Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 284, 2002 г.

В. Н. Кублановская

ВЫЧИСЛЕНИЕ ИНВАРИАНТНЫХ МНОГОЧЛЕНОВ ПОЛИНОМИАЛЬНОЙ МАТРИЦЫ. 1

Пусть $F(\lambda)$ есть полиномиальная $m \times n$ матрица ранга ρ, инвариантные многочлены которой следует вычислить. Вычисление последовательности $\{\psi_k(\lambda)\}$, $k = \rho, \rho-1, \dots, 1$ инвариантных многочленов [1] состоит в построении матрицы $L(\lambda) = \{l_{ij}(\lambda)\}$ треугольной (трапецоидальной) формы, эквивалентной матрице $F(\lambda)$, диагональные элементы которой удовлетворяют соотношениям

$$\begin{aligned} &l_{kk}(\lambda) = q_k(\lambda)\psi_{\rho-k+1}(\lambda), \quad k = 1, \dots, \rho-1, \\ &\psi_1(\lambda) = q_1(\lambda)\dots q_{\rho-1}(\lambda) l_{\rho\rho}(\lambda) \end{aligned} \tag{1}$$

Здесь $\psi_\rho(\lambda), \dots, \psi_1(\lambda)$ – искомых инвариантные многочлены матрицы $F(\lambda)$.

Преобразование $F(\lambda)$ в $L(\lambda)$ рассмотрим раздельно для регулярной и сингулярной матриц $F(\lambda)$.

1°. Случай регулярной $n \times n$ матрицы $F(\lambda)$.

Преобразование матрицы $F(\lambda)$ в матрицу $L(\lambda)$ треугольной формы с диагональными элементами, удовлетворяющими (1), состоит из $(n-1)$ типичных шагов. Каждый k-ый шаг включает выполнение следующих операций: выбор ведущей строки, вычисление инвариантного многочлена $\psi_{n-k+1}(\lambda)$; перестановка строк преобразуемой матрицы; зануление элементов ведущей строки для приведения её к виду, коллинеарному строке $(1, 0, \dots, 0)$ единичной матрицы; понижение на единицу порядка преобразуемой матрицы.

Рассмотрим типичный (первый) шаг, используя следующее свойство $\Delta W-1$ метода [2, 3].

Любой полиномиальный вектор-строка

$$A(\lambda) = (a_1(\lambda), \dots, a_n(\lambda))$$

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант 02-01-00095).

с помощью $\Delta W-1$ алгоритма может быть преобразован к виду

$$A(\lambda)W(\lambda)=(\delta(\lambda),0,\ldots,0), \tag{2}$$

где $W(\lambda)$ есть $n\times n$ унимодулярная матрица, $\delta(\lambda)$ есть общий наибольший делитель (ОНД) полиномов $a_k(\lambda)$, $k=1,\ldots,n$:

(1) В качестве ведущей строки первого шага берется строка матрицы $F(\lambda)$, ОНД элементов которой является наименьшим по степени среди ОНД элементов всех строк $F(\lambda)$.

С этой целью для каждой строки преобразуемой матрицы (матрицы $F(\lambda)$ для первого шага) вычисляется $\Delta W-1$ разложение вида (2), т.е. находится полином $\delta_i^{(1)}(\lambda)$, ОНД элементов строки с номером i, $i=1,\ldots,n$. В качестве ведущей строки выбирается строка с наименьшим по степени полиномом $\delta_i^{(1)}(\lambda)$. Обозначим ведущую строку $A_1(\lambda)$.

(2) С помощью перестановки строк преобразуемой матрицы, строка $A_1(\lambda)$ ставится на место первой строки преобразуемой матрицы

$$\theta_1F(\lambda)=\begin{bmatrix}A_1(\lambda)\\ \ldots\\ *\end{bmatrix},$$

θ_1 – матрица перестановок.

(3) Вычисляется полином $\psi_n(\lambda)=$ ОНД $\{\delta_i^{(1)}\}$, $i=1,\ldots,n$.

(4) Используя $\Delta W-1$ разложение строки $A_1(\lambda)$, матрицу $\theta_1F(\lambda)$ преобразуем к виду

$$\theta_1F(\lambda)W^{(1)}(\lambda)=\begin{bmatrix}l_{11}(\lambda) & 0\ldots0\\ \ldots & \ldots\ldots\ldots\\ * & F_1(\lambda)\end{bmatrix}. \tag{3}$$

Здесь $W^{(1)}(\lambda)$ – унимодулярная матрица, реализующая $\Delta W-1$ разложение строки $A_1(\lambda)$:

$$A_1(\lambda)W^{(1)}(\lambda)=(l_{11}(\lambda),0,\ldots,0).$$

В результате операций (1)–(4) первого шага будут:

• вычислена первая строка искомой матрицы $L(\lambda)$ и элементы её первого столбца (с точностью до перестановки);

• найдены полиномы[1] $\psi_n(\lambda)$ и $l_{11}(\lambda)$, а следовательно, и полином $q_1(\lambda)=\frac{l_{11}(\lambda)}{\psi_n(\lambda)}$;

[1]Здесь и ниже в качестве $\psi_k(\lambda)$ берем полином нормированный к единичному старшему коэффициенту.

• построена $(n-1)\times(n-1)$ матрица $F_1(\lambda)$, исходная для следующего (второго) шага алгоритма.

В результате вычисления $(n-1)$ шагов будет:

• построена матрица

$$L(\lambda)=\theta F(\lambda)W(\lambda), \tag{4}$$

где $\theta=\theta_{n-1},\dots,\theta_1$ – результирующая матрица перестановок; $W(\lambda)=W^{(1)}(\lambda)\widehat{W}^{(2)}(\lambda),\dots,\widehat{W}^{(n-2)}(\lambda)$ – результирующая унимодулярная матрица;

$$\widehat{W}^{(k)}(\lambda)=\begin{bmatrix} I & 0\\ 0 & W^{(k)}(\lambda)\end{bmatrix};$$

• вычислены полиномы $l_{11}(\lambda),\dots,l_{nn}(\lambda)$ и полиномы $\psi_n(\lambda),\dots,\psi_2(\lambda)$; $q_k(\lambda)=\frac{l_{kk}(\lambda)}{\psi_{n-k+1}(\lambda)}$, $k=1,\dots,n-1$.

Для обоснования алгоритма заметим, что при $k=1$ многочлен $\psi_n(\lambda)$ по построению совпадает с инвариантным многочленом, так как является ОНД всех элементов матрицы F. На шаге $k\geqslant 1$ будет построена матрица

$$\theta_k\dots\theta_1\,F\,W^{(1)}\widehat{W}^{(2)}\dots\widehat{W}^{(k)}=\left[\begin{array}{c|c} \begin{matrix} l_{11} & & \mathbb{O}\\ & \ddots & \\ & * & l_{kk}\end{matrix} & \mathbb{O}\\ \hline * & F_k(\lambda)\end{array}\right] \tag{5}$$

и вычислены многочлены

$$\psi_n(\lambda),\dots,\psi_{n-k+1}(\lambda),\quad l_{ii}(\lambda)=q_i(\lambda)\psi_{n-i+1}(\lambda),\ \ i=1,\dots,k.$$

По построению $k\times n$ матрицу $\left[\begin{array}{c|c} \begin{matrix} l_{11} & & \mathbb{O}\\ & \ddots & \\ & * & l_{kk}\end{matrix} & \mathbb{O}\end{array}\right]$, составленную из первых k-строк матрицы равенства (5), можно рассматривать как результат $\Delta W-1$ разложения матрицы, составленной из первых k-строк $\widetilde{F}:=\theta_k\dots\theta_1F(\lambda)$, реализуемого унимодулярной матрицей $W^{(1)}\widehat{W}^{(2)}\dots\widehat{W}^{(k)}$. По правилу выбора ведущей строки $\det\Delta_k=l_{11}(\lambda)\dots l_{kk}(\lambda)$ является ОНД миноров k-го порядка матрицы $\widetilde{F}$, имеющий наименьшую степень среди всех миноров порядка k преобразуемой матрицы. При этом каждый многочлен $\det\Delta_k$ делится на многочлены $\det\Delta_i$, $i=1,\dots,k-1$:

$$\det\Delta_k(\lambda)=q_1(\lambda)\dots q_k(\lambda)\psi_1(\lambda)\dots\psi_k(\lambda)=l_{11}(\lambda)\dots l_{kk}(\lambda).$$

При $k = n$

$$\det \Delta_n =$$
$$= \det L = l_{11}(\lambda) \dots l_{nn}(\lambda) = q_1(\lambda) \dots q_{n-1}(\lambda) l_{nn}(\lambda) \psi_n(\lambda) \dots \psi_2(\lambda).$$

С другой стороны, с учетом, что $F(\lambda)$ и $L(\lambda)$ эквивалентны, имеем: $\det L = \det F = \psi_n(\lambda) \dots \psi_2(\lambda)\psi_1(\lambda)$, так что справедливо равенство

$$\psi_1(\lambda) = q_1(\lambda) \dots q_{n-1}(\lambda) l_{nn}(\lambda).$$

Этим завершается обоснование алгоритма построения канонической треугольной формы для регулярной полиномиальной матрицы $F(\lambda)$ и вычисления её инвариантных многочленов.

2°. Случай сингулярной матрицы $F(\lambda)$.

Пусть $F(\lambda)$ есть полиномиальная $m \times n$ матрица. Применяя алгоритм п. 1° к прямоугольной матрице F, получим трапецоидальную матрицу $L(\lambda)$ вида

$$L(\lambda) = \left[\begin{array}{ccccccc:c}
c_{11} & & & & & & & \\
& \ddots & & & \mathbb{O} & & & \\
& & c_{m-\rho} & & & & & \\
& & & l_{11}(\lambda) & & & & \mathbb{O} \\
& & * & & \ddots & & & \\
& & & & & & l_{\rho\rho} &
\end{array}\right], \text{ если } \rho = m < n;$$

$$L(\lambda) = \begin{bmatrix}
c_1 & & & & \mathbb{O} & & \\
& c_2 & & & & & \\
& & \ddots & & & & \\
& & & c_{n-\rho} & & & \\
& & * & & l_{11}(\lambda) & & \\
& & & & & \ddots & \\
& & & & & & l_{\rho\rho}(\lambda) \\
\dots & \dots\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
& & & * & & &
\end{bmatrix}, \text{ если } \rho = n < m.$$

Здесь c_k – постоянные числа (многочлены нулевой степени), $l_{11}(\lambda), \dots, l_{\rho\rho}(\lambda)$ – многочлены, удовлетворяющие соотношениям (1), искомые инвариантные многочлены матрицы $F(\lambda)$ определяются в процессе преобразования матрицы $F(\lambda)$ к виду $L(\lambda)$.

Литература

1. Ф. Р. Гантмахер, *Теория матриц*. М., Наука (1967).
2. V. N. Kublanovskaya, *Rank-division algorithms and their applications.* J. Numer. Lin. Algebra Appl., **1**, No. 2 (1992), 199–213.
3. В. Н. Кублановская, *Методы и алгоритмы решения спектральных задач для полиномиальных и рациональных матриц.* Зап. научн. семин. ПОМИ, **238** (1997), 3–329.

Kublanovskaya V. N. Computing the invariant polynomials of a polynomial matrix. 1.

An algorithm for computing the invariant polynomials and the canonical triangular (trapezoidal) matrix for a polynomial matrix of full column rank is suggested. The algorithm is based on the rank-factorization (ΔW-1) method for solving algebraic problems for polynomial matrices, previously suggested by the author.

Санкт-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова

Поступило 23 июля 2001 г.