Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 284, 2002 г.

В. Н. Кублановская

К РЕШЕНИЮ МНОГОПАРАМЕТРИЧЕСКИХ ЗАДАЧ АЛГЕБРЫ. 1. МЕТОДЫ ВЫЧИСЛЕНИЯ НАСЛЕДСТВЕННЫХ ПОЛИНОМОВ И ИХ ПРИМЕНЕНИЯ

Введение

Настоящая статья относится к серии статей под общим названием "К решению многопараметрических задач алгебры", посвященных построению методов и алгоритмов численного решения задач, моделируемых в терминах полиномиальных и рациональных матриц со многими параметрами.

Предлагается новый подход (именуемый ниже ΔW-q методом) для численного решения q-параметрических задач алгебры с полиномиальным и рациональным вхождением параметров. ΔW-q метод является обобщением метода ранговой факторизации (ΔW-1 факторизации), ранее предложенного автором (см., например, [1]) для случая полиномиальных и рациональных $q = 1$-параметрических матриц.

Основными "инструментами" нового подхода являются не только элементарные ортогональные и неортогональные преобразования, применяемые в классической численной алгебре, но и многопараметрические регулярные матрицы треугольного вида, унимодулярные по одному (ведущему) параметру. Этот параметр (назовем его λ) определяется формой записи q-параметрической полиномиальной матрицы в виде полинома по λ с матричными коэффициентами, зависящими от остальных $(q-1)$ параметров. Новый подход позволяет проводить исследование спектральных характеристик полиномиальных и рациональных матриц, разделять регулярный и сингулярный спектры, исчерпывать из спектра как егорегулярную, так и сингулярную составляющие, вычислять спектральные характеристики; строить базисы нуль-пространств из полиномиальных решений, свободные

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант 02-01-00095).

от регулярных спектров, находить ранговые факторизации полиномиальных матриц, несократимые факторизации разных уровней для рациональных матриц и др.

На базе решения этих задач ΔW-q метод позволяет разрабатывать методы и алгоритмы для решения многопараметрических задач алгебры. К таким, например, можно отнести следующие: выполнение операций над полиномами от нескольких переменных (вычисление общего наибольшего делителя, наименьшего кратного, разложения полинома на, так называемые, относительно неразложимые множители); решение систем линейных уравнений с входными данными, зависящими от параметров, решение систем нелинейных алгебраических уравнений со многими переменными, решение обратных задач на собственные значения матрицы и др.

Возможность выбора ведущего параметра в ΔW-q методе позволяет сводить решение q-параметрической задачи к решению $(q-1)$-параметрических задач и, таким образом, позволяет некоторые алгоритмы и методы для решения многопараметрических задач получать по рекурсии (по числу параметров), исследование спектральных характеристик q-параметрических матриц сводить к исследованию таковых для матриц, зависящих от меньшего числа параметров. В этой связи возникает необходимость исследования спектральных характеристик матриц, конечный спектр которых не зависит от ведущего параметра. Некоторые задачи сначала рассматриваются на матрицах, спектр которых не зависит от ведущего параметра, и лишь затем обобщаются на общий случай. К таким, например, относятся задачи построения, так называемых, методов ранговой факторизации (∇V-факторизации, неполной относительной факторизации, несократимых факторизаций разных уровней), задачи исчерпывания спектральных характеристик и, в частности, задача построения свободных базисов нуль-пространств многопараметрической матрицы.

В статье предлагается метод вычисления неполной относительной факторизации для $q \geqslant 2$ параметрической полиномиальной матрицы, позволяющий исчерпывать из регулярного спектра матрицы, так называемый, минимальный и смешанный регулярные спектры. Вводится понятие наследственных полиномов, обобщающее понятие инвариантных полиномов однопараметрической полиномиальной матрицы. Предлагаются методы вычисления наследственных полиномов и их применения к решению некоторых задач алгебры.

Статья состоит из введения и трех параграфов. В §1 приводится описание структуры конечного регулярного спектра для класса q-параметрических полиномиальных матриц, спектр которых не зависит от ведущего (спектрального) параметра. В §2 дается описание метода вычисления неполной относительной факторизации матрицы. В §3 вводятся понятия наследственной матрицы, наследственного полинома, уровня наследственности точки регулярного спектра; рассматриваются методы вычисления наследственных полиномов, методы их исчерпывания из спектра матрицы, а также применение этих методов к решению некоторых задач алгебры.

Используются следующие обозначения.

$\mathcal{M}_\rho^{m\times n}$ – множество $q \geqslant 1$ параметрических полиномиальных $m \times n$ матриц $F(\lambda, \mu)$ ранга ρ, конечный регулярный спектр которых не зависит, по крайней мере, от одного (спектрального) параметра;

$F := F(\lambda, \mu) = \sum_{k=0}^{s} \lambda^k \mathbf{C}_k(\mu)$ – q-параметрическая полиномиальная матрица ($q \geqslant 2$), λ – спектральный параметр, μ – мультииндекс из $(q-1)$ дополнительных параметров $\mu_2, \ldots, \mu_q$, $F := F(\lambda) = \sum_{k=0}^{s} C_k \lambda^k$ – однопараметрическая полиномиальная матрица; $F_* = F(\lambda, \mu_*)$ – матрица при фиксированных значениях параметров $\mu = \mu_2^*, \ldots, \mu_q^*$;

$B[F]$ – присоединенная матрица для F;

$N_c[F]$ – правое нуль-пространство из полиномиальных решений F;

$W_0[F] = \begin{bmatrix} -S \\ T \end{bmatrix}$ – базис $N_c[F]$, обладающий следующими свойствами: $W_0 \in \mathcal{M}_{n-\rho}^{n\times(n-\rho)}$, уравнение $W_0 x = 0$ имеет только нулевое решение, $T \in \mathcal{M}_{n-\rho}^{(n-\rho)\times(n-\rho)}$, $S \in \mathcal{M}_{n-\rho}^{\rho\times(n-\rho)}$;

$N_c[F_*]$ и $N_c[F]_*$ суть базисы правых нуль-пространств соответственно матриц F_* и $F(\lambda, \mu)$;

$\sigma_r[F]$ – конечный регулярный спектр матрицы F: $\sigma_r[F] = \{\varphi[F] = 0\}$, где $\varphi[F] = \varphi(\mu)$ есть характеристический полином F, т.е. полином, нулями которого являются нули общего наибольшего делителя (ОНД) миноров матрицы F вида

$$F\begin{pmatrix} i_1 i_2 \dots i_\rho \\ j_1 j_2 \dots j_\rho \end{pmatrix}, \quad 1 \leqslant i_1 < \dots < i_\rho \leqslant n, \quad 1 \leqslant j_1 < \dots < j_\rho \leqslant m.$$

Одной и той же буквой обозначаются матрица, оператор, и базис подпространства, натянутого на столбцы матрицы. Под равенством полиномов $p_1(\lambda,\mu)$, $p_2(\lambda,\mu)$ понимается совпадение их нулей. Деление полиномов $\frac{p_1}{p_2} = p_3$ означает выполнение равенства $p_1 = p_2 p_3$, где $p_2 =$ОНД$\{p_1, p_2\}$;

$\delta[F_1, F_2] :=$ОНД$\{\varphi[F_1], \varphi[F_2]\}$;

точки $(\lambda, \mu_*) \in \sigma_r[F]$, принадлежащие любому из множеств[1] $\{\sigma_r[F] \cap \sigma_s^+[F]\}$, $\{\sigma_r[F] \cap \sigma_{rs}^+[F]\}$, $\{\sigma_r[F] \cap \sigma_s^-[F]\}$, $\{\sigma_r[F] \cap \sigma_{rs}^-[F]\}$, $(F \in \mathcal{M}_\rho^{m\times n})$, будем относить к "критическим" точкам спектра матрицы F. Эти точки являются неподвижными относительно ΔW-q разложения матрицы F (т.е. разложения вида $FW = [\Delta, 0]$, где $W \in \mathcal{M}_n^{n\times n}$, $\Delta \in \mathcal{M}_\rho^{m\times\rho}$, $\mathbb{O}$ – нулевая $m \times (n-\rho)$ матрица) и относительно ∇V-q-разложения матрицы F (т.е. разложения[2] вида $F = \nabla V$, где $\nabla \in \mathcal{M}_m^{m\times m}$, $V \in \mathcal{M}_m^{m\times n}$, $\sigma_r[\nabla] = \sigma_r[F]$). Так, например, имеют место соотношения: $\sigma_s^+[F] = \sigma_s^-[W_0]$, $\sigma_{rs}^+[F] = \sigma_r[W_1] \cap \sigma_r[W_0]$, $\sigma_{rs}[W] = \sigma_{rs}[F]$.

§1. Структура конечного регулярного спектра

Пусть $F \in \mathcal{M}_\rho^{m\times n}$. Конечный регулярный спектр $\sigma_r[F]$ матрицы F представим в виде:

$$\sigma_r[F] = \sigma_{r1}[F] \cup \sigma_{r2}[F].$$

Множество $\sigma_{r1}[F]$, называемое минимальным регулярным спектром F, состоит из точек $(\lambda, \mu_*) \in \sigma_r[F]$, каждой из которых соответствует ненулевой вектор $y_* = y(\lambda, \mu_*)$, принадлежащий подпространству $\{N_c[F_*] \setminus N_c[F]_*\}$ и удовлетворяющий уравнению $F_* y_* = 0$. Если $F \in \mathcal{M}_n^{m\times n}$, $m \geqslant n$, то $N_c[F]$ есть пустое множество, так что $y_* \in N_c[F_*]$. Полином, нулями которого являются точки множества $\sigma_{r1}[F]$, будем обозначать $\psi_1[F] : (\{\psi_1[F] = 0\} = \sigma_{r1}[F])$.

Множество $\sigma_{r2}[F]$, называемое смешанным регулярным спектром F, есть дополнение $\sigma_{r1}[F]$ до $\sigma_r[F]$: $\sigma_{r2}[F] = \{\sigma_r[F] \setminus \sigma_{r1}[F]\}$.

---

[1] $\sigma_s^+[F]$ и $\sigma_{rs}[F]$ обозначены правый сингулярный спектр F и регулярно сингулярный спектр F (см. [5, 4]).

[2] Алгоритм ∇V-q разложения для $q = 2$ см. [1], для $q > 2$ – готовится к печати.

Для регулярной матрицы $F \in \mathcal{M}_n^{n\times n}$ введем в рассмотрение матрицу $\Phi := [\varphi[F]I_n, F] \in \mathcal{M}_n^{n\times 2n}$, на которую будем ссылаться как на "наследственную" матрицу для F. Очевидно, $\sigma_r[\Phi] = \sigma_r[F]$. Представим $\sigma_r[\Phi]$ в виде

$$\sigma_r[\Phi] = \sigma_{r1}[\Phi] \cup \sigma_{r2}[\Phi],$$

где $\sigma_{r1}[\Phi]$ есть множество точек $(\lambda, \mu_*) \in \sigma_r[\Phi]$, каждой из которых соответствует ненулевой вектор $Y_* = Y(\lambda, \mu_*) \in \{N_c[\Phi_*] \setminus N_c[\Phi]_*\} := \{I\}$, причем $\Phi_* Y_* = \mathbb{O}$. Как следует из вида матрицы $\Phi_* = \Phi(\lambda, \mu_*) = [\mathbb{O}, F_*]$, минимальный базис подпространства $\{I\}$ состоит из векторов $Y_* = \binom{\mathbb{O}}{y_*}$, где y_* есть собственный вектор, соответствующий точке $(\lambda, \mu_*) \in \sigma_{r1}[F]$, так что справедливо равенство

$$\sigma_{r1}[\Phi] = \sigma_{r1}[F].$$

Множество $\sigma_{r2}[\Phi] = \{\sigma_r[\Phi] \setminus \sigma_{r1}[\Phi]\}$ состоит из точек $(\lambda, \mu_*) \in \sigma_r[\Phi]$, каждой из которых соответствует ненулевой вектор $Z_* = Z(\lambda, \mu_*) \in \{N_c[\Phi_*] \cap N_c[\Phi]_*\} := \{II\}$, причем $\Phi(\lambda, \mu_*) Z(\lambda, \mu_*) = \mathbb{O}$. Как следует из вида матрицы $\Phi_* = [\mathbb{O}, F_*]$, минимальный базис подпространства $\{II\}$ состоит из векторов $Z_* = \binom{s(\lambda,\mu_*)}{\mathbb{O}}$, так что $Z(\lambda, \mu)$ является правым полиномиальным решением матрицы $\Phi(\lambda, \mu)$. Учитывая, что $W_0 = \begin{bmatrix} -S \\ T \end{bmatrix}$, T – регулярная матрица (T не имеет нулевых столбцов; уравнение $W_0 x = 0$ не имеет ненулевых решений), заключаем, что полиномиальное решение $Z(\lambda, \mu)$ имеет вид $Z = \binom{s(\lambda,\mu)}{t(\lambda,\mu)}$, где $t(\lambda, \mu) = h(\mu)\widehat{t}(\lambda, \mu)$, вектор $\widehat{t}(\lambda, \mu_*) \neq 0$, полином $h(\mu)$ имеет своим нулем $\mu = \mu_*$. Уравнение $\Phi Z = 0$ в развернутом виде будет

$$F(\lambda, \mu)\widehat{t}(\lambda, \mu) = g(\mu)s(\lambda, \mu), \quad g(\mu) = \frac{\varphi[F]}{h(\mu)},$$

где $g(\mu)$ есть делитель характеристического полинома $\varphi[F]$, $s(\lambda, \mu_*) \neq 0$. Отсюда, $g(\mu)$ есть собственный полином, а $\widehat{t}(\lambda, \mu)$ – порождающий собственный вектор[3] матрицы F.

Из сказанного следует справедливость утверждения.

Теорема 1.1. 1) *Каждой точке* $(\lambda, \mu_*) \in \sigma_{r1}[F]$ *соответствует собственный вектор* y_* *матрицы* F : $y_* = y(\lambda, \mu_*) \in \{N_c[F_*] \setminus N_c[F]_*\}$.

[3] О порождающих собственных векторах см. [5].

2) *Каждой точке* $(\lambda, \mu_*) \in \sigma_{r2}[F]$ *соответствует порождающий собственный вектор* $\widehat{t}(\lambda, \mu_*)$ *и собственный полином* $g(\mu)$*, так что справедливо равенство:*

$$F(\lambda,\mu)\widehat{t}(\lambda,\mu) = g(\mu)s(\lambda,\mu), \quad \widehat{t}(\lambda,\mu_*) \neq 0, \quad s(\lambda,\mu_*) \neq 0,$$

$$g(\mu_*) = 0 \, : \, F(\lambda,\mu_*)\widehat{y}_* = 0,$$

где $\widehat{y}_* := \widehat{t}(\lambda,\mu_*)$ *является собственным вектором матрицы* $F(\lambda,\mu)$*, соответствующим точке* $(\lambda,\mu_*) \in \sigma_{r2}[F]$.

3) $\sigma_r[F] = \sigma_r[\Phi]$, $\sigma_{r1}[F] = \sigma_{r1}[\Phi]$, $\sigma_{r2}[F] = \sigma_{r\lambda}[\Phi]$*; каждой точке* $(\lambda,\mu_*) \in \sigma_{r1}[F]$ *соответствует собственный вектор* $Z_* = \binom{0}{y_*} \in N_c[\Phi_*]$ *матрицы* Φ*; каждой точке* $(\lambda,\mu_*) \in \sigma_{r2}[F]$ *соответствует правое полиномиальное решение* $Z_* = \binom{s_*}{\mathbb{O}}$ *матрицы* Φ $(Z_* \in N_c[\Phi]_*)$.

§2. Неполная относительная факторизация q-параметрической полиномиальной матрицы

2.1. Определение неполной относительной факторизации.

Пусть $F := F(\lambda,\mu) = C_s(\mu)\lambda^s + C_{s-1}(\mu)\lambda^{s-1} + \ldots + C_0(\mu)$, $F \in \mathcal{M}_n^{m\times n}$, $m \geqslant n$. Неполной относительной факторизацией F называется равенство вида

$$F(\lambda,\mu) = Q(\lambda,\mu)P(\mu). \tag{2.1}$$

Здесь $P(\mu)$ регулярная $(q-1)$-параметрическая $n\times n$ матрица, $Q(\lambda,\mu)$ – q-параметрическая $m\times n$ матрица полного столбцового ранга; $\sigma[P] = \sigma_{r1}[F]$, $\sigma_r[Q] = \sigma_{r2}[F]$, $\sigma_s^-[Q] = \sigma_s^-[F]$, $\sigma_{rs}^-[Q] = \sigma_{rs}^-[F]$; уравнение $Qx = 0$ не имеет ненулевых решений.

Теорема 2.1. *Для существования неполной относительной факторизации* (2.1) *матрицы* $F \in \mathcal{M}_n^{m\times n}$ *достаточно выполнения условий*

$$\{\sigma_r[F] \cap \sigma_s^-[F]\} = \varnothing, \quad \{\sigma_r[F] \cap \sigma_{rs}^-[F]\} = \varnothing. \tag{2.2}$$

Доказательство теоремы проведем конструктивно, описывая метод построения факторизации (2.1).

2.2. Метод вычисления неполной относительной факторизации.

Факторизация (2.1) реализуется выполнением следующих операций.

(1) Матрица $F^T(\lambda,\mu) = C_s^T(\mu)\lambda^s + \ldots + C_0^T(\mu)$ представляется в виде

$$F^T(\lambda,\mu) = \mathfrak{A}(\mu)\Lambda, \tag{2.3}$$

где $\mathfrak{A}(\mu) = [C_s^T(\mu), \ldots, C_0^T(\mu)]$ есть $n\times(s+1)m$ полиномиальная $(q-1)$ параметрическая матрица, $\Lambda = \text{block diag}\,\{\lambda^s I_m, \lambda^{s-1} I_m, \ldots, I_m\}$, I_m – единичная $m \times m$ матрица.

(2) Находится ∇V-факторизация матрицы $\mathfrak{A}(\mu)$, т.е. факторизация вида:

$$\mathfrak{A}(\mu) = \nabla(\mu)V(\mu), \tag{2.4}$$

где $\nabla(\mu)$ и $V(\mu)$ – матрицы полного ранга, $\nabla(\mu)$ – регулярная, зависящие от $(q-1)$ параметров: $\sigma_r[\nabla] = \sigma_r[\mathfrak{A}]$. Равенство (2.3) с учетом (2.4) примет вид

$$F(\lambda,\mu) = A^T(\lambda,\mu)\nabla^T(\mu), \quad A(\lambda,\mu) := V(\lambda,\mu)\Lambda. \tag{2.5}$$

(4) Нормируются столбцы матрицы $A^T(\lambda,\mu)$

$$Q(\lambda,\mu) := A^T(\lambda,\mu)\text{diag}\,\{\delta_1^{-1}(\mu), \ldots, \delta_n^{-1}(\mu)\}, \tag{2.6}$$

где $\delta_k(\mu)$, $k = 1, \ldots, n$, есть ОНД компонентов столбца с номером k матрицы $A^T(\lambda,\mu)$.

В результате выполнения операций (1)–(4) с учетом (2.5) и (2.6) будет получена неполная относительная факторизация (2.1) матрицы $F(\lambda,\mu)$, где $P(\mu) = \text{diag}\,\{\delta_1(\mu), \ldots, \delta_n(\mu)\}\nabla^T(\mu)$ есть регулярная матрица; $Q(\lambda,\mu) = A^T(\lambda,\mu)\text{diag}\,\{\delta_1^{-1}(\mu), \ldots, \delta_n^{-1}(\mu)\}$ – столбцово нормированная матрица.

2.3. Обоснование метода неполной относительной факторизации.

Сначала установим, что $\sigma[P] = \sigma_{r1}[F]$. Пусть $\mu = \mu_*$ есть собственное значение, y_* есть собственный вектор регулярной матрицы $P(\mu)$:

$$P(\mu_*)y_* = 0, \quad y_* \neq 0.$$

Из (2.1) имеем $F(\lambda,\mu_*)y_* = Q(\lambda,\mu_*)P(\mu_*)y_* = 0$. Отсюда, учитывая, что F и Q – матрицы полного столбцового ранга, имеем

$$F(\lambda,\mu_*)y_* = 0, \quad y_* \neq 0, \quad y_* \in N_c[F_*].$$

Следовательно, $\sigma[P] \subseteq \sigma_{r1}[F]$.

Докажем обратное включение: $\sigma[P] \supseteq \sigma_{r1}[F]$. Для этого достаточно установить, что $\sigma_{r1}[F] \cap \sigma_r[Q] = \varnothing$.

Доказательство от противного. Допустим, что $\sigma_r[Q]$ содержит точки, принадлежащие $\sigma_{r1}[F]$. Тогда при выполнении (2.2) точка (λ, μ_*) может быть исчерпана из $\sigma_r[Q]$ выполнением следующих операций [1]:

(1) Находится унимодулярная матрица $U(\lambda)$, реализующая ΔW разложение однопараметрической матрицы $Q(\lambda, \mu_*)$.

(2) Вычисляется матрица $Q(\lambda, \mu)U(\lambda)$ и полином $g(\mu)$, т.е. ОНД последнего столбца этой матрицы.

(3) Вычисляется матрица

$$\widehat{Q}(\lambda, \mu) := Q(\lambda, \mu)U(\lambda)\text{block diag}\,\{I_{n-1},\, q^{-1}(\mu)e_n\}. \tag{2.7}$$

Здесь e_n – последний столбец I_n. Очевидно, $\sigma_r[\widehat{Q}]$ отличается от $\sigma_r[Q]$ отсутствием точки (λ, μ_*). Из (2.7) находим

$$Q(\lambda, \mu)U(\lambda) = \widehat{Q}(\lambda, \mu)\text{block diag}\,\{I_{n-1}, q(\mu)e_n\}. \tag{2.8}$$

С учетом того, что $U(\lambda)$ – унимодулярная матрица (следовательно, конечные спектры матриц $Q(\lambda, \mu)$ и $Q(\lambda, \mu)\ U(\lambda)$ совпадают), из (2.8) имеем: нули уравнения $q(\mu) = 0$ являются собственными значениями матрицы $Q(\lambda, \mu)$ с соответствующим им собственным вектором $U(\lambda)e_n$. Последнее утверждение противоречит условию, что $Q(\lambda, \mu)$ есть столбцово нормированная матрица. Противоречие доказывает, что регулярный спектр $Q(\lambda, \mu)$ не содержит точек $\sigma_{r1}[F]$. Следовательно, справедливость равенства

$$\sigma[P] = \sigma_{r1}[F] \tag{2.9}$$

установлена.

Перейдем к доказательству равенства $\sigma_r[Q] = \sigma_{r2}[F]$. С учетом (2.1), (2.2) и (2.9) имеем

$$\sigma_r[F] = \sigma_{r1}[F] \cup \sigma_{r2}[F] = \sigma_r[P] \cup \sigma_r[Q] = \sigma_{r1}[F] \cup \sigma_r[Q].$$

Отсюда $\sigma_r[Q] = \sigma_{r2}[F]$. Справедливость равенств $\sigma_s^-[Q] = \sigma_s^-[F]$, $\sigma_{rs}^-[Q] = \sigma_{rs}^-[F]$ следует из (1.1) и свойств сингулярного и регулярно сингулярного спектров (см. [4, 5]).

2.4. Применение метода построения неполной относительной факторизации.

Как следствия применения метода вычисления неполной относительной факторизации, рассмотрим решение некоторых задач, каждая из которых имеет самостоятельный интерес.

Следствие 2.2. *Если матрица $F \in \mathcal{M}_m^{m\times n}$, $m \leqslant n$, имеет полный строчный ранг, то искомая относительная факторизация F имеет вид*

$$F(\lambda,\mu) = \overline{P}(\mu)\overline{Q}(\lambda,\overline{\mu}) \quad \text{при} \quad m \leqslant n. \tag{2.10}$$

В случае $\rho = m = n$ имеем

$$F(\lambda,\mu) = Q(\lambda,\mu)P(\mu) = \overline{P}(\mu)\overline{Q}(\lambda,\overline{\mu}). \tag{2.11}$$

Здесь $\overline{P}(\mu)$ – регулярная $(q-1)$ параметрическая $m\times m$ матрица; $\overline{Q}(\lambda,\mu) \in \mathcal{M}_m^{m\times n}$; $\sigma_r[\overline{P}] = \sigma_{r1}[F]$; $\sigma_r[\overline{Q}] = \sigma_{r2}[F]$; $\sigma_s^+[\overline{Q}] = \sigma_s^+[F]$; $\sigma_{rs}^+[\overline{Q}] = \sigma_{rs}^+[F]$.

Для существования (2.10) достаточно выполнения условий

$$\{\sigma_r[F] \cap \sigma_s^+[F]\} = \varnothing, \quad \{\sigma_r[F] \cap \sigma_{rs}^+[F]\} = \varnothing.$$

Для существования (2.11) достаточно выполнения условий

$$\{\sigma_r[F] \cap \sigma_{rs}^+[F]\} = \varnothing, \quad \{\sigma_r[F] \cap \sigma_{rs}^-[F]\} = \varnothing.$$

Следствие 2.3. *Метод неполной относительной факторизации матрицы $F \in \mathcal{M}_n^{m\times n}$ позволяет разделить $\sigma_r[F]$ на минимальный регулярный спектр $\sigma_{r1}[F]$ и смешанный регулярный спектр $\sigma_{r2}[F] : \sigma_{r1}[F] = \sigma_r[P]$, $\sigma_{r2}[F] = \sigma_r[Q]$. Его можно рассматривать как метод исчерпывания из $\sigma_r[F]$ как минимального регулярного спектра, так и смешанного регулярного спектра.*

Следствие 2.4. *Пусть F есть q-параметрическая полиномиальная матрица, регулярный спектр которой не зависит от $r \leqslant q-1$ параметров $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_r$. Тогда в условиях неполной относительной факторизации имеют место следующие равенства:*

$$F(\mu_1,\ldots,\mu_q) = Q(\mu_1,\ldots,\mu_q)\prod_{k=2}^{r} Q_{k,k+1,\ldots,q}(\mu_k,\overline{\mu}_{q-k}), \tag{2.12}$$

если F имеет полный столбцовый ранг $n \leqslant m$;

$$F(\mu_1,\ldots,\mu_q) = \prod_{k=r}^{2} \overline{Q}_{k,k+1,\ldots,q}(\mu_k,\overline{\mu}_{q-k})\overline{Q}(\mu_1,\ldots,\mu_q), \tag{2.13}$$

если F имеет полный строчный ранг $m \leqslant n$.

Здесь $\overline{\mu}_{q-k}$ – мультииндекс $\overline{\mu}_{n-k} = \mu_{k+1},\ldots,\mu_q$; $Q_{k,k+1,\ldots,q}(\mu_k, \overline{\mu}_{q-k})$ – регулярная $n\times n$ матрица, зависящая от параметров

μ_k, $\mu_{k+1}, \dots, \mu_q$, и не имеющая своими правыми делителями регулярных матриц, зависящими от параметров $\mu_{k+1}, \dots, \mu_q$; $\sigma_r[Q_{k,k+1,\dots,q}]$ не зависит от μ_k, $k \leqslant r \leqslant q-1$, $\sigma_r[Q_q] = \varnothing$. Аналогично, $\overline{Q}_{k,k+1,\dots,q}(\mu_k, \overline{\mu}_{q-k})$ – регулярная $m \times m$ матрица, не имеющая своими левыми делителями матриц, зависящих от параметров $\mu_{k+1}, \mu_{k+2}, \dots, \mu_q$.

Наряду с матричными равенствами имеют место следующие равенства между скалярными полиномами

$$\varphi[F] = \varphi[Q_{1,\dots,q}]\varphi[Q_{2,\dots,q}]\dots\varphi[Q_{r,\dots,q}], \tag{2.14}$$

где $\varphi[Q_{k,\dots,q}]$ есть полином от переменных $\mu_k, \mu_{k+1}, \dots, \mu_q$, не имеющий своими делителями полиномов от переменных $\mu_{k+1}, \mu_{k+2}, \dots, \mu_q$, $k \leqslant r$.

Справедливость (2.12), (2.13) следует соответственно из равенств (2.1) и (2.10), если последние рассматривать как типичный элементарный шаг метода неполной относительной факторизации для реализации рекурсии по числу параметров.

Разложения (2.12), (2.13) можно рассматривать как разложение q-параметрической полиномиальной матрицы F в произведении "примитивных" матриц. Разложение (2.14) есть разложение характеристического полинома $\varphi[F]$ в произведении "примитивных" полиномов.

Следствие 2.5. *Пусть $F(\lambda, \mu)$ – q-параметрическая $m \times n$ матрица ранга ρ; W_0 есть базис $N_c[F]$, вычисленный применением ΔW-q факторизации к F, так что $W_0 \in \mathcal{M}_{n-\rho}^{n\times(n-\rho)}$. Метод неполной относительной факторизации матрицы W_0 ($W_0 = QP$) позволяет базис W_0 преобразовать в базис Q того же нуль-пространства $N_c[F]$, для которого уравнение $Qx = 0$ не имеет ненулевых решений.*

Справедливость следует из свойств метода.

Замечание. При наличие критических точек (2.2) в спектре матрицы F, регулярные спектры матрицы Q в равенстве (2.1), матрицы $\overline{Q}$ в равенстве (2.10), будут содержать эти точки.

§3. Наследственные полиномы и методы их вычисления

3.1. Определение и свойства наследственных полиномов.

Пусть $F \in \mathcal{M}_n^{n\times n}$, $\sigma_r[F] := \{\varphi[F] = 0\}$, $\sigma_{r1} := \{\psi_1[F] = 0\}$. Введем в рассмотрение последовательности матриц

$$\{\Phi_k\}, \quad \{S_k\}, \quad \{V_{k+1}^{(2)}\}, \quad k = 0, 1, \dots, n-1. \tag{3.1}$$

Здесь $\Phi_k = \{\psi_1[S_k]I_n, S_k\} \in \mathcal{M}_n^{n\times 2n}$; $\Phi_k = \nabla_k V_k$ есть ∇V-q разложение матрицы Φ_k, так что по свойствам ∇V-q разложения имеют место следующие равенства:

$$\nabla_k := \nabla_k(\lambda,\mu) \in \mathcal{M}_n^{n\times n}, \quad \sigma_r[\nabla_k] = \{\varphi[\Phi_k] = 0\};$$

$$V_k := V_k(\lambda,\mu) = [V_{k+1}^{(1)}, V_{k+1}^{(2)}] \in \mathcal{M}_n^{n\times 2n} \ : \quad V_{k+1}^{(1)} := V_{k+1}^{(1)}(\lambda,\mu) \in \mathcal{M}_n^{n\times n},$$

$$V_{k+1}^{(2)} := V_{k+1}^{(2)}(\lambda,\mu) \in \mathcal{M}_n^{n\times n}; \quad S_{k+1} = V_{k+1}^{(2)}, \quad S_0 = F.$$

Каждой точке $(\lambda,\mu_*) \in \sigma_r[F]$ поставим в соответствие число $l := l_*[F]$, удовлетворяющее условиям

$$(\lambda,\mu_*) \in \{\sigma_r[\Phi_0] \cap \sigma_r[\Phi_1] \cap \ldots \cap \sigma_r[\Phi_{l-1}]\}, \quad (\lambda,\mu_*) \notin \sigma_r[\Phi_l]. \quad (3.2)$$

Учитывая, что $\sigma_r[\Phi_k] = \sigma_r[S_k] = \psi_1[S_k]$, $k = 0,1,\ldots,n-1$, соотношение (3.2) можно записать в виде

$$(\lambda,\mu_*) \in \{\sigma_r[S_0] \cap \sigma_r[S_1] \cap \ldots \cap \sigma_r[S_{l-1}]\}, \quad (\lambda,\mu_*) \notin \sigma_r[S_l],$$

так что l есть число полиномов из последовательности $\{\psi_1[S_k]\}$, $k = 0,1,\ldots,n-1$, для которых точка (λ,μ_*) является нулем. Число $l = l_*[F]$, удовлетворяющее (3.2), будем называть *уровнем наследственности* точки (λ,μ_*), принадлежащей $\sigma_r[F]$. На матрицу Φ_k будем ссылаться как на *наследственную матрицу уровня* k относительно спектра матрицы F.

Очевидно, имеют место равенства

$$l_*[\Phi_k] = l_*[\Phi_{k+1}] + 1, \quad l_*[F] = l_*[\Phi_k] + k.$$

Полином $\psi_k[F] \equiv \psi_k(\mu)$, нули которого совпадают с точками $(\lambda,\mu_*) \in \sigma_r[F]$, имеющими уровень наследственности не меньше числа k, будем называть *наследственным* полиномом относительно $\sigma_r[F]$ уровня не меньше k. Так что характеристический полином $\varphi[F]$ матрицы F является наследственным полиномом матрицы F уровня не меньше единицы.

Полином $\psi_k[F] \equiv \psi_k(\mu)$, нули которого имеют уровень наследственности равный числу k, называется *наследственным полиномом уровня* k относительно $\sigma_r[F]$. Полином $\psi_1[F]$ будем называть также *минимальным наследственным* полиномом. Его нули совпадают с точками $\sigma_{r1}[F]$, минимального регулярного спектра матрицы F.

Последовательность $\{\psi_k[F]\}_{k=1,\dots,n}$ будем называть последовательностью наследственных полиномов матрицы F.

Из определения полиномов $\varphi_k[F]$ и $\psi_k[F]$, $k=0,\dots,n-1$, очевидны следующие свойства.

1°.

$$\psi_k(\mu)=\frac{\varphi_{k-1}(\mu)}{\varphi_k(\mu)},\quad k=1,\dots,n,\ \ \psi_k(\mu)\neq\mathrm{const}$$

для $k<n$, $\varphi_n(\mu)=\mathrm{const}$, $\varphi_0(\mu)=\varphi(\mu)$.

2°.

$$\varphi_k(\mu)=\psi_{k+1}(\mu)\varphi_{k+1}(\mu),\quad k=0,1,\dots,n-1.$$

3°.

$$\varphi(\mu)=\psi_1(\mu)\psi_2(\mu)\dots\psi_{n-1}(\mu).$$

4°. Каждый последующий полином последовательности $\{\psi_k(\mu)\}$, начиная со второго, является делителем предыдущего полинома.

Замечания. 1. Наследственный полином и последовательность из наследственных полиномов, введенных для q-параметрических матриц $F(\lambda,\mu)$, спектр которых не зависит от спектрального параметра λ, обобщают понятия инвариантного полинома и последовательности инвариантных полиномов для матриц $F(\lambda)$.

Справедливость следует из совпадения свойств 1°–4° с аналогичными свойствами для инвариантных полиномов (см. [2, 7]).

2. Точки спектров матриц $P(\mu)$ и Q (матриц $\overline{P}(\mu)$ и $\overline{Q}(\mu)$), входящих в неполную относительную факторизацию (2.1) и (2.10) матрицы F, имеют уровень наследственности относительно спектра F соответственно, равным $l_*[P]=1$, $\det P=\psi_1[F]$ и $l_*[Q]\geqslant 2$, $\varphi[Q]=\varphi_1[F]$ ($l_*[\overline{P}]=1$, $l_*[\overline{Q}]\geqslant 2$).

Лемма 3.1. *Характеристические полиномы матриц последовательности* $\{S_k\}$ *из* (3.1) *удовлетворяют равенству*

$$\varphi[S_{k+1}]=\varphi_1[S_k],\quad k=0,1,\dots,n-1. \tag{3.3}$$

Действительно, из равенства $\Phi_k=\nabla_k V_k$ имеем

$$[\psi_1[S_k]I,S_k]=\nabla_k V_k=[\nabla_k V_{k+1}^{(1)},\nabla_k V_{k+1}^{(2)}]. \tag{3.4}$$

Отсюда с учетом того, что $\sigma_r[\nabla_k]=\sigma_r[\Phi_k]=\{\psi_1[S_k]=0\}$, находим $\varphi[S_k]=\psi_1[S_k]\varphi[V_{k+1}^{(2)}]$. С другой стороны, из свойств наследственных полиномов $\varphi[S_k]=\psi_1[S_k]\varphi_1[S_k]$, так что $\varphi[V_{k+1}^{(2)}]=\varphi_1[S_k]$, что и доказывает (3.3), если учесть, что $S_{k+1}:=V_{k+1}^{(2)}$.

Лемма 3.2. *Для любого $k = 0, 1, \ldots, n-1$ справедливы равенства*

$$\varphi[S_k] = \psi_1[S_k]\varphi[S_{k+1}], \tag{3.5}$$

$$\varphi[S_k] = \varphi_k[F], \tag{3.6}$$

$$\psi[S_k] = \psi_{k+1}[F]. \tag{3.7}$$

Справедливость (3.5) следует из (3.3) и свойств наследственных полиномов:

$$\varphi[S_k] = \psi_1[S_k]\varphi_1[S_k] = \psi_1[S_k]\varphi[S_{k+1}].$$

Доказательства (3.5) и (3.6) проведем по индукции. При $k = 0$ с учетом (3.5) имеем

$$\varphi[S_0] = \varphi[F] = \psi_1[F]\varphi[S_1].$$

С другой стороны, по свойствам наследственных полиномов $\varphi[F] = \psi_1[F]\varphi_1[F]$, так что выполняется равенство

$$\varphi[S_1] = \varphi_1[F] \equiv \varphi[S_0]. \tag{3.8}$$

Далее с учетом равенств $\varphi[S_1] = \psi_1[S_1]\varphi_1[S_1] = \psi_1[S_1]\psi_2[S_1] \ldots \psi_{k-1}[S_1]$ и равенств $\varphi_1[F] = \psi_1[F]\varphi_2[F] = \psi_2[F]\psi_3[F] \ldots \psi_{k-1}[F]$, имеем

$$\psi_1[S_1] = \psi_2[F] \equiv \psi_2[S_0]. \tag{3.9}$$

Основание для индукции (равенства (3.8) и (3.9)) получено. Допустим, что (3.6) и (3.7) выполняются для любого $i \leqslant k$ и докажем для $i = k+1$.

С учетом (3.5) имеем:

$$\varphi[S_k] = \psi_1[S_k]\varphi[S_{k+1}].$$

По предположению $\varphi[S_k] = \varphi_k[F]$, $\psi_1[S_k] = \psi_{k+1}[F]$, так что

$$\varphi_k[F] = \varphi[S_k] = \psi_1[S_k]\varphi_1[S_{k+1}] = \psi_{k+1}[F]\varphi[S_{k+1}]. \tag{3.10}$$

Далее, по свойствам наследственных полиномов,

$$\varphi_k[F] = \psi_{k+1}[F]\varphi_{k+1}[F]. \tag{3.11}$$

Тогда из (3.10) и (3.11) получим

$$\varphi[S_{k+1}] = \varphi_{k+1}[F] = \psi_{k+2}[F]\varphi_{k+2}[F],$$

при этом

$$\varphi[S_{k+1}] = \psi_1[S_{k+1}]\varphi_1[S_{k+1}],$$

так что

$$\varphi[S_{k+1}] = \varphi_{k+2}[F]; \quad \psi_1[S_{k+1}] = \psi_{k+2}[F]. \tag{3.12}$$

Равенства (3.11) и (3.12) завершают доказательство леммы.

Следствие 3.3. *Уровнем наследственности точки* $(\lambda, \mu_*) \in \sigma_r[F]$ *называется число наследственных полиномов из последовательности* $\{\psi_k[F]\}$, $k = 1, \dots, n-1$, *для которых точка* (λ, μ_*) *является нулем, так что число* $l = l_k[F]$ *удовлетворяет соотношениям*

$$\begin{gathered}(\lambda, \mu_*) \in \{\psi_1[F] = 0\} \cap \{\psi_2[F] = 0\} \cap \dots \{\psi_l[F] = 0\}; \\ (\lambda, \mu_*) \notin \{\psi_{l+1}[F] = 0\}.\end{gathered} \tag{3.13}$$

Справедливость (3.13) *следует из* (3.2) *и* (3.7).

3.2. Методы вычисления наследственных полиномов.

Пусть $F = F(\lambda, \mu) \in \mathcal{M}_m^{m \times n}$. Требуется найти последовательность наследственных полиномов $\{\psi_k[F]\}$, $k = 1, \dots, n-1$, матрицы F и матрицу $\widehat{F}(\lambda, \mu)$, конечный регулярный спектр которой отличается от спектра $F(\lambda, \mu)$ отсутствием нулей наследственных полиномов. Ниже предлагаются два метода (ΨV-q и ΨW-q), решающих эту задачу.

<u>ΨV-q метод</u> состоит из конечного числа типичных шагов. Каждый шаг вычисляет полином $\psi_k[F] \equiv \psi_k(\mu)$ и матрицу S_k, спектр которой не содержит нулей $\psi_k(\mu)$.

Рассмотрим первый (типичный) шаг.

Начальными данными являются матрица $S = F$. Выполняются следующие операции.

(1) Вычисляется неполная относительная факторизация матрицы F, с помощью метода из §2:

$$F = PG,$$

где $P = P(\mu)$ есть регулярная $m \times m$ матрица.

(2) Вычисляется полином $\psi := \det P$.

Эта операция может быть выполнена методом следов Д. К. Фаддеева, примененным к полиномиальной q-параметрической матрице [1, 3].

(3) Формируется $m \times (m+n)$ матрица

$$\Phi := [\psi I_m, S].$$

(4) Вычисляется ∇V-разложение матрицы Φ:

$$\Phi = \nabla V$$

(где $\nabla = \nabla(\lambda, \mu) \in \mathcal{M}_m^{m \times m}$, $V = V(\lambda, \mu) \in \mathcal{M}_m^{m \times (m+n)}$, $V = [V_1, V_2]$, $V_1 \in \mathcal{M}_m^{m \times m}$, $V_2 \in \mathcal{M}_m^{m \times n}$) с использованием алгоритма ∇V-q факторизации m.

Если $\psi \neq \mathrm{const}$, осуществляется переход к следующему шагу с начальными данными $S := V_2$. В противном случае выполнение операций (1)–(4) прекращается.

Теорема 3.4. *Если $F \in \mathcal{M}_n^{m\times n}$ и $\sigma_r[F]$ не имеет критических точек, то результатом ΨV-метода являются*

1) последовательность наследственных полиномов $\{\psi_k[F]\}$, $k = 1,\dots,n$, матрицы F,

2) последовательность матриц $\{S_k\}$, $k = 0,1,\dots,n-1$. Регулярный спектр матрицы S_{k+1} отличается от регулярного спектра матрицы S_k, отсутствием нулей полинома $\psi_{k+1}[F]$; регулярный спектр каждой их матриц S_k, $k = 1,\dots,n-1$, отличается от регулярного спектра начальной матрицы F отсутствием нулей полиномов $\psi_1[F],\dots,\psi_k[F]$; $S_n(\lambda,\mu)$ есть искомая матрица $\widehat{F}(\lambda,\mu)$.

Справедливость теоремы следует из леммы 3.2.

Теорема 3.5. *Если $\sigma_r[F]$ не содержит критических точек, то в условиях ΨV-q-метода имеют место следующие свойства.*

1°.

$$F(\lambda,\mu) = \nabla_0(\lambda,\mu)\nabla_1(\lambda,\mu)\dots\nabla_k(\lambda,\mu)V_{k+1}^{(2)}(\lambda,\mu),$$

$$\varphi[F] = \psi_1(\mu)\psi_2(\mu)\dots\psi_{k+1}(\mu)\varphi_{k+1}(\mu).$$

2°.

$$F(\lambda,\mu) = \nabla_0(\lambda,\mu)\nabla_1(\lambda,\mu)\dots\nabla_{n-1}(\lambda,\mu)V_n^{(2)}(\lambda,\mu),$$

$$\varphi(\lambda,\mu) = \psi_1[F]\dots\psi_{n-1}[F], \quad \psi_n = \mathrm{const}, \quad \varphi[V_n^{(2)}] = \mathrm{const}\,.$$

3° $\nabla_k(\lambda,\mu)\nabla_{k+1}^{-1}(\lambda,\mu)$– регулярная матрица.

Справедливость 1° и 2° следует из равенств

$$S_k := V_k^{(2)}(\lambda,\mu) = \nabla_k(\lambda,\mu)V_{k+1}^{(2)},$$

где $\varphi[\nabla_k] = \psi_1[S_k]$, $k = 1,\dots,n-1$, $S_0 = F$; из леммы 3.2 и свойств наследственных полиномов.

Справедливость 3° следует из свойств наследственных полиномов:

$$\frac{\varphi[\nabla_k]}{\varphi[\nabla_{k+1}]} = \psi_{k+1}[F].$$

<u>ΨW-q метод</u> состоит из конечного числа типичных шагов. Каждый шаг вычисляет наследственный полином $\psi_k[F]$ и матрицу

S_k, конечный регулярный спектр $\sigma_r[S_k]$ которой отличается от $\sigma_r[S_{k-1}]$ отсутствием нулей полинома $\psi_k[F]$.

Рассмотрим (типичный) первый шаг. Начальными данными являются матрица $S := F$. Выполняются следующие операции.

(1) Вычисляется неполная относительная факторизация матрицы F:

$$F = PQ$$

(где $P = P(\mu)$ – регулярная $m \times m$ матрица) методом из §2.

(2) Вычисляется полином $\psi := \det P$, например, методом следов Д. К. Фаддеева применительно к многопараметрической полиномиальной матрице.

(3) Формируется $m \times (m+n)$ матрица

$$\Phi := [\psi I_m, S].$$

(4) Находится $(m+n) \times n$ матрица $W_0 \in N_c[\Phi]$ такая, что уравнение $W_0 x = 0$ не имеет ненулевых решений. С этой целью выполняются следующие операции.

(4.1) Используя ΔW-q метод, вычисляется матрица $\widetilde{W}_0$:

$$\Phi\widetilde{W} = [\widetilde{\Delta}, 0], \quad \widetilde{W} = [\widetilde{W}_1, \widetilde{W}_0], \quad \widetilde{W}_0 = N_c[\Phi].$$

(4.2) Используя метод неполной относительной факторизации ($\widetilde{W}_0 = QP$), базис $\widetilde{W}_0$ преобразуется в базис $\widehat{W}_0 := Q \equiv \begin{bmatrix} -\widehat{S} \\ \widehat{T} \end{bmatrix}$ такой, что $\widehat{W}_0 \in \mathcal{M}_n^{(m+n)\times n}$, и уравнение $\widehat{W}_0 x = 0$ не имеет ненулевых решений. Здесь $\widehat{T} \in \mathcal{M}_n^{n\times n}$, $\widehat{S} \in \mathcal{M}_n^{m\times n}$.

Если $\psi \neq \mathrm{const}$, осуществляется переход к следующему шагу с начальными данными $S := \widehat{S}$. В противном случае выполнение операций (1)–(4) прекращается.

Теорема 3.6. *Результатом работы ΨW-q метода являются*

1) *последовательность $\{\psi_k[F]\}$, $k = 1, \dots, n$, наследственных полиномов матрицы F;*

2) *последовательность матриц $\{S_k\}$, $k = 0, 1, \dots, n-1$, где $\sigma_r[S_k]$ отличается от $\sigma_r[F]$ отсутствием нулей полиномов $\psi_1[F], \dots, \psi_k[F]$. Матрица $S_n(\lambda, \mu)$ является искомой матрицей $\widehat{F}(\lambda, \mu)$.*

Лемма 3.7. *Пусть на фиксированном шаге* k ΨW-q *метода вычислены матрицы* $\Phi := \Phi_k[\psi_1[\widehat{S}_k]I, \widehat{S}_k]$, $\widehat{W}_0 = W_0^{(k)} = \begin{bmatrix} \widehat{S} \\ \widehat{T} \end{bmatrix}$, *где* $\widehat{W}_0 = N_c[\Phi]$, $\widehat{W}_0 x = 0$ *не имеет ненулевых решений. Обозначим через* $\widehat{V}$ *матрицу, реализующую* ∇V*-факторизацию матрицы* Φ : $\Phi = \widehat{\nabla}\widehat{V}$, $\sigma_r[\widehat{\nabla}] = \psi_1[S_k]$, $\widehat{V} = [V_1, V_2]$, $V_1 := \widehat{V}_{k+1}^{(1)}$, $V_2 := \widehat{V}_{k+1}^{(2)}$. *Тогда (в условии, когда исходная матрица* F *не имеет критических точек) справедливо равенство*

$$\varphi[\widehat{S}_{k+1}] = \varphi[\widehat{V}_{k+1}^{(2)}], \quad k = 0, 1, \ldots, n-1. \tag{3.14}$$

Доказательство. Матрицы $\widehat{W}_0$ и $\widehat{U}_0 := \begin{bmatrix} -V_2 \\ V_1 \end{bmatrix}$ образуют базисы одного и того же подпространства $N_c[\Phi]$. Из уравнений $\Phi\widehat{W}_0 = 0$, $\Phi\widehat{U}_0 = 0$ с учетом равенства $\Phi = [\widehat{\nabla}V_1, \widehat{\nabla}V_2]$ имеем

$$\frac{\varphi[V_1]}{\varphi[V_2]} = \frac{(\psi_1[\widehat{S}])^{n-1}}{\varphi_1[\widehat{S}]} = \frac{\varphi[\widehat{T}]}{\varphi[\widehat{S}]},$$

так что[4] $\delta[V_1, V_2] = \delta[\widehat{T}, \widehat{S}]$. Принимая во внимание равенства $\varphi[V_1] = (\psi_1[\widehat{S}])^{n-1}$, $\varphi[V_2] = \varphi_1[\widehat{S}]$, имеем

$$\varphi[\widehat{U}_0] = \delta[V_1, V_2] = \delta[\widehat{T}, \widehat{S}], \quad \{\delta[\widehat{T}, \widehat{S}] = 0\} \supseteq \{\varphi[\widehat{W}_0] = 0\}.$$

По условию $\widehat{W}_0$, $\widehat{U}_0$ суть базисы $N_c[\Phi]$ такие, что уравнения $\widehat{W}_0 x = 0$, $\widehat{U}_0 x = 0$ не имеют ненулевых решений. Тогда из соотношений $\{\varphi[\widehat{U}_0] = 0\} \supseteq \{\varphi[\widehat{W}_0] = 0\}$ следует, что матрицы $\widehat{U}_0$ и $\widehat{W}_0$ удовлетворяют равенству

$$\widehat{U}_0 = \widehat{W}_0 \Omega,$$

где Ω есть унимодулярная матрица, так что $V_2 = \widehat{S}\Omega$, т.е. при любом $k = 0, 1, \ldots, n-1$ имеет место равенство (3.14), что и требовалось доказать.

Вернемся к обоснованию ΨW-q метода. С учетом справедливости леммы 3.7, доказательство теоремы 3.6 проводится аналогично обоснованию ΨV-q метода (доказательству Леммы 3.2 и Теоремы 3.4).

[4] $\delta[A, B] :=$ ОНД $\{\varphi[A], \varphi[B]\}$.

Замечания. 1) Если $\sigma_r[F]$ содержит критические точки, то окончанием работы каждого из ΨV-q и ΨW-q методов является выполнение равенства $\varphi[S_n] = \varphi[S_{n+1}] \neq \mathrm{const}$. В этом случае $\sigma_r[S_n]$ содержит критические точки регулярного спектра начальной матрицы F.

2) Операции (1), (2) вычисления $\psi_1[S_k]$, $k = 0, \dots, n-1$ для $F \in \mathcal{M}_n^{n\times n}$ в каждом из ΨV и ΨW методов можно заменить следующими:

(а) вычислить $B[S_k]$ и $\varphi[S_k]$, т.е. присоединенную матрицу для S_k и ее характеристический полином;

(б) найти $\delta[B_k]$, т.е. ОНД всех элементов матрицы $B[S_k]$;

(в) вычислить $\psi_1[S_k] = \frac{\varphi[S_k]}{\delta[B_k]}$.

(3) Если $F \in \mathcal{M}_n^{m\times n}$, т.е. является сингулярной матрицей, то в качестве исходной матрицы F в обоих методах следует взять регулярную матрицу $\nabla(\lambda, \mu)$ из ∇V-q разложения матрицы F^T.

3.3. Применение ΨV- и ΨW-q методов.

3.3.1. Вычисление свободного базиса $N_c[F]$.

Пусть $F = F(\lambda, \mu)$ есть q-параметрическая полиномиальная $m \times n$ матрица ранга ρ. Задача состоит в вычислении базиса $U_0[F]$ подпространства $N_c[F]$, конечный регулярный спектр которого есть пустое множество (свободного базиса). В предположении, что спектр матрицы F не содержит критических точек, для построения U_0 может быть использован любой из рассмотренных в п. 3.2 методов исчерпывания наследственных полиномов.

Алгоритм вычисления U_0 состоит из двух стадий. На первой стадии находится базис $N_c[F]$, регулярный спектр которого не зависит от ведущего параметра λ при записи F в виде $F(\lambda, \mu) = \sum_{k=0}^{s} C_k(\mu)\lambda^k$. Обозначим этот базис $\widetilde{W}_0(\lambda, \mu)$. Он может быть найден применением алгоритма ΔW-q разложения к матрице F: $F\widetilde{W} = [\widetilde{\Delta}, \mathbb{O}]$, $\widetilde{W} = [\widetilde{W}_1, \widetilde{W}_0]$.

На второй стадии из регулярного спектра $\widetilde{W}_0$ исчерпываются нули наследственных полиномов матрицы $\widetilde{W}_0$. Эта операция реализуется применением к $\widetilde{W}_0$ любого из ΨV-q или ΨW-q методов.

3.3.2. Модификация ΔW-q метода.

Пусть F есть q-параметрическая полиномиальная $m \times n$ матрица ранга ρ ($q \geqslant 2$);

$$F(\lambda, \mu)W(\lambda, \mu) = [\Delta(\lambda, \mu), \mathbb{O}] \tag{3.15}$$

есть ΔW-q факторизация F: $W(\lambda,\mu)$ есть $n\times n$ регулярная матрица из множества $\mathcal{M}_n^{n\times n}$, $W(\lambda,\mu)=[W_1(\lambda,\mu),W_0(\lambda,\mu)]$, где $W_1(\lambda,\mu)\in\mathcal{M}_\rho^{n\times\rho}$, $W_0(\lambda,\mu)\in\mathcal{M}_{n-\rho}^{n\times(n-\rho}$; $W_0\in N_c[F]$; $\Delta(\lambda,\mu)$ – $m\times n$ матрица ранга ρ, $\sigma_r[\Delta]=\sigma_r[F]\cup\sigma_r[W_1]$.

Модификация ΔW-q метода состоит в переходе от равенства (3.15) к равенству

$$F(\lambda,\mu)U(\lambda,\mu)=[\nabla(\lambda,\mu),\mathbb{O}], \tag{3.16}$$

где $U=[U_1,U_0]$ регулярная $n\times n$ матрица из $\mathcal{M}_n^{n\times n}$, $U_1\in\mathcal{M}_\rho^{n\times\rho}$, $U_0\in\mathcal{M}_{n-\rho}^{n\times(n-\rho)}$, $U_0=N_c[F]$. Матрицы U_1 и U_0 отличаются от матриц W_1 и W_0 соответственно отсутствием в $\sigma_r[U_1]$ и $\sigma_r[U_0]$ наследственных полиномов, так что регулярный спектр $\nabla(\lambda,\mu)$ отличается от регулярного спектра $\Delta(\lambda,\mu)$ отсутствием наследственных полиномов, принадлежащих матрице $W_1(\lambda,\mu)$; базис U_0 отличается от базиса W_0 нуль-пространства $N_c[F]$ отсутствием наследственных полиномов, принадлежащих матрице W_0.

Вычисление U можно реализовать любым из методов ΨV-q или ΨW-q, применяемым к матрицам W_1 и W_0 для исчерпывания из каждой наследственных полиномов.

Замечание. Если регулярный спектр каждой из матриц W_1 и W_0 состоит только из нулей наследственных полиномов этих матриц, то $\sigma_r[\nabla]=\sigma_r[F]$. U_0 есть свободный базис $N_c[F]$. Если при этом $F\in\mathcal{M}_n^{n\times n}$ и $\sigma_{rs}[F]=\varnothing$, то матрица U, реализующая разложение (3.16), является унимодулярной матрицей по всем параметрам. В этом случае $\sigma_r[\nabla]=\sigma_r[F]$, столбцы U_0 образуют базис $N_c[F]$, составленный из столбцов унимодулярной матрицы.

Литература

1. В. Н. Кублановская, *Методы и алгоритмы решения спектральных задач для полиномиальных и рациональных матриц*. Зап. научн. семин. ПОМИ, **238** (1997), 7–329.
2. Ф. Р. Гантмахер, *Теория матриц*. Наука, М. (1967).
3. В. Н. Кублановская, *Некоторый подход к решению многопараметрических задач*. Зап. научн. семин. ПОМИ, **295** (1995), 191–246.
4. В. Н. Кублановская, *Применение метода ранговой факторизации к анализу спектральных характеристик многопараметрической полиномиальной матрицы*. Зап. научн. семин. ПОМИ, **268** (2000), 115–144.
5. В. Б. Хазанов, *О собственных порождающих векторах многопараметрической полиномиальной матрицы*. Зап. научн. семин. ПОМИ, **248** (1998), 165–186.

6. В. Н. Кублановская, В. Б. Хазанов, *Относительная факторизация многочленов от нескольких переменных.* Ж. вычисл. матем. и матем. физики, **36**, No. 8 (1996), 6–11.
7. В. Н. Кублановская, *Вычисление инвариантных многочленов полиномиальной матрицы.* 2. Зап. научн. семин. ПОМИ, **284** (2002), 128–142.

Kublanovskaya V. N. To solving multiparameter problems of algebra. 1. Methods for computing complete polynomials and their applications.

The notion of a complete polynomial of a multiparameter polynomial matrix, generalizing that of an invariant polynomial of a one-parameter polynomial matrix, is introduced. Methods for computing complete polynomials are suggested. Applications of these methods to various spectral problems for polynomial matrices are considered.

Санкт-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова

Поступило 4 февраля 2002 г.