Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 284, 2002 г.

В. Н. Кублановская

ВЫЧИСЛЕНИЕ ИНВАРИАНТНЫХ МНОГОЧЛЕНОВ ПОЛИНОМИАЛЬНОЙ МАТРИЦЫ. 2

Введение. Предлагаются методы вычисления инвариантных полиномов полиномиалной матрицы $F(\lambda)$ общего вида, основанные на применении ΔW-1 и ∇V-1 ранговых факторизаций [2, 3]. Ниже используются следующие обозначения: $F := F(\lambda)$ – полиномиальная $m \times n$ матрица ранга ρ, $\rho \leqslant \min(m,n)$; $N_c[F]$ – правое нуль-пространство из полиномиальных решений матрицы $F(\lambda)$; $B[F]$ – присоединенная матрица для регулярной матрицы $F(\lambda)$; $C[F]$ – приведенная присоединенная матрица для $F(\lambda)$; $\varphi_k(\lambda)$ – общий наибольший делитель всевозможных миноров порядка k матрицы $F(\lambda)$; $\varphi_n[F]$ – характеристический полином $F(\lambda)$; $\sigma[F]$ – конечный спектр $F(\lambda)$ ($\sigma[F] = \{\varphi_n[F] = 0\}$). Базис $N_c[F]$ будем обозначать через $W_0[F]$, предполагая, что $W_0[F]$ составлен из столбцов унимодулярной матрицы. Вычисление $W_0(\lambda)$ можно реализовать применением метода ΔW разложения к матрице $F(\lambda)$.

Последовательность[1] $\{\psi_k[F]\}$, $k = 1, \dots, \rho$ называется последовательностью инвариантных полиномов матрицы $F(\lambda)$, если выполняются свойства (см. [4]).

1°. $\varphi_n[F] = \prod_{k=1}^{\rho} \psi_k[F]$ есть характеристический полином матрицы F;

2°. $$\psi_k[F] = \frac{\varphi_{n-k+1}[F]}{\varphi_{n-k}[F]}, \quad k = 1, \dots, \rho; \tag{1}$$

3°. $\varphi_n[F] = \psi_1[F]\varphi_{n-1}[F]$, $\psi_1[F]$ – минимальный полином матрицы $F(\lambda)$.

4°. Каждый полином последовательности (1), начиная со второго, является делителем предыдущего полинома.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант 02-01-00095).

[1] Здесь и ниже все скалярные полиномы нормированы, т.е. имеют старший коэффициент, равный единице.

Статья состоит из пяти параграфов. В §1 предлагается первый метод вычисления инвариантных многочленов полиномов регулярной полиномиальной матрицы, основанный на использовании метода ΔW-факторизации. Второй метод, использующий метод ∇V-факторизации, предлагается в §2. Каждый из методов вычисляет последовательность инвариантных полиномов и параллельно осуществляет последовательное исчерпывание вычисленных инвариантных полиномов, т.е. вычисляет последовательность матриц, спектры которых отличаются от спетра $F(\lambda)$ отсутствием нулей вычисленных инвариатных полиномов. В §3 рассматривается вычисление инвариантных полиномов для сингулярной матрицы. В §4 приводится теоретическое обоснование методов, а также их применение к решению некоторых задач алгебры (вычисление присоединенной и приведенной присоединенной матриц для регулярной матрицы $F(\lambda)$, каноническая факторизация регулярной матрицы в произведении регулярных матриц, характеристический полином каждой из которых совпадает с соответствующим инвариантным полиномом. В §5 рассматривается модификация ΨV-метода для вычисления собственных векторов, соответствующих нулям инвариантных полиномов.

§1. ΨW-метод вычисления инвариантных полиномов для регулярной полиномиальной матрицы

Пусть $F(\lambda)$ есть полиномиальная регулярная $n \times n$ матрица. Требуется вычислить последовательность $\{\psi_k(\lambda)\}$, $\psi_k(\lambda) := \psi_k[F]$. Метод состоит из конечного числа $(n-1)$ шагов.

Рассмотрим типичный (первый) шаг метода. Начальными данными является матрица $S = F(\lambda)$. Выполняются следующие операции.

(1) Для матрицы S вычисляется характеристический полином $\varphi_n[S]$ и присоединенная матрица $B[S]$. Для этого используется, например, метод следов Д. К. Фаддеева, примененный к функциональной матрице [3]. Согласно этому методу для вычисления $\varphi_n[S]$ и $B[S]$ строятся последовательности матриц $\{\Gamma_k(\lambda)\}$, $\{A_k(\lambda)\}$ и полиномов $\{\theta_n(\lambda)\}$, $k = 1, \dots, n$ по формулам

$$\Gamma_k = SA_{k-1}, \quad \theta_k = \frac{1}{k!} tr[\Gamma_k] F_k, \quad A_k = \Gamma_k - \theta_k I, \quad k = 1, \dots, n.$$

Результатом является характеристический полином $\varphi_n[S] = \theta_n(\lambda)$ и полиномиальная матрица $B[S] = A_{n-1}(\lambda)$, т.е. присоединенная матрица для S.

(2) Находится $\delta[B]$, т.е. общий наибольший делитель (ОНД) всех элементов матрицы $B[S]$. Эта операция выполняется алгоритмом вычисления ОНД последовательности скалярных полиномов [3].

(3) Вычисляется $\psi := \psi_1[S]$, т.е. минимальный полином матрицы S по формуле

$$\psi_1 := \frac{\varphi_n[S]}{\delta[B]}.$$

(4) Формируется полиномиальных $n\times 2n$ матрица

$$\Phi := [\psi I, S]$$

и находится ΔW-1 разложение Φ:

$$\Phi W = [\Delta, \mathbb{O}],$$

используя алгоритм ΔW-1 факторизациию Здесь $W = [W_1, W_0]$ есть унимодулярная матрица порядка $2n$ с блоками W_1 и W_0 размеров $2n\times n$.

(5) Матрица $W_0(\lambda)$ представляется в блочном виде $W_0(\lambda) = \begin{bmatrix} -S_1(\lambda) \\ T_1(\lambda) \end{bmatrix}$ с блоками S_1 и T_1 размеров $n{\times}n$. Если число выполненных шагов $k<(n-1)$, то осуществляется переход к следующему шагу с начальными данными $S = S_1$. Каждый шаг метода вычисляет матрицу $S_1(\lambda) = S_k(\lambda)$, где $\varphi_n[S_1] = \varphi_{n-1}[S]$. В результате будет постоена последовательность матриц $\{S_k(\lambda)\}$, $k = 0, 1, \dots, n-1$, удовлетворяющих соотношениям

$$\varphi_n[S_k] = \varphi_{n-1}[S_{k-1}], \quad \varphi_n[S_k] = \varphi_{n-k}[F],$$

так, что

$$\frac{\varphi_n[S_k]}{\varphi_n[S_{k-1}]} = \frac{\varphi_{n-k}[F]}{\varphi_{n-k-1}[F]} = \psi_{k+1}[F], \quad k = 0, \dots, n-1.$$

Построение последовательности $\{\psi_k[F]\}$ заканчивается на шаге $k = n-1$, или (что то же), когда $\det S = \mathrm{const}$.

§2. ΨV-метод вычисления инвариантных полиномов регулярной матрицы $F(\lambda)$

ΨV-метод можно рассматривать как модификация метода из §1, состоящая в выборе матрицы S, начиная со второго шага.

Модифицированный метод на каждом шаге требует выполнения следующих операций.

(1) Для начальной матрицы S (на первом шаге $S := F$) вычисляется характеристический полином $\varphi_n[S]$ и присоединенная матрица $B[S]$.

(2) Находится $\delta[B]$, т.е. общий наибольший делитель всех элементов матрицы $B[S]$.

(3) Вычислеятся полином $\psi := \dfrac{\varphi_n[S]}{\delta[B]}$.

(4) Формируется матрица $\Phi := [\psi I_n, S]$ и находится ∇V-разложение Φ:
$$\Phi = \nabla[\Phi]V[\Phi],$$
используя алгоритм ∇V-факторизации [3].

(5) Матрица $V := V[\Phi]$ представляется в блочном виде $V := [V^{(1)}, V^{(2)}]$ с блоками $V^{(1)}_{(\lambda)}$, $V^{(2)}_{(\lambda)}$ размеров $n \times n$; $S_1(\lambda) := V^{(2)}(\lambda)$.

Если число выполненных шагов $k < (n-1)$, то осуществляется переход к следующему шагу с начальными данными $S := S_1$.

Каждый шаг k, $k = 0, 1, \ldots, n-1$, метода вычисляет матрицу $S_1(\lambda) := V^{(2)}_{k+1}(\lambda)$, где $\varphi_n[S_1] = \varphi_{n-1}[S]$. В результате будет построена последовательность матриц $\{V^{(2)}_{k+1}(\lambda)\}$, $k = 0, 1, \ldots, n-1$, удовлетворяющих соотношениям:
$$\varphi_n[V^{(2)}_{k+1}] = \varphi_{n-1}[V^{(2)}_k], \quad \psi_{k+1}[F] = \psi_1[V^{(2)}_k] = \frac{\varphi_n[V^{(2)}_k]}{\varphi_n[V^{(2)}_{k+1}]}.$$
Построение $\{\psi_k[F]\}$ заканчивается на шаге $k = n-1$ или (что то же) когда $S = \mathrm{const}$.

§3. Методы вычисления инвариантных полиномов сингулярной матрицы

Пусть $F(\lambda)$ есть полиномиальная $m \times n$ матрица ранга ρ, последовательность инвариантных полиномов которой следует вычислить.

Метод вычисления состоит из двуй стадий. На первой стадии вычисляется регулярная полиномиальная матрица, спектр которой совпадает с конечным спектром матрицы $F(\lambda)$. На второй стадии вычисляется искомая последовательность инвариантных полиномов.

Реализация первой стадии требует выполнения следующих операций:

(1) Выполняется ΔW-1 разложение исходной матрицы $F(\lambda)$: $F(\lambda)W(\lambda) = \big[\Delta(\lambda), 0\big]$, где (по свойствам метода ΔW-разложения) $\Delta(\lambda)$ есть $m \times \rho$ матрица ранга ρ, спектр которой совпадает с конечным спектром $F(\lambda)$.

(2) Находится ΔW-разложение матрицы $F_1(\lambda) := \Delta^T(\lambda)$

$$F_1(\lambda)W[F_1] = \big[\Delta[F_1], \mathbb{O}\big],$$

где $\Delta[F_1]$ есть искомая регулярная $\rho\times\rho$ матрица, спектр которой совпадает с конечным спектром $F(\lambda)$.

Реализация второй стадии осуществляется любым из методов §1 и §2, где в качестве начальных данных берется матрица $S = \Delta[F_1]$.

§4. Теоретическое обоснование методов вычисления инвариантных полиномов

Обоснование методов достаточно провести для случая регулярной матрицы $F(\lambda)$, так как определение инвариантных полиномов сингулярных матриц, как сказано выше, сводится к решению задачи для регулярных матриц.

4.1. Обоснование ΨW-метода.

Пусть $F(\lambda)$ есть полиномиальная регулярная $n \times n$ матрица, последовательность $\{\psi_k(\lambda)\}$, $k = 0, 1, \ldots, n$ инвариантных полиномов для которой следует вычислить.

Согласно ΨW-методу вычисляются последовательности матриц $\{\Phi_k(\lambda)\}$ и $\{W_0^{(k)}(\lambda)\}$, $k = 0, 1, \ldots, n-1$

$$\Phi_k(\lambda) = \big[\psi_1[S_k]I_n, S_k\big], \quad W_0^{(k)}(\lambda) = \begin{bmatrix} -S_{k+1}(\lambda) \\ T_{k+1}(\lambda) \end{bmatrix}, \quad W_0^{(k)}(\lambda) \in N_c[\Phi_k],$$

где $\psi_1[S_k]$ есть минимальный полином матрицы S_k, $S_0(\lambda) = F(\lambda)$.

Для обоснования метода следует доказать справедливость равенства:

$$\varphi_n[S_k] = \varphi_{n-k}[F]; \quad \psi_1[S_k] = \psi_{k+1}[F], \quad k = 0, 1, \dots, n-1. \tag{2}$$

Пусть

$$\Phi_k(\lambda) = \nabla_k(\lambda) V_k(\lambda), \quad V_k(\lambda) = [V_{k+1}^{(1)}, V_{k+1}^{(2)}] \tag{3}$$

есть ∇V-факторизация матрицы $\Phi_k(\lambda)$. Здесь $\nabla_k(\lambda)$ есть регулярная $n\times n$ матрица, спектр которой совпадает с конечным спектром матрицы $\Phi_k(\lambda)$, $V_k(\lambda)$ есть полиномиальная $n\times 2n$ матрица полного строчного ранга, не имеющая конечного регулярного спектра как матрица, составленная из строк унимодулярной матрицы, $V_{k+1}^{(1)}$ и $V_{k+1}^{(2)}$ – матрицы размеров $n \times n$, составленные из столбцов $V_k(\lambda)$.

Лемма 1. *В условиях ΨW-метода для $k = 0, 1, \dots, n-1$ имеют место следующие равенства*

$$\varphi_n[\Phi_k] = \psi_1[S_k] \tag{4}$$

$$\varphi_n[\nabla_k] = \psi_1[S_k] \tag{5}$$

$$\varphi_n[V_{k+1}^{(1)}] = \big(\psi_1[S_k]\big)^{n-1} \tag{6}$$

$$\varphi_n[V_{k+1}^{(2)}] = \varphi_{n-1}[S_k]. \tag{7}$$

Справедливость (4) следует из определения регулярного спектра матрицы Φ_k. Справедливость (5) следует из свойства ∇V-факторизации матрицы Φ_k с учетом равенства (4). Для доказательства (6) и (7) равенство (3) запишем в развернутом виде

$$\big[\psi_1[S_k] I_n, S_k\big] = \big[\nabla_k V_{k+1}^{(1)}, \nabla_k V_{k+1}^{(2)}\big]. \tag{8}$$

Из (8) имеем

$$\psi_1[S_k] I_n = \nabla_k V_{k+1}^{(1)}, \quad S_k = \nabla_k V_{k+1}^{(2)}, \tag{9}$$

Из (5) и (8) находим

$$\varphi_n\big[V_{k+1}^{(1)}\big] = \big(\psi_1[S_k]\big)^{n-1}, \quad \text{т.е. (6) выполняется;}$$

$$\varphi_n[S_k] = \varphi_n[\nabla_k]\, \varphi_n\big[V_{k+1}^{(2)}\big] = \psi_1[S_k] \varphi_n\big[V_{k+1}^{(2)}\big]. \tag{10}$$

По свойствам инвариантных полиномов имеем

$$\varphi_n[S_k] = \psi_1[S_k] \varphi_{n-1}[S_k]. \tag{11}$$

Из (10) и (11) следует справедливость (7), ч. и т. д.

Лемма 2. *В условиях ΨW-метода справедливы равенства*

$$\varphi_n[S_{k+1}] = \varphi_n[V_{k+1}^{(2)}], \tag{12}$$

$$\varphi_n[S_k] = \psi_1[S_k]\varphi_n[S_{k+1}], \quad k = 0, 1, \ldots, n-1. \tag{13}$$

Доказательство. Столбцы матрицы $W_0^{(k)} = \begin{bmatrix} -S_{k+1}(\lambda) \\ T_{k+1}(\lambda) \end{bmatrix}$ и матрицы $U_0^{(k)} := \begin{bmatrix} -V_{k+1}^{(2)}(\lambda) \\ V_{k+1}^{(1)}(\lambda) \end{bmatrix}$ образуют базисы одного и того же подпространства $N_c[V_k]$. При этом $\varphi_n[W_0^{(k)}] = \text{const}$, $\varphi_n[V_0^{(k)}] = \text{const}$, так как по построению $W_0^{(k)}$ и V_k составлены из столбцов и строк унимодулярных матриц $W^{(k)}$ и $(W^{(k)})^{-1}$ соответственно. Отсюда следует, что с точностью до унимодулярного правого множителя совпадают матрицы $W_0^{(k)}$ и $U_0^{(k)}$, S_{k+1} и $V_{k+1}^{(2)}$ соответственно:

$$S_{k+1}(\lambda) = V_{k+1}^{(2)}(\lambda)\Omega(\lambda),$$

где $\Omega(\lambda)$ – унимодулярная матрица. Следовательно равенство (12) выполняется. Справедливость (13) следует из (10) и (12), ч. т.д.

Лемма 3. *Для любого $k = 0, 1, \ldots, n-1$ имеют место равенства*

$$\varphi_n[S_k] = \varphi_{n-k}[F], \quad \psi_1[S_k] = \psi_{k+1}[F]. \tag{14}$$

Доказательство проведем по индукции. При $k = 0$ с учетом (13) имеем

$$\varphi_n[S_0] \equiv \varphi_n[F] = \psi_1[F]\varphi_n[S_1].$$

С другой стороны, по свойствам инвариантных полиномов $\varphi_n[F] = \psi_1[F]\varphi_{n-1}[F]$, так что

$$\varphi_n[S_1] = \varphi_{n-1}[F] \equiv \varphi_{n-1}[S_0]. \tag{15}$$

Далее, учитывая справедливость равенств

$$\varphi_n[S_1] = \psi_1[S_1]\varphi_{n-1}[S_1] = \psi_1[S_1]\psi_2[S_1]\varphi_{n-2}[S_1],$$
$$\varphi_{n-1}[F] = \psi_2[F]\varphi_{n-2}[F] = \psi_2[F]\ldots\psi_{n-1}[F],$$

заключаем, что

$$\psi_1[S_1] = \psi_2[F] \equiv \psi_2[S_0]. \tag{16}$$

Равенства (15), (16) являются основанием для индукции. Допустим, что (14) выполняется для любого $i \leqslant k$ и докажем справедливость (14) для $i = k+1$. С учетом (13) имеем $\varphi_n[S_k] = \psi_1[S_k]\varphi_n[S_{k+1}]$. По предложению $\varphi_n[S_k] = \varphi_{n-k}[F]$, $\psi_1[S_k] = \psi_{k+1}[F]$, так что

$$\varphi_{n-k}[F] = \varphi_n[S_k] = \psi_1[S_k]\varphi_n[S_{k+1}] = \psi_{k+1}[F]\varphi_n[S_{k+1}]. \tag{17}$$

Далее по свойствам инвариатных полиномов

$$\varphi_{n-k}[F] = \psi_{k+1}[F]\varphi_{n-(k+1)}[F]. \tag{18}$$

Тогда из (17) и (18) получим

$$\varphi_n[S_{k+1}] = \varphi_{n-(k+1)}[F] = \psi_{k+2}[F]\varphi_{n-(k+2)}[F],$$

при этом $\varphi_n[S_{k+1}] = \psi_1[S_{k+1}]\varphi_{n-1}[S_{k+1}]$, так что

$$\varphi_n[S_{k+1}] = \varphi_{n-(k+2)}[F] \quad \psi_1[S_{k+1}] = \psi_{k+2}[F]. \tag{19}$$

Справедливость равенств (18) и (19) завершает доказательство леммы.

Теорема 4. *В условиях ΨW-метода вычисления инвариатных полиномов регулярной матрицы $F(\lambda)$ справедливы следующие утверждения.*

1) *Для любого $k = 0, 1, \ldots, n-1$ имеют место соотношения*

$$\{\varphi_n[S_k] = 0\} \supseteq \{\varphi_n[S_{k+1}] = 0\}; \tag{20}$$

$$\psi_{k+1}[F] = \psi_1[S_k]; \tag{21}$$

$$\psi_{k+1}[F] = \frac{\varphi_n[S_k]}{\varphi_n[S_{k+1}]}. \tag{22}$$

2) *Спектр матрицы $S_{k+1}(\lambda)$ отличается от конечного спектра матрицы F отсутствием нулей полиномов $\psi_1[F]$, $\psi_2[F], \ldots, \psi_k[F]$, $k = 1, \ldots, n-1$.*

Справедливость (20) следует из (13) и леммы 2. Равенства (21), (22) следуют из лемм 2 и 3.

Теорема 4 завершает обоснование ΨW-метода вычисления инвариантных полиномов, который является методом последовательного исчерпывания из $\sigma[F]$ нулей инвариантных полиномов.

Теорема 5. *Пусть* $F(\lambda)$ – *регулярная матрица* $\widetilde{\Phi}(\lambda) = [\varphi_n[F]I_n, F]$, $\widetilde{W}_0(\lambda) = \begin{bmatrix} -\widetilde{S}_1(\lambda) \\ \widetilde{T}_1(\lambda) \end{bmatrix} = N_c[\widetilde{\Phi}]$. *Тогда* 1) $\widetilde{S}(\lambda)$ *есть унимодулярная матрица;* 2) $B[F] := \widetilde{T}\widetilde{S}^{-1}$ *есть присоединенная матрица для* $F(\lambda)$.

Доказательство. Из ∇V-факторизации матрицы $\widetilde{\Phi}(\lambda)(\widetilde{\Phi}(\lambda) = \widetilde{\nabla}(\lambda)\widetilde{V}(\lambda)$, $\widetilde{V}(\lambda) = [\widetilde{V}_1(\lambda), \widetilde{V}_2(\lambda)])$ следует равенство $F(\lambda) = \widetilde{\nabla}\widetilde{V}_2$. Здесь $\widetilde{\nabla}(\lambda)$ есть регулярная матрица и $\varphi_n[\widetilde{\nabla}] = \varphi_n[\widetilde{\Phi}]$. По определению конечного регулярного спектра с учетом вида матрицы $\widetilde{\Phi}$, имеем $\varphi_n[\widetilde{\Phi}] = \varphi_n[F]$, так что выполняются равенства

$$\varphi_n[F] = \varphi_n[\widetilde{\nabla}]\varphi_n[\widetilde{V}_2] = \varphi_n[F]\varphi_n[\widetilde{V}_2].$$

Отсюда $\varphi_n[\widetilde{V}_2] = \mathrm{const}$, т.е. $\widetilde{V}_2(\lambda)$ есть унимодулярная матрица.

Для доказательства п. 1) теоремы достаточно установить равенство $\varphi_n[\widetilde{S}] = \varphi_n[\widetilde{V}_2]$. Доказательство последнего аналогично доказательству равенства (12) из леммы 2, где $\widetilde{S}(\lambda) = S_{k+1}(\lambda)$.

Справедливость 2) следует из равенства $\widetilde{\Phi}\widetilde{W}_0 = 0$ или (в развернутом виде) $F(\lambda)\widetilde{T}(\lambda) = \varphi(\lambda)\widetilde{S}(\lambda)$ с учетом, что $\varphi(\lambda)F^{-1}(\lambda) = B[F]$, а матрица $\widetilde{S}^{-1}(\lambda)$ есть унимодулярная, ч.т.д.

4.2. Обоснование ΨV-метода.

ΨV- метод является модификацией ΨW-метода. Отличие между ними состоит в выборе начальной матрицы S для выполнения каждого шага, начиная со второго. В качестве S выбирается матрица $V_{k+1}^{(2)}$ из ∇V-разложения матрицы $\Phi_k(\lambda)$ в отличие от ΨW-метода, где S есть матрица $S_{k+1}(\lambda)$ из ΔW-1 разложения матрицы $\Phi_k(\lambda)$.

С учетом равенства $\varphi_n[V_{k+1}^{(2)}] = \varphi_n[S_{k+1}]$ установленного в лемме 2, обоснование ΨV-метода проводится аналогично обоснованию ΨW метода.

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 6. *В условиях* ΨV*-метода справедливы утверждения:*

1) *Имеют место следующие соотношения:*

$$\begin{aligned}
&\{\varphi_n[F]=0\}\supseteq\{\varphi_n[V_1^{(2)}]=0\}\supseteq,\dots,\supseteq\{\varphi_n[V_{n-1}^{(2)}]=0\},\\
&\varphi_n[V_n^{(2)}]=\text{const}, && (23)\\
&\psi_{k+1}[F]=\psi_1[V_k^{(2)}], && (24)\\
&\psi_{k+1}[F]=\frac{\varphi_n[V_k^{(2)}]}{\varphi_n[V_{k+1}^{(2)}]},\quad k=0,1,\dots,n-1. && (25)
\end{aligned}$$

2) *Спектр матрицы $V_{k+1}^{(2)}$ отличается от спектра $F(\lambda)$ отсутствием точек, которые суть нули полиномов $\psi_1[F]$, $\psi_2[F],\dots,$ $\psi_k[F]$, $k=1,\dots,n-1$.*

Справедливость утверждения 1) доказывается аналогично утверждению 1) теоремы 4. Справедливость 2) следует из способа постерония последовательности матриц $V_{k+1}^{(2)}$, т.е. из равенств

$$F(\lambda)=\nabla_0(\lambda)V_1^{(2)}(\lambda),\ V_1^{(2)}(\lambda)=\nabla_1(\lambda)V_2^{(2)}(\lambda),\dots,V_{n-1}^{(2)}(\lambda)=\nabla_{n-1}V_n^{(2)},$$

где $V_n^{(2)}(\lambda)$ есть унимодулярная матрица.

Замечания 1. Каждый из ΨW- и ΨV-методов являются методами последовательного исчерпывания из $\sigma[F]$ нулей полиномов $\psi_k(\lambda)$, $k=1,\dots,n-1$.

Действительно, параллельно вычислению $\{\psi_k(\lambda)\}$ вычисляется последовательность матриц $S_{k+1}(\lambda)$ в ΨW-методе (последовательность матриц $V_{k+1}^{(2)}(\lambda)$ в ΨV-периоде). При этом по лемме 3 спектр матрицы $S_{k+1}(\lambda)$ (матрицы $V_{k+1}^{(2)}(\lambda)$) отличается от спектра матрицы $F(\lambda)$ отсутствием нулей полиномов $\psi_1[F],\dots,\psi_k[F]$.

2. При точных вычислениях справедливы равенства:

$$\frac{\varphi_n[S_k]}{\delta[B_k]}=\psi_{k+1}[F]=\frac{\varphi_n[V_k^{(2)}]}{\varphi_n[V_{k+1}^{(2)}]}=\frac{\varphi_n[S_k]}{\varphi_n[S_{k+1}]},\quad k=0,\dots,n-2.$$

Неточность выполнения этих равенств может служить оценкой вычислительной погрешности методов.

Теорема 7. *В условиях ΨV-метода справедливы следующие свойства:*

1) $$F(\lambda)=\nabla_0(\lambda)\nabla_1(\lambda),\dots,\nabla_{n-1}(\lambda)V_n^{(2)}(\lambda), \qquad (26)$$

где $\varphi_n[\nabla_k] = \psi_{k+1}[F]$ $k = 0, 1, \ldots, n-2$, $\psi_n[F] = \mathrm{const}$, $\varphi[V_n^{(2)}] = \mathrm{const}$, *т.е.* $V_n^{(2)}$ – *унимодулярная матрица.*

2) $V_k^{(2)}(\lambda) = \nabla_k(\lambda) V_{k+1}^{(2)}(\lambda)$, *где* $\varphi[V_k^{(2)}] = \varphi_{n-k}[F]$. (27)

3) $F(\lambda) = \nabla_0(\lambda) V_1^{(2)}(\lambda) = \ldots = \nabla_0(\lambda)\nabla_1(\lambda)\ldots\nabla_{k-1}(\lambda) V_k^{(2)}(\lambda)$, $k = 1, \ldots, n$.

4) $\nabla_k^{-1}(\lambda)\nabla_{k-1}(\lambda) = \Omega(\lambda)$, *где* $\Omega(\lambda)$ *есть регулярная матрица,* $k = 1, \ldots, n-1$.

Справедливость свойств 1)–3) следует из свойств матриц $\nabla_k(\lambda)$ и $V_k^{(2)}(\lambda)$, вычисляемых в ΨV-методе. Справедливость 4) следует из равенств

$$\varphi[\nabla_k^{-1}\nabla_{k-1}] = \frac{\varphi[\nabla_{k-1}]}{\varphi[\nabla_k]} = \frac{\psi_k(\lambda)}{\psi_{k+1}(\lambda)} = p_k(\lambda),$$

где $p_k(\lambda)$ есть скалярных полином.

Замечание Свойства 1)–4) для последовательности матриц $\{\nabla_k(\lambda)\}$ аналогичны свойствам 1)–4) последовательнтси инвариантных полиномов (1), определяющих инвариантные полиномы матрицы $F(\lambda)$. В дальнейшем последовательность $\{\nabla_k\}$ будем называть последовательностью инвариантных матриц, равенство (26) – каноническим разложением $F(\lambda)$.

§5. Вычисление элементарных делителей (э.д.) и собственных векторов

Пусть $F(\lambda)$ есть регулярная матрица, для которой следует вычислить все э.д. и собственные векторы. Очевидно элементарные делители матрицы $F(\lambda)$ есть объединение э.д. всех инвариантных полиномов $\psi_1[F], \ldots, \psi_{n-1}[F]$ матрицы $F(\lambda)$. Элементарные делители каждого из $\psi_k(\lambda)$, $k = 1, \ldots, n-1$ могут быть найдены разложением полинома на множители $\psi_k(\lambda) = \prod(\lambda - \lambda_i)^{m_i}$. Вычисления всех корней полинома, считая их кратности, можно реализовать любым из известных в численном анализе для этой цели методом. Учитывая сказанное, для вычисления э.д. матрицы $F(\lambda)$ можно применить любой из методов вычисления инвариатных полиномов, и в частности, ΨW и ΨV-методы.

Рассмотрим задачу вычисления собственных векторов матрицы $F(\lambda)$. Для этой цели используем ΨV-метод. Для сокращения записи введем обозначения для фиксированного шага k, $k = 0, 1, \dots, n-1$:

$$V_2 := V_k^{(2)}, \quad \psi := \psi_1[V_2], \quad \Phi := [\psi I, V_2] := \Phi_k,$$

$W_0 = \begin{bmatrix} -S \\ T \end{bmatrix} := W_0^{(k)}$, $S = S_{k+1}$, $T = T_{k+1}$; $Y(\lambda) = \begin{bmatrix} -s(\lambda) \\ t(\lambda) \end{bmatrix}$ обозначает любой столбец матрицы W_0.

Лемма 8. *Следующие свойства имеют место.*

1) *Уравнение $W_0 x = 0$ не имеет ненулевых решений.*
2) *$T(\lambda)$ – регулярная матрица.*
3) *Матрица $T(\lambda)$ не имеет нулевых столбцов и не обращается в нулевую матрицу при любом фиксированном λ.*
4) *$Y(\lambda_*) \neq 0$ для любого корня λ_* полинома $\psi(\lambda)$.*
5) *Векторы $s(\lambda_*)$ и $t(\lambda_*)$ не обращаются в нулевые одновременно.*
6) *$t(\lambda) = (\lambda - \lambda_*)^r \widehat{t}(\lambda)$, $r \geqslant 0$, λ_* – корень $\psi(\lambda)$.*
7) *Имеет место равенство*

$$V_2(\lambda)\widehat{t}(\lambda) = g(\lambda)s(\lambda). \tag{28}$$

где $g(\lambda) = \dfrac{\psi(\lambda)}{(\lambda - \lambda_*)^r}$ $r \geqslant 0$ есть собственный полином, $\widehat{t}(\lambda)$ – порождающий собственный вектор для матрицы $V_2(\lambda)$.

Справедливость 1)–5) следует из свойств матрицы $W_0(\lambda) \in N_c[\Phi]$, вычисленной с использованием алгоритма ΔW-1 разложения Φ.

Установим справедливость 6) и 7).

Из равенства $\Phi(\lambda)Y(\lambda) = 0$ или (в развернутом виде)

$$V_2(\lambda)t(\lambda) = \psi(\lambda)s(\lambda) \quad \text{при} \quad \lambda = \lambda_* \in \{\psi(\lambda) = 0\} \tag{29}$$

имеем

$$V_2(\lambda_*)t(\lambda_*) = 0.$$

Отсюда в ситуации имеем $t(\lambda_*) = 0$, с учетом 3) и 5), вектор $t(\lambda)$ представим в виде

$$t(\lambda) = (\lambda - \lambda_*)^r \widehat{t}(\lambda), \quad r > 0; \tag{30}$$

Здесь $\widehat{t}(\lambda)$ ненулевой вектор. Подставив (30) в (29) получим (28). При этом по определению порождающих собственных векторов и собственных полиномов (см. [5]) так вычисленные вектор $\widehat{t}(\lambda)$ и полином $g(\lambda) \neq \mathrm{const}$ являются порождающим собственным вектором матрицы V_2 и делителем полинома $\psi(\lambda)$, ч.т.д.

Лемма 9. *Собственные векторы матрицы $V_2 := V_k^{(2)}(\lambda)$ и матрица $F(\lambda)$, соответствующие одному и тому же нулю λ_i полинома $\psi(\lambda) := \psi_{k+1}[F]$ совпадают.*

Справедливость следует из равенств (24), (26) и (27): $\psi(\lambda) = \psi_1[V_k^{(2)}] = \psi_{k+1}[F]$; $F(\lambda) = \nabla_0(\lambda)\nabla_1(\lambda), \ldots, \nabla_k(\lambda)V_{k+1}^{(2)}(\lambda)$ и $V_k^{(2)}(\lambda) = \nabla_k(\lambda)V_{k+1}^{(2)}(\lambda)$ с учетом того, что корни любого из инвариантных полиномов $\psi_k[F]$, $k = 1, \ldots, n$ являются корнями характеристического полинома матрицы $F(\lambda)$, т.е. собственными значениями $F(\lambda)$

Следствие 10. *Ненулевые столбцы $T(\lambda)$ в каждом из корней $\psi(\lambda)$ являются собственными значениями матрицы $V_2(\lambda) = V_k^{(2)}(\lambda)$, а, следовательно, и матрицы $F(\lambda)$, если соответствующие столбцы матрицы $S(\lambda)$ в упомянутых точках являются ненулевыми. Действительно, матрица $T(\lambda_*)$ в любой точке $\lambda_* \in \{\psi(\lambda) = 0\}$ имеет, по крайней мере, один ненулевой столбец $t(\lambda_*)$ $(r = 0)$, так как по свойствам леммы 8 матрица $T(\lambda)$ не обращается в нулевую ни при каком фиксированном λ.*

Алгоритм вычисления собственных векторов матрицы $F(\lambda)$, соответствующим корням каждого из инвариантных полиномов $\psi_{k+1}[F]$, $k = 0, \ldots, n-1$ требует на каждом шаге ΨV-метода выполнения следующих дополнительных операций.

1) Для каждого столбца $t_i(\lambda)$, $i = 1, \ldots, n$, матрицы $T(\lambda) := T_{k+1}(\lambda)$ вычисляется вектор $\widehat{t}_i(\lambda) = \dfrac{1}{\widehat{\delta}_i(\lambda)} t_i(\lambda)$, где $\widehat{\delta}_i(\lambda)$ есть ОНД компонентов вектора $t_i(\lambda)$.
2) Вычисляется полином $g_i(\lambda) = \dfrac{\psi[V_2]}{\widehat{\delta}_i(\lambda)}$. К каждой паре $\widehat{t}_i(\lambda)$ и $g_i(\lambda)$ применяется метод [5] вычисления собственных векторов матрицы по известным порождающем собственном векторе и ему соответствующем собственном полиноме.

3) Находятся ненулевые столбцы $t(\lambda)$ матрицы $T(\lambda)$ в корнях $\psi(\lambda)$, которым соответствуют ненулевые столбцы $s(\lambda)$ матрицы $S(\lambda)$ в этих же точках. Так найденные векторы образуют систему собственных векторов матрицы $F(\lambda)$ в корнях полинома $\psi_{k+1}[F]$.

Замечания. 1. На каждом шаге ΨW- и ΨV-методов вычисляется минимальный полином преобразуемой матрицы. Эта операция, как отмечалось в §1, может быть выполнена применением ΔW-метода, если известны характеристический полином и присоединенная матрица. Вычисление последних для регулярной матрицы $F(\lambda)$ может быть реализовано методом следов Д. К. Фаддеева. В случае $F(\lambda) = A - \lambda I$ или $F(\lambda) = A - \lambda B$ вычисление $\varphi_n[F]$ можно выполнить любым из прямых методов численной линейной алгебры, решающих эту задачу. Реализовать вычисление $B[F]$ при известном $\varphi_n[F]$ можно, используя ΔW-разложение матрицы $\widetilde{\Phi} := [\varphi[F]I_n, F]$ (см. теорему 5). В этом случае $B[F] = \widetilde{T}(\lambda)\widetilde{S}^{-1}(\lambda)$, где $\widetilde{T}(\lambda)$ и $\widetilde{S}(\lambda)$ суть блоки $\widetilde{W}_0[\widetilde{\Phi}] = \begin{bmatrix} -\widetilde{S}(\lambda) \\ \widetilde{T}(\lambda) \end{bmatrix} \in N_c[\widetilde{\Phi}]$, $\widetilde{S}(\lambda)$ – унимодулярная матрица. Алгоритм обращения унимодулярной матрицы см. [1].

2. ΨV-метод более трудоемкий, чем ΨW-метод, так как требует выполнения ∇V-разложения матриц Φ_k. Но он в отличие от ΨW-метода дает более полную информацию и может быть применен к вычислению собственных векторов матрицы $F(\lambda)$ и к нахождению канонического разложения $F(\lambda)$ в произведение инвариантных матриц.

Литература

1. В. Н. Кублановская, *Вычисление инвариантных многочленов полиномиальной матрицы.* 1. — Зап. научн. семин. ПОМИ **284** (2002), 123–127.
2. V. N. Kublanovskaya, *Rank division algorithms and their applications.* — J. Numer. Algebra Appl. **1**, No. 2 (1992), 198–213.
3. В. Н. Кублановская, *Методы и алгориты решения спектральных задач для полиномиальных и рациональных матриц.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **238** (1997), 7–329.
4. Ф. Р. Гантмахер, *Теория матриц*. Наука, М. (1988).
5. В. Н. Кублановская, В. Б. Хазанов, *К решению частичной проблемы собственных значений для полиномиальных матриц.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **284** (2002), 163–176.

Kublanovskaya V. N. Computing the invariant polynomials of a polynomial matrix. 2.

The paper considers the problem of computing the invariant polynomials of a general (regular or singular) one-parameter polynomial matrix. Two new direct methods for computing invariant polynomials, based on the ΔW and ∇V rank-factorization methods, are suggested. Each of the methods may be regarded as a method for successively exhausting zeros of invariant polynomials from the matrix spectrum. Application of the methods to computing adjoint matrices for regular polynomial matrices, to finding the canonical decomposition into a product of regular matrices such that the characteristic polynomial of each of them coincides with the corresponding invariant polynomial, and to computing matrix eigenvectors corresponding to the zeros of its invariant polynomials are considered.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им.В. А. Стеклова РАН

Поступило 27 февраля 2002 г.