslant 1$, в которой все $i_1, \dots, i_k$ различны, и (i_j, i_{j+1}), $j = 1, \dots, k$, – дуги $D(A)$. Если $\gamma \in \mathfrak{C}(A)$, то через $\overline{\gamma}$ мы обозначаем носитель γ, т.е. множество $\{i_1, \dots, i_k\}$.

Теорема Бруальди является обобщением следующих классических результатов теории матриц.

Теорема 1.2 (теорема Леви–Деппланка). *Если матрица $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $n \geqslant 2$, обладает строгим диагональным преобладанием (по строкам), т.е.*

$$|a_{ii}| > R_i(A), \quad i = 1, \dots, n,$$

то A невырождена.

Как хорошо известно, теорема Леви–Деппланка может быть переформулирована в следующем эквивалентном виде.

Теорема 1.3 (теорема Гершгорина). *Собственные значения матрицы* $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $n \geqslant 2$, *лежат в объединении* $G = \bigcup_{i=1}^{n} G_i$ *кругов Гершгорина*

$$G_i = \{z \in \mathbb{C} = |z - a_{ii}| \leqslant R_i(A)\}, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Теорема 1.4 [8]. *Пусть матрица* $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $n \geqslant 2$, *неприводима. Если выполнены неравенства*

$$|a_{ii}| \geqslant R_i(A), \quad i = 1, \ldots, n,$$

и хотя бы одно из них строгое, то матрица A *невырождена.*

Теорема 1.5 [7, 2]. *Если матрица* $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $n \geqslant 2$, *удовлетворяет неравенствам*

$$|a_{ii}|\,|a_{jj}| > R_i(A)\,R_j(A), \quad i \neq j, \quad i, j = 1, \ldots, n,$$

то она невырождена.

Последняя теорема, очевидно, может быть переформулирована в терминах овалов Кассини

$$C_{ij}(A) = \{z \in \mathbb{C}\colon |z - a_{ii}|\,|z - a_{jj}| \leqslant R_i(A)\,R_j(A)\}, \ \ i \neq j, \ \ i, j = 1, \ldots, n,$$

следующим образом.

Теорема 1.6. *Все собственные значения матрицы* $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $n \geqslant 2$, *лежат в области*

$$C(A) = \bigcup_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{n} C_{ij}(A).$$

Заметим, что теорема Таусски (теорема 1.4) связана с шаблоном разреженности матрицы A только через требование неприводимости, тогда как теорема Бруальди учитывает этот шаблон непосредственно.

С другой стороны, следует также отметить, что теоремы 1.1, 1.2, 1.4 и 1.5 все указывают некоторые достаточные условия невырожденности матрицы, но не дают никакой информации об их необходимости.

Проблема вырожденности/невырожденности для неприводимых матриц, удовлетворяющих нестрогим условиям обобщенного диагонального преобладания, была полностью решена в работе [5], в которой установлен следующий результат.

Теорема 1.7 [5]. *Неприводимая матрица* $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $n \geqslant 2$, *удовлетворяющая нестрогим неравенствам*

$$\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} |a_{ij}|v_j \leqslant |a_{ii}|v_i, \quad i = 1,\dots,n, \tag{1.2}$$

где $v = (v_i) \in \mathbb{R}^n$ – *некоторый положительный вектор, вырождена тогда и только тогда, когда все эти неравенства являются равенствами, и существует унитарная диагональная матрица* D, *такая что*

$$D^*(I - D_A^{-1}A)D = |I - D_A^{-1}A|. \tag{1.3}$$

Далее, если A *вырождена, то ее собственное значение* $\lambda = 0$ *имеет геометрическую кратность один, и соответствующее правое собственное подпространство порождается вектором* Dv.

Здесь и далее через D_B мы обозначаем диагональную часть матрицы B, а через $|B|$ – матрицу, составленную из модулей соответствующих элементов B.

Следующая лемма показывает, что вместо того, чтобы устанавливать существование унитарной диагональной матрицы D, для которой справедливо равенство (1.3), можно проверить справедливость конечного набора условий, специфицируемых множеством контуров в орграфе.

Лемма 1.1 [4]. *Пусть матрица* $B = (b_{ij}) \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $n \geqslant 2$, *неприводима. Тогда следующие утверждения равносильны:*

(i) $B = D^*|B|D$, *где* D – *унитарная диагональная матрица;*

(ii) *для любого контура* $\gamma = i_1,\dots,i_k$, $i_{k+1} = i_1$, $k \geqslant 1$, *в орграфе* $D(B)$ *справедливо соотношение*

$$\prod_{j=1}^{k} b_{i_j i_{j+1}} = \left|\prod_{j=1}^{k} b_{i_j i_{j+1}}\right|.$$

Используя лемму 1.1, теорему 1.7 можно переформулировать следующим образом.

Теорема 1.8 [5]. *Неприводимая матрица* $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $n \geqslant 2$, *удовлетворяющая условиям* (1.2), *вырождена тогда и только тогда, когда все неравенства в* (1.2) *являются равенствами, и для* *любого контура* $i_1, \dots, i_k$, $i_{k+1} = i_1$ *длины* $k \geqslant 2$ *в орграфе* $D(A)$ *выполнено соотношение*

$$(-1)^k \prod_{j=1}^{k} a_{i_j i_j}^{-1} a_{i_j i_{j+1}} = \left| \prod_{j=1}^{k} a_{i_j i_j}^{-1} a_{i_j i_{j+1}} \right|.$$

Оставшаяся часть этой работы построена следующим образом. В §2 мы приводим теорему Бруальди к завершению (см. теорему 2.2). Другими словами, мы формулируем конечный набор условий, необходимых и достаточных для вырожденности неприводимой матрицы, удовлетворяющей неравенствам (1.1). Эти условия выводятся на основе характеризации матриц, удовлетворяющих условиям теоремы Бруальди, из которой следует, в частности, что такие матрицы обладают обобщенным диагональным преобладанием. Также мы изучаем нуль-пространство вырожденных матриц Бруальди.

В §3 рассматриваются два приложения полученных в §2 результатов. Во-первых, рассматриваются области локализации собственных значений неприводимой матрицы и устанавливаются условия, необходимые и достаточные для того, чтобы граничная точка их объединения была собственным значением матрицы. Во-вторых, показывается, что обобщенная теорема Островского–Брауэра [6] (см. теорему 3.3) легко может быть доказана с помощью результатов §2.

§2. Основные результаты

Первая теорема этого параграфа дает описание неприводимых матриц, удовлетворяющих условию Бруальди

$$\prod_{i \in \overline{\gamma}} |a_{ii}| \geqslant \prod_{i \in \overline{\gamma}} R_i(A), \quad \gamma \in \mathfrak{C}(A). \tag{2.1}$$

Теорема 2.1. *Неприводимая матрица* $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n \times n}$, $n \geqslant 2$, *удовлетворяет неравенствам* (2.1) *тогда и только тогда, когда существуют* $v_i > 0$, $i = 1, \dots, n$, *такие что*

$$R_i(A) \leqslant |a_{ii}| v_i v_j^{-1} \quad \text{для всех} \quad i \neq j, \quad \text{таких что} \quad a_{ij} \neq 0. \tag{2.2}$$

Далее, все неравенства в (2.1) *являются равенствами тогда и только тогда, когда все неравенства в* (2.2) *являются равенствами.*

Доказательство. Достаточность. Пусть выполнены неравенства (2.2) и пусть $\gamma = i_1, \ldots, i_k$, $i_{k+1} = i_1$, $k \geqslant 2$, – некоторый контур в $D(A)$. Тогда $a_{i_j i_{j+1}} \neq 0$, $j = 1, \ldots, k$, и из (2.2) следует, что

$$R_{i_j}(A) \leqslant |a_{i_j i_j}| v_{i_j} v_{i_{j+1}}^{-1}, \quad j = 1, \ldots, k. \tag{2.3}$$

Переходя к произведению неравенств из (2.3) по $j = 1, \ldots, k$, мы немедленно получаем (2.1).

Кроме того, если все соотношения в (2.2) являются равенствами, то, очевидно, и все неравенства в (2.1) также являются равенствами. Обратно, если хоть одно из неравенств в (2.2) строгое, скажем,

$$R_i(A) < |a_{ii}| v_i v_j^{-1}, \quad i \neq j, \quad a_{ij} \neq 0,$$

то для любого контура $\gamma \in \mathfrak{C}(A)$, содержащего дугу (i, j), соответствующее неравенство в (2.1) будет строгим, а существование таких контуров следует из почти тривиальной леммы 2.1, приводимой ниже. Таким образом, если все условия Бруальди выполняются с равенствами, то все соотношения в (2.2) также являются равенствами, что и доказывает утверждение, касающееся случая равенств.

Необходимость. Предположим, что выполнены условия Бруальди (2.1) и определим положительные числа v_i, $i = 1, \ldots, n$, следующим образом

$$\begin{aligned} &v_1 = 1; \\ &v_i = \min_{1 = i_1, \ldots, i_s = i} \prod_{j=1}^{s-1} |a_{i_j i_j}| / R_{i_j}(A), \quad i = 2, \ldots, n, \end{aligned} \tag{2.4}$$

где минимум берется по всем простым путям в $D(A)$ из 1 в i.

Покажем сперва, что (2.2) справедливо для $i = 1$. Действительно, если $a_{1j} \neq 0$, то дуга $(1, j)$ является простым путем в $D(A)$, так что в силу (2.4)

$$v_j \leqslant |a_{11}| / R_1(A) = |a_{11}| v_1 / R_1(A).$$

Пусть теперь $i > 1$, $j \neq i$, и предположим, что $a_{ij} \neq 0$. Пусть, далее, в соответствии с определением (2.4)

$$v_i = \prod_{l=1}^{s-1} |a_{i_l i_l}| / R_{i_l}(A), \tag{2.5}$$

где $1 = i_1, \ldots, i_s = i$ – некоторый простой путь в $D(A)$. Если $i_l \neq j$, $l = 2, \ldots, s-1$, то $1 = i_1, \ldots, i_s = i$, $i_{s+1} = j$ – простой путь в $D(A)$ из 1 в j, так что ввиду (2.5) и (2.4) мы заключаем, что

$$v_i |a_{ii}|/R_i(A) = \prod_{l=1}^{s} |a_{i_l i_l}|/R_{i_l}(A) \geqslant v_j,$$

что и доказывает (2.2).

Наконец, если $j = i_k$ при некотором k, $2 \leqslant k \leqslant s-1$, то $1 = i_1, \ldots, i_k = j$ – простой путь из 1 в j, тогда как $j = i_k, i_{k-1}, \ldots, i_s = i, i_{s+1} = j$ – контур. Следовательно, в силу (2.4) мы имеем

$$v_j \leqslant \prod_{l=1}^{k-1} |a_{i_l i_l}|/R_{i_l}(A), \tag{2.6}$$

а из (2.1) вытекает, что

$$\prod_{l=k}^{s} |a_{i_l i_l}|/R_{i_l}(A) \geqslant 1. \tag{2.7}$$

Таким образом, учитывая (2.5), (2.6) и (2.7), мы получаем:

$$v_i |a_{ii}|/R_i(A) = \prod_{l=1}^{s} |a_{i_l i_l}|/R_{i_l}(A) \geqslant v_j,$$

что и доказывает (2.2). Теорема 2.1 полностью доказана. □

Лемма 2.1 [6]. *Пусть матрица $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n \times n}$, $n \geqslant 2$, неприводима. Если $a_{ij} \neq 0$ для некоторых $i \neq j$, то существует контур $\gamma \in \mathfrak{C}(A)$, $\gamma = i_1, \ldots, i_k, i_{k+1} = i_1$, такой что $i_1 = i$ и $i_2 = j$.*

Замечание 2.1. Если все неравенства в (2.2) являются равенствами, то, в терминологии [3], вектор $v = \big(v_i\big)_{i=1}^{n}$ есть $D(A)$-вектор, т.е. для любого i, $1 \leqslant i \leqslant n$, из условий $a_{ir} \neq 0$ и $a_{is} \neq 0$ следует, что $v_r = v_s$.

Следующая простая лемма показывает, что матрицы, удовлетворяющие условию (2.2), обладают свойством нестрогого обобщенного диагонального преобладания.

Лемма 2.2. *Пусть матрица $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n \times n}$, $n \geqslant 2$, такая что*

$$R_i(A) > 0, \quad i = 1, \ldots, n,$$

удовлетворяет условиям (2.2) *для некоторых* $v_i > 0$, $i = 1, \dots, n$. *Тогда*

$$\sum_{j \neq i} |a_{ij}| v_j \leqslant |a_{ii}| v_i, \quad i = 1, \dots, n, \tag{2.8}$$

причем все неравенства в (2.8) *являются равенствами тогда и только тогда, когда все неравенства в* (2.2) *являются равенствами.*

Доказательство. Умножая обе части неравенств из (2.2), соответствующих $a_{ij} \neq 0$, $j \neq i$, $j = 1, \dots, n$, на $|a_{ij}|$ и суммируя полученные неравенства по j, мы приходим к соотношениям

$$R_i(A) \sum_{\substack{j \neq i: \\ a_{ij} \neq 0}} |a_{ij}| v_j = R_i(A) \sum_{j \neq i} |a_{ij}| v_j \leqslant |a_{ii}| v_i \sum_{\substack{j \neq i: \\ a_{ij} \neq 0}} |a_{ij}|$$
$$= |a_{ii}| v_i R_i(A), \quad i = 1, \dots, n,$$

из которых следует (2.8), поскольку $R_i(A) > 0$.

Утверждение относительно случая, когда все неравенства являются равенствами, тривиально. □

Из леммы 2.2 и теоремы 2.1 вытекает следующий результат.

Следствие 2.1. *Пусть* $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n \times n}$, $n \geqslant 2$, – *неприводимая матрица, удовлетворяющая условиям Бруальди* (2.1). *Тогда*

(i) A *имеет обобщенное диагональное преобладание, т.е.* A *удовлетворяет* (2.8) *для некоторых* $v_i > 0$, $i = 1, \dots, n$;

(ii) *следующие утверждения равносильны:*

  (a) *все неравенства в* (2.1) *являются равенствами,*

  (b) *все неравенства в* (2.2) *являются равенствами,*

  (c) *все неравенства в* (2.8) *являются равенствами.*

Замечание 2.2. Из следствия 2.1 немедленно вытекает, что если выполнены неравенства (2.1) и хотя бы одно из них является строгим, то выполнены и неравенства (2.8), причем хотя бы одно из них является строгим. Этот факт впервые был отмечен в [1].

Замечание 2.3. Следствие 2.1, в частности, означает, что для неприводимой матрицы A равенства

$$\prod_{i \in \overline{\gamma}} |a_{ii}| = \prod_{i \in \overline{\gamma}} R_i(A), \quad \gamma \in \mathfrak{C}(A),$$

выполняются тогда и только тогда, когда ее матрица сравнения $M(A) = \left(m_{ij}\right)_{i,j=1}^{n}$, где

$$m_{ij} = \begin{cases} |a_{ij}|, & i = j, \\ -|a_{ij}|, & i \neq j, \end{cases}$$

является вырожденной M-матрицей.

Используя теорему 1.7 и замечание 2.1, из следствия 2.1 можно легко получить следующий результат.

Следствие 2.2. *В условиях следствия* 2.1 *матрица A вырождена тогда и только тогда, когда существуют положительный вектор $v = \left(v_i\right)_{i=1}^{n}$, такой что*

$$\sum_{j\neq i} |a_{ij}| v_j = |a_{ii}| v_i, \quad i = 1, \ldots, n,$$

и унитарная диагональная матрица D, такая что

$$D^*\left(I - D_A^{-1}A\right)D = \left|I - D_A^{-1}A\right|.$$

Далее, если A вырождена, то вектор v является $D(A)$-вектором и удовлетворяет равенствам

$$R_i(A) = |a_{ii}| v_i v_j^{-1}, \quad a_{ij} \neq 0, \quad i \neq j; \tag{2.9}$$

собственное значение $\lambda = 0$ имеет геометрическую кратность один, а соответствующее правое собственное подпространство (правое нуль-пространство) порождается вектором Dv.

Замечание 2.4. Неприводимые матрицы, удовлетворяющие условиям Бруальди (2.1), образуют собственный подкласс класса неприводимых матриц с обобщенным диагональным преобладанием. Действительно, рассмотрим неприводимую матрицу

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -4 & -4 \\ -1 & 4 & -2 \\ 0 & -2 & 4 \end{bmatrix}.$$

Равенство

$$A \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

показывает, что A обладает обобщенным диагональным преобладанием. Однако, для контура 1,2,1 мы имеем

$$R_1(A)R_2(A) = 24 > 16 = |a_{11}|\,|a_{22}|,$$

так что условия Бруальди (2.1) для A не выполнены.

Теперь мы готовы представить полную версию теоремы Бруальди, дающую необходимые и достаточные условия вырожденности неприводимой матрицы A, удовлетворяющей неравенствам (2.1). Отметим, что эти условия представляют собой конечный набор равенств, соответствующих контурам из $\mathfrak{C}(A)$, в которые входят диагональные элементы A, суммы $R_i(A)$ и комплексные аналоги знаков её ненулевых внедиагональных элементов.

Теорема 2.2. *Пусть матрица $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $n \geqslant 2$, неприводима и удовлетворяет условиям*

$$\prod_{i\in\overline{\gamma}} |a_{ii}| \geqslant \prod_{i\in\overline{\gamma}} R_i(A), \quad \gamma \in \mathfrak{C}(A).$$

Матрица A вырождена тогда и только тогда, когда для любого контура $\gamma = i_1, \dots, i_k, i_{k+1} = i_1$, $k \geqslant 2$, орграфа $D(A)$ выполнено равенство

$$(-1)^k \prod_{j=1}^{k} \frac{a_{i_j i_{j+1}}}{|a_{i_j i_{j+1}}|} = \prod_{j=1}^{k} \frac{a_{i_j i_j}}{R_{i_j}(A)}. \tag{2.10}$$

Доказательство. По следствию 2.1 существуют $v_i > 0$, $i = 1, \dots, n$, такие что справедливы неравенства (2.8). Применяя теорему 1.8, мы приходим к заключению, что матрица A вырождена тогда и только тогда, когда

$$(-1)^k \prod_{j=1}^{k} a_{i_j i_j}^{-1}\, a_{i_j i_{j+1}} = \prod_{j=1}^{k} |a_{i_j i_j}^{-1}|\, |a_{i_j i_{j+1}}| \tag{2.11}$$

для любого контура $\gamma = i_1, \dots, i_k, i_{k+1} = i_1$, $k \geqslant 2$, орграфа $D(A)$ и

$$\sum_{j\neq i} |a_{ij}| v_j = |a_{ii}| v_i, \quad i = 1, \dots, n.$$

В силу утверждения (ii) следствия 2.1, последние равенства равносильны условиям

$$\prod_{i\in\overline{\gamma}} |a_{ii}| = \prod_{i\in\overline{\gamma}} R_i(A), \quad \gamma \in \mathfrak{C}(A), \tag{2.12}$$

из которых следует, что равенства (2.11) могут также быть записаны в виде (2.10), если A вырождена.

Таким образом, нам остается лишь убедиться, что из (2.10) следуют как (2.11), так и (2.12). Действительно, равенства (2.12) могут быть получены переходом в (2.10) к модулям, а равенства (2.11) очевидно следуют из (2.10) и (2.12). $\square$

Заключительная теорема этого параграфа дает явные выражения для модулей компонент z_i, $i = 1, \ldots, n$, правого собственного вектора z, соответствующего нулевому собственному значению вырожденной неприводимой матрицы A, удовлетворяющей равенствам

$$\prod_{i\in\overline{\gamma}} |a_{ii}| = \prod_{i\in\overline{\gamma}} R_i(A), \quad \gamma \in \mathfrak{C}(A). \tag{2.13}$$

Теорема 2.3. *Пусть вырожденная неприводимая матрица* $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $n \geqslant 2$, *удовлетворяет условиям* (2.13). *Если* $Az = 0$, $z = \left(z_i\right)_{i=1}^{n}$, *то значения* $v_i = |z_i|$, $i = 1, \ldots, n$, *могут быть определены следующим образом:*

$$v_1 = 1, \tag{2.14}$$

$$v_j = \prod_{r=0}^{l(j)-1} \left|a_{i_r i_r}\right| / R_{i_r}(A), \quad j = 2, \ldots, n, \tag{2.15}$$

где $l(j)$ *– это расстояние в* $D(A)$ *между вершинами* 1 *и* j, *а* $1 = i_0, i_1, \ldots, i_{l(j)} = j$ *– некоторый кратчайший путь в* $D(A)$ *из* 1 *в* j.

Доказательство. По следствию 2.2 мы имеем соотношения

$$R_i(A) = |a_{ii}| v_i v_j^{-1}, \quad a_{ij} \neq 0, \quad i \neq j. \tag{2.16}$$

Следовательно, если $a_{ij} \neq 0$, т.е. $l(j) = 1$, то необходимо

$$v_j = |a_{11}| / R_1(A),$$

и все такие компоненты v_j определены однозначно.

Для тех j, для которых $a_{1j} = 0$, мы должны доказать корректность данного выше определения, т.е. мы должны показать, что если $k = l(j) > 1$ и

$$1 = i_0, i_1, \ldots, i_k = j, \quad 1 = j_0, j_1, \ldots, j_k = j$$

– два различных кратчайших пути в $D(A)$ из 1 в j, то

$$\prod_{r=0}^{k-1} |a_{i_r i_r}|/R_{i_r}(A) = \prod_{r=0}^{k-1} |a_{j_r j_r}|/R_{j_r}(A). \tag{2.17}$$

Используя рассуждение по индукции, мы предполагаем, что все компоненты v_i, для которых $l(i) < k$, определены формулами (2.15) однозначно. Тогда из (2.16) следует, что

$$v_j = \frac{|a_{i_{k-1} i_{k-1}}|}{R_{i_{k-1}}(A)}\, v_{i_{k-1}} = \frac{|a_{j_{k-1} j_{k-1}}|}{R_{j_{k-1}}(A)}\, v_{j_{k-1}}, \tag{2.18}$$

и равенство (2.17) вытекает из (2.18) и равенств (2.15) для $v_{i_{k-1}}$ и $v_{j_{k-1}}$, где $l(i_{k-1}) = l(j_{k-1}) = k-1 < k = l(j)$. $\square$

Замечание 2.5. Ясно, что компоненты вектора v можно определить, начиная с произвольной $v_i = 1$, $1 \leqslant i \leqslant n$, а не обязательно с $v_1 = 1$. Кроме того, если некоторая строка матрицы A содержит r ненулевых внедиагональных элементов, то, в силу теоремы 2.3, по крайней мере r компонент вектора v должны совпадать. В частности, если матрица A имеет строку, все внедиагональные элементы которой отличны от нуля, то вектор v имеет не более двух различных компонент.

§3. Приложения

В этом параграфе мы рассматриваем два приложения результатов, полученных в §2.

Рассмотрим сперва описание локализации собственных значений неприводимой матрицы.

В работе [3] Бруальди установил следующие результаты.

Теорема 3.1.* *Пусть $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $n \geqslant 2$, – неприводимая матрица. Тогда*

(i) *каждое собственное значение матрицы A принадлежит области*

$$B(A) = \bigcup_{\gamma \in \mathfrak{C}(A)} B_\gamma(A),$$

*Заметим, что утверждение (i) было доказано в [3] для класса слабо неприводимых матриц, строго содержащего класс неприводимых матриц.

где

$$B_\gamma(A) = \Big\{ z \in \mathbb{C}\colon \prod_{i\in\overline{\gamma}} |z - a_{ii}| \leqslant \prod_{i\in\overline{\gamma}} R_i(A) \Big\}, \quad \gamma \in \mathfrak{C}(A).$$

(ii) *граничная точка области* $B(A)$ *может быть собственным значением матрицы* A *только в том случае, когда она является граничной точкой каждой из областей* $B_\gamma(A)$, $\gamma \in \mathfrak{C}(A)$.

Утверждение (ii) последней теоремы – это необходимое условие для того, чтобы граничная точка области $B(A)$ была бы собственным значением матрицы A. Применяя теорему 2.2 и следствие 2.2 к сдвинутой матрице $A - \lambda I$, мы немедленно получаем соответствующие необходимые и достаточные условия, сформулированные в следующей теореме.

Теорема 3.2. *В условиях теоремы* 3.1 *граничная точка области* $B(A)$ *является собственным значением матрицы* A *тогда и только тогда, когда для каждого контура* $\gamma = i_1, i_2, \ldots, i_k, i_{k+1} = i_1$, $k \geqslant 2$, *орграфа* $D(A)$ *справедливо равенство*

$$(-1)^k \prod_{j=1}^{k} \frac{a_{i_j i_{j+1}}}{|a_{i_j i_{j+1}}|} = \prod_{j=1}^{k} \frac{a_{i_j i_j} - \lambda}{R_{i_j}(A)}.$$

Далее, каждое собственное значение λ *матрицы* A, *являющееся граничной точкой области* $B(A)$, *имеет геометрическую кратность один, а соответствующее правое собственное подпространство порождается вектором* $z = (z_i) \in \mathbb{C}^n$, *удовлетворяющим условиям*

$$|z_j| = |z_i| \frac{|a_{ii} - \lambda|}{R_i(A)}, \quad a_{ij} \neq 0, \quad i \neq j.$$

Второе из рассматриваемых приложений результатов §2 касается обобщения теоремы 1.5 Островского–Брауэра, приведенного ниже.

Теорема 3.3 [6]**.** *Пусть матрица* $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $n \geqslant 2$, *неприводима и удовлетворяет условиям*

$$|a_{ii}|\,|a_{jj}| \geqslant R_i(A)\,R_j(A), \quad \text{если} \quad a_{ij} \neq 0, \quad i \neq j. \tag{3.1}$$

В этом случае матрица A *вырождена тогда и только тогда, когда существует унитарная диагональная матрица* $D \in \mathbb{C}^{n\times n}$, *для которой справедливо соотношение*

$$D^*(I - D_A^{-1}A)D = |I - D_A^{-1}A|, \tag{3.2}$$

и либо

$$|a_{ii}| = R_i(A), \quad i = 1, \dots, n, \tag{3.3}$$

либо множество

$$S = \{i, 1 \leqslant i \leqslant n : |a_{ii}| < R_i(A)\}$$

непусто, и выполнены следующие условия:

(i) *обе главные подматрицы* $A[S]$ *и* $A[\overline{S}]$, *где* $\overline{S} = \{1, 2, \dots, n\} \setminus S$, *матрицы* A *диагональны;*

(ii) *найдется такое число* $\alpha > 1$, *что*

$$R_i(A)/|a_{ii}| = \begin{cases} \alpha, & i \in S; \\ \alpha^{-1}, & i \in \overline{S}. \end{cases} \tag{3.4}$$

Далее, если матрица A *вырождена, то геометрическая кратность ее нулевого собственного значения равна единице, а соответствующее правое собственное подпространство порождается вектором* Dv, *где* $v = (v_i)_{i=1}^n$ *и*

$$v_i = \begin{cases} \alpha, & \text{если} \;\; R_i(A) > |a_{ii}|, \\ 1, & \text{если} \;\; R_i(A) \leqslant |a_{ii}|, \end{cases} \tag{3.5}$$

а D *и* α *те же самые, что и в* (3.2) *и* (3.4) *соответственно.*

Ниже мы приводим новое, более короткое доказательство теоремы 3.3, основанное на использовании результатов предыдущего параграфа.

Доказательство. Если $k \geqslant 2$ и $\gamma = i_1, i_2, \dots, i_k, i_{k+1} = i_1 \in \mathfrak{C}(A)$, то, ввиду (3.1), справедливы неравенства

$$\begin{aligned} &\left|a_{i_1 i_1}\, a_{i_2 i_2}\right| \geqslant R_{i_1}(A)\, R_{i_2}(A), \\ &\left|a_{i_2 i_2}\, a_{i_3 i_3}\right| \geqslant R_{i_2}(A)\, R_{i_3}(A), \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ &\left|a_{i_k i_k}\, a_{i_1 i_1}\right| \geqslant R_{i_k}(A)\, R_{i_1}(A). \end{aligned}$$

Перемножая эти неравенства, мы приходим к неравенству

$$\Big(\prod_{i \in \overline{\gamma}} |a_{ii}|\Big)^2 \geqslant \Big[\prod_{i \in \overline{\gamma}} R_i(A)\Big]^2,$$

которое показывает, что выполняются условия следствий 2.1 и 2.2. Следовательно, матрица A вырождена тогда и только тогда, когда существует унитарная диагональная матрица D, удовлетворяющая (3.2), и

$$\prod_{i\in\overline{\gamma}} |a_{ii}| = \prod_{i\in\overline{\gamma}} R_i(A), \quad \gamma \in \mathfrak{C}(A). \tag{3.6}$$

Далее, нулевое собственное значение A имеет геометрическую кратность один, ему соответствует правый собственный вектор Dv, а вектор v удовлетворяет условиям (2.9).

В силу леммы 2.1, из (3.6) следует, что все неравенства в (3.1) являются равенствами, так что

$$|a_{ii}|\,|a_{jj}| = R_i(A)R_j(A), \quad a_{ij} \neq 0, \quad i \neq j. \tag{3.7}$$

Введем обозначения:

$$S_2 = \bigl\{i, 1 \leqslant i \leqslant n \colon |a_{ii}| > R_i(A)\bigr\},$$
$$S_3 = \bigl\{i, 1 \leqslant i \leqslant n \colon |a_{ii}| = R_i(A)\bigr\}.$$

Из условий (3.7) легко следует, что обе подматрицы $A[S]$ и $A[S_2]$ диагональны, и

$$A[S \cup S_2, S_3] = 0.$$

Поскольку по предположению матрица A неприводима, мы можем заключить, что либо выполнено условие (3.3), либо подмножество S_3 пусто, так что $S_2 = \overline{S}$.

В последнем случае, в силу теоремы 2.3 и соотношений (3.7), мы имеем:

$$\begin{aligned} v_1 &= 1, \\ v_j &= \frac{|a_{i_0i_0}|\,|a_{i_1i_1}|\ldots|a_{i_{l(j)-1}i_{l(j)-1}}|}{R_{i_0}(A)R_{i_1}(A)\ldots R_{i_{l(j)-1}}(A)} \\ &= \begin{cases} 1, & l(j) \equiv 0 \pmod 2 \\ \dfrac{|a_{11}|}{R_1(A)}, & l(j) \equiv 1 \pmod 2 \end{cases}, \quad j = 2, \ldots, n, \end{aligned} \tag{3.8}$$

где $i_0 = 1$, $i_{l(j)} = j$, а $i_0, i_1, \ldots, i_{l(j)}$ – некоторый кратчайший путь в $D(A)$ из 1 в j.

С другой стороны, поскольку $A[S]$ и $A[\,\overline{S}\,]$ – диагональные матрицы, мы, очевидно, имеем

$$l(j) \equiv 0 \pmod 2 \Longleftrightarrow \text{либо} \quad 1, j \in S, \quad \text{либо} \quad 1, j \in \overline{S}. \tag{3.9}$$

Теперь равенства (3.5) (которые выполняются тривиальным образом, если верно (3.3)) немедленно следуют из (3.8) и (3.9).

Таким образом, нам остается лишь убедиться в справедливости соотношений (3.4). Действительно, следствие 2.2 гарантирует, что

$$|a_{ii}|v_i = \sum_{j \neq i} |a_{ij}|v_j, \quad i = 1, \ldots, n,$$

откуда, учитывая диагональность $A[S]$ и $A[\overline{S}]$, мы получаем

$$|a_{ii}|\alpha \overset{(3.5)}{=} |a_{ii}|v_i = \sum_{j \in \overline{S}} |a_{ij}|v_j \overset{(3.5)}{=} \sum_{j \in \overline{S}} |a_{ij}| = R_i(A), \quad i \in S,$$

$$|a_{ii}| \overset{(3.5)}{=} |a_{ii}|v_i = \sum_{j \in S} |a_{ij}|v_j \overset{(3.5)}{=} \alpha \sum_{j \in S} |a_{ij}| = \alpha R_i(A), \quad i \in \overline{S},$$

что и завершает доказательство теоремы 3.3. □

Литература

1. Ю. А. Альпин, *Критерии невырожденности матриц.* — В кн.: Алгебра и Анализ, Труды конференции, посвященной столетию Б. М. Гагаева, Казань (1997).
2. A. Brauer, *Limits for the characteristic roots of a matrix.* II. — Duke Math. J. **14** (1947), 21–26.
3. R. A. Brualdi, *Matrices, eigenvalues, and directed graphs.* — Linear and Multilinear Algebra **11** (1982), 143–165.
4. M. Fiedler and V. Pták, *Cyclic products and an inequality for determinants.* — Czechoslovak Math. J. **19** (1969), 428–450.
5. L. Yu. Kolotilina, *Nonsingularity/singularity criteria for nonstrictly block diagonally dominant matrices.* — Linear Algebra Appl. (to appear).
6. L. Yu. Kolotilina, *Generalizations of the Ostrowski–Brauer theorem.* — Linear Algebra Appl. (to appear).
7. A. Ostrowski, *Über die Determinanten mit überwiegender Hauptdiagonale.* — Comment. Math. Helv, **10** (1937), 69–96.
8. O. Taussky, *A recurring theorem on determinants.* — Am. Math. Monthly **56** (1949), 672–676.

Kolotilina L. Yu. On Brualdi's theorem.

This paper studies irreducible matrices $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n \times n}$, $n \geqslant 2$, satisfying Brualdi's conditions

$$\prod_{i \in \overline{\gamma}} |a_{ii}| \geqslant \prod_{i \in \overline{\gamma}} R_i(A), \quad \gamma \in \mathfrak{C}(A),$$

or, shortly, Brualdi matrices. Here, $R_i(A) = \sum\limits_{i \neq j} |a_{ij}|$, $i = 1, \dots, n$; $\mathfrak{C}(A)$ is the set of circuits of length $k \geqslant 2$ in the directed graph of A, and $\overline{\gamma}$ is the support of γ.

Among the results obtained are a characterization of Brualdi's matrices, implying, in particular, that they are generalized diagonally dominant; necessary and sufficient conditions of singularity for Brualdi matrices; explicit expressions for the absolute values of the components of right null-vectors of a singular Brualdi matrix, and conditions necessary and sufficient for a boundary point of Brualdi's inclusion region to be an eigenvalue of an irreducible matrix.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН

Поступило 16 ноября 2001 г.