Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 284, 2002 г.

В. Н. Кублановская, В. Б. Хазанов

К РЕШЕНИЮ ЧАСТИЧНОЙ ПРОБЛЕМЫ СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ ДЛЯ ПОЛИНОМИАЛЬНЫХ МАТРИЦ

1. Порождающие векторы и их свойства. Пусть $F(\lambda)$ – полиномиальная $m \times n$ матрица ранга ρ. Конечный спектр $\sigma_c[F]$ матрицы $F(\lambda)$ определяется как множество всех нулей системы нелинейных алгебраических уравнений

$$F\begin{pmatrix} i_1, i_2, \dots, i_\rho \\ j_1, j_2, \dots, j_\rho \end{pmatrix} = 0, \quad \begin{matrix} 1 \leqslant i_1 < i_2 < \ldots < i_\rho \leqslant m \\ 1 \leqslant j_1 < j_2 < \ldots < j_\rho \leqslant n \end{matrix}.$$

Левые части уравнений системы представляют собой всевозможные миноры порядка ρ матрицы $F(\lambda)$ размеров $m \times n$, так что эта система состоит из $N = C_m^\rho C_n^\rho$ уравнений. Полином $\varphi[F] \equiv \varphi(\lambda)$, являющийся наибольшим общим делителем этих миноров, называется *характеристическим полиномом* матрицы $F(\lambda)$. Нули полинома $\varphi(\lambda)$, с учетом их кратностей, полностью определяют $\sigma_c[F]$.

Полиномиальный вектор $x(\lambda)$, компоненты которого являются взаимно простыми полиномами (т.е. который не обращается в нуль ни при каких значениях параметра λ) будем называть *свободным вектором*.

Свободный полиномиальный n-мерный вектор $x(\lambda)$ будем называть *правым порождающим собственным вектором* $m \times n$ матрицы $F(\lambda)$, отвечающим ее *собственному полиному* $\chi(\lambda)$, если имеет место соотношение

$$F(\lambda)x(\lambda) = \chi(\lambda)z(\lambda), \tag{1}$$

где $z(\lambda)$ – свободный m-мерный вектор.

Основное свойство введенных характеристик состоит в том, что любой нуль λ^* полинома $\chi(\lambda)$ является собственным значением матрицы $F(\lambda)$, а вектор $x(\lambda^*)$ является соответствующим

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант 02-01-00095).

ему правым собственным вектором:

$$F(\lambda^*)x(\lambda) = 0.$$

Собственный полином $\chi(\lambda)$ является делителем характеристического полинома $\varphi(\lambda)$ матрицы $F(\lambda)$.

Свободный полиномиальный n-мерный вектор $x(\lambda)$ будем называть *правым порождающим корневым вектором высоты* $t+1$ матрицы $F(\lambda)$, отвечающим ее кратному собственному значению $\lambda^* \in \sigma_c[F]$, если имеют место соотношения

$$\frac{d^k}{d\lambda^k}[F(\lambda)x(\lambda)]\big|_{\lambda=\lambda^*} = 0, \quad k = 0, 1, \ldots, t,$$

тогда как

$$\frac{d^{t+1}}{d\lambda^{t+1}}[F(\lambda)x(\lambda)]\big|_{\lambda=\lambda^*} \neq 0.$$

Основное свойство введенной характеристики состоит в том, что вектор $x(\lambda)$ порождает совокупность векторов[1]

$$x_k := \frac{1}{k!}x_*^{(k)}, \quad k = 0, 1, \ldots, t,$$

из отвечающей λ^* жордановой цепочки высоты не меньше $t+1$, которые удовлетворяют соотношениям

$$\sum\nolimits_{k=0}^{l} \frac{1}{k!}F_*^{(k)}x_{l-k} = 0, \quad l = 0, 1, \ldots, t.$$

Если система

$$F_*z = \sum_{k=1}^{t+1} \frac{1}{k!}F_*^{(k)}x_{t-k+1} = 0$$

является несовместимой, то векторы x_k, $k = 0, 1, \ldots, t$, образуют жорданову цепочку высоты $t+1$, отвечающую элементарному делителю $(\lambda - \lambda^*)^{t+1}$ матрицы $F(\lambda)$.

Отметим взаимосвязь приведенных понятий. Отвечающий собственному значению λ^* правый порождающий корневой вектор $x(\lambda)$ высоты $t+1$ является правым порождающим собственным

[1] Здесь и далее используются обозначения вида:

$$F_*^{(k)} := \frac{d^k}{d\lambda^k}F(\lambda)\big|_{\lambda=\lambda^*}, \quad x_*^{(k)} := \frac{d^k}{d\lambda^k}x(\lambda)\big|_{\lambda=\lambda^*}.$$

вектором, отвечающим собственному полиному $\chi(\lambda) = (\lambda - \lambda^*)^{t+1}$. Обратно, если λ^* является нулем кратности t собственного полинома $\chi(\lambda)$, то соответствующий ему правый порождающий собственный вектор $x(\lambda)$ является правым порождающим корневым вектором высоты t, отвечающим собственному значению λ^*. Отсюда следует, что любой собственный полином матрицы $F(\lambda)$ должен являться делителем ее *минимального полинома* $\varepsilon(\lambda)$, так как кратности нулей последнего определяют максимальные высоты соответствующих жордановых цепочек. В действительности, собственный полином является делителем одного из инвариантных полиномов матрицы.

Проиллюстрируем приведенные понятия на известных спектральных характеристиках (см. [3]). Пусть λ^*, x_* – собственное значение и соответствующий ему собственный вектор полиномиальной матрицы $F(\lambda)$:

$$F(\lambda^*)x_* = 0.$$

Очевидно, что полиномиальный вектор $u(\lambda) := F(\lambda)x_*$ обращается в нуль при $\lambda = \lambda^*$, следовательно, он представим в виде

$$u(\lambda) = (\lambda - \lambda^*)z(\lambda).$$

Тогда, имеем

$$F(\lambda)x_* = (\lambda - \lambda^*)z(\lambda),$$

где $z(\lambda)$ – полиномиальный вектор, не обязательно являющийся свободным. Таким образом, постоянный вектор x_* является правым порождающим собственным вектором матрицы $F(\lambda)$, отвечающим собственному полиному, делителем которого является $(\lambda - \lambda^*)$.

Теперь, пусть $P(\lambda)$ и $Q(\lambda)$ – унимодулярные матрицы, осуществляющие эквивалентное преобразование полиномиальной $m \times n$ матрицы $F(\lambda)$ ранга ρ к канонической форме Смита

$$P^{-1}(\lambda)F(\lambda)Q(\lambda) =$$
$$= E(\lambda) \equiv \operatorname{blockdiag}\{\varepsilon_1(\lambda), \varepsilon_2(\lambda), \dots, \varepsilon_\rho(\lambda), \mathbb{O}_{m-\rho, n-\rho}\}. \qquad (2)$$

Здесь $\varepsilon_i(\lambda)$, $i = 1, 2, \dots, \rho$, – инвариантные многочлены матрицы $F(\lambda)$ вида

$$\varepsilon_i(\lambda) = \prod_{j=1}^{k_i} (\lambda - \lambda_{ij})^{t_{ij}}, \quad i = 1, 2, \dots, \rho, \qquad (3)$$

причем каждый из инвариантных многочленов является делителем последующего: $\varepsilon_i(\lambda) \mid \varepsilon_{i-1}(\lambda)$, $i = 2, \dots, \rho$. Наибольший общий делитель $\varphi_k(\lambda)$ всевозможных миноров порядка k матрицы $F(\lambda)$ равен произведению $\prod_{i=1}^{k} \varepsilon_i(\lambda)$. Произведение всех инвариантных многочленов совпадает с характеристическим полиномом: $\varphi(\lambda) \equiv \varphi_\rho(\lambda) = \prod_{i=1}^{\rho} \varepsilon_i(\lambda)$. Полином $\varepsilon(\lambda) \equiv \varepsilon_\rho(\lambda)$ является минимальным полиномом матрицы $F(\lambda)$.

Умножим обе части равенства (2) слева на матрицу $P(\lambda)$

$$F(\lambda)Q(\lambda) = P(\lambda)E(\lambda). \tag{4}$$

Тогда для столбцов $p_i(\lambda)$ и $q_i(\lambda)$ матриц $P(\lambda)$ и $Q(\lambda)$ имеем

$$F(\lambda)q_i(\lambda) = \varepsilon_i(\lambda)p_i(\lambda), \quad i = 1, 2, \dots, \rho.$$

Следовательно, если $\varepsilon_i(\lambda)$ является отличным от константы полиномом вида (3), то полиномиальный вектор $q_i(\lambda)$ является правым порождающим корневым вектором высоты t_{ij} матрицы $F(\lambda)$, отвечающим элементарному делителю $(\lambda - \lambda_{ij})^{t_{ij}}$, $j = 1, \dots, k_i$. Он также является правым порождающим собственным вектором матрицы $F(\lambda)$, отвечающим собственному полиному $\varepsilon_i(\lambda)$, $i = 1, 2, \dots, \rho$.

2. Построение порождающих векторов. Приведем алгоритмы построения порождающих собственных векторов для полиномиальных матриц полного столбцового ранга, в том числе, для регулярных полиномиальных матриц.

2.1. Первый метод построения порождающих векторов основан на использовании характеристического полинома полиномиальной $m \times n$ матрицы $F(\lambda)$ полного столбцового ранга n. Предлагаются два варианта этого метода в зависимости от того, известен или нет ее характеристический полином.

Рассмотрим случай, когда характеристический полином $\varphi(\lambda)$ известен. Образуем полиномиальную $m \times (m+n)$ матрицу

$$\Phi(\lambda) := [\varphi(\lambda)I_m \ F(\lambda)] \tag{5}$$

и применим к ней алгоритм ΔW-1 факторизации[2]:

$$\Phi(\lambda)W(\lambda) = [\Delta(\lambda) \ \mathbb{O}_{mm}], \quad W(\lambda) = [W_1(\lambda) \ W_0(\lambda)], \tag{6}$$

[2]Описание метода см., например, в [1].

где $\Delta(\lambda)$ – регулярная матрица порядка m, $W(\lambda)$ – унимодулярная матрица порядка $(m+n)$. Представим $(m+n)\times n$ матрицу $W_0(\lambda)$ в блочном виде[3]

$$W_0(\lambda) \equiv [-S(\lambda)\ T(\lambda)]^B, \tag{7}$$

где $S(\lambda)$ – полиномиальная $m\times n$ матрица, а $T(\lambda)$ – регулярная полиномиальная матрица порядка n. Тогда, из (6), (5) имеем:

$$F(\lambda)T(\lambda) = \varphi(\lambda)S(\lambda), \tag{8}$$

так что для столбцов $t_i(\lambda)$ и $s_i(\lambda)$ матриц $T(\lambda)$ и $S(\lambda)$ выполняются соотношения:

$$F(\lambda)t_i(\lambda) = \varphi(\lambda)s_i(\lambda), \quad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{9}$$

Для каждой пары полиномиальных векторов $t_i(\lambda)$ и $s_i(\lambda)$ найдем наибольшие общие делители (НОД) их компонент. С этой целью (см., например, [1]) к полиномиальной $1\times n$ матрице $t_i^T(\lambda)$ применяется алгоритм ΔW-1 факторизации:

$$t_i^T(\lambda)W_i(\lambda) = [\delta_i(\lambda)\ 0^T], \tag{10}$$

где $\delta_i(\lambda)$ – искомый НОД компонент вектора $t_i(\lambda)$, $W_i(\lambda)$ – унимодулярная матрица порядка n. Аналогичным образом может быть найден НОД $\gamma_i(\lambda)$ компонент вектора $s_i(\lambda)$. В результате имеем

$$t_i(\lambda) = \delta_i(\lambda)\check{t}_i(\lambda), \quad s_i(\lambda) = \gamma_i(\lambda)\check{s}_i(\lambda), \quad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{11}$$

где векторы $\check{t}_i(\lambda)$, $\check{s}_i(\lambda)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, являются свободными. Подставляя (11) в (9), получаем

$$F(\lambda)\check{t}_i(\lambda) = \psi_i(\lambda)\check{s}_i(\lambda), \quad i = 1, 2, \ldots, n, \tag{12}$$

где

$$\psi_i(\lambda) := \varphi(\lambda)\gamma_i(\lambda)/\delta_i(\lambda), \quad i = 1, 2, \ldots, n,$$

являются, очевидно, полиномами. Если полином $\psi_i(\lambda)$ отличен от константы, то вектор $\check{t}_i(\lambda)$ является правым порождающим собственным вектором матрицы $F(\lambda)$, отвечающим ее собственному полиному $\psi_i(\lambda)$.

Покажем, что в действительности, нет необходимости находить $\gamma_i(\lambda)$, т.е. НОД компонент векторов $s_i(\lambda)$, $i = 1, 2, \ldots, n$,

[3] Символ ^{B} обозначает блочное транспонирование матрицы.

так как последние уже являются свободными. Поскольку полином $\psi_i(\lambda)$ должен быть делителем характеристического полинома $\varphi(\lambda)$, то $\gamma_i(\lambda)$ должен быть либо константой, либо отличным от константы делителем полинома $\delta_i(\lambda)$. Во втором случае полином $\gamma_i(\lambda)$ оказывается делителем всех компонент столбца $w_{0i}(\lambda)$ матрицы $W_0(\lambda)$, что противоречит унимодулярности матрицы $W(\lambda)$.

Таким образом, полиномы $\psi_i(\lambda)$ из соотношений (12) имеют вид

$$\psi_i(\lambda) = \varphi(\lambda)/\delta_i(\lambda), \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Полином $\psi_i(\lambda)$ отличается от константы и не является кратным $\varphi(\lambda)$, если $0 < \deg \delta_i(\lambda) < \deg \varphi(\lambda)$. В этом случае необходимо выполнить деление без остатка компонент вектора $t_i(\lambda)$ и полинома $\varphi(\lambda)$ на полином $\delta_i(\lambda)$, что может быть реализовано с помощью алгоритмов, описанных в [1]. Для решения первой задачи к матрице $W_i(\lambda)$ из (10) применяется алгоритм ΔW-1 факторизации:

$$W_i(\lambda)\widehat{W}_i(\lambda) = \Delta_i,$$

где Δ_i – постоянная невырожденная матрица порядка n. Первая строка унимодулярной матрицы $W_i^{-1}(\lambda) = \widehat{W}_i(\lambda)\Delta_i^{-1}$ является, с точностью до операции транспонирования, искомым вектором $\check{t}_i(\lambda)$. Для решения второй задачи к полиномиальной 1×2 матрице $[\varphi(\lambda)\delta_i(\lambda)]$ применяется алгоритм ΔW-1 факторизации:

$$[\varphi(\lambda)\, \delta_i(\lambda)]\widehat{W}^i(\lambda) = [\alpha\delta_i(\lambda)\ 0],$$

где α – некоторая константа. Элемент $\widehat{w}\,^i_{22}(\lambda)$ унимодулярной матрицы $\widehat{W}\,^i(\lambda)$ второго порядка, является, с точностью до константы, искомым полиномом $\psi_i(\lambda)$.

Рассмотрим случай, когда характеристический полином $\varphi(\lambda)$ матрицы $F(\lambda)$ не известен.

Если $F(\lambda)$ является регулярной полиномиальной матрицей порядка n, то $\varphi(\lambda) = \det F(\lambda)$ может быть вычислен с помощью метода следов Д. К. Фаддеева (см., например, [1]). В соответствии с этим методом, начиная с матрицы $G_0(\lambda) := I_n$, строятся последовательности матриц $\{F_k(\lambda)\}$, $\{G_k(\lambda)\}$ и полиномов $\{\theta_k(\lambda)\}$, $k = 1, 2, \dots, n$, по следующим формулам

$$F_k(\lambda) := F(\lambda)G_{k-1}(\lambda), \quad \theta_k(\lambda) := \frac{1}{k}\mathrm{tr}F_k(\lambda),$$

$$HG_k(\lambda) := F_k(\lambda) - \theta_k(\lambda)I_n, \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

В результате будут получены характеристический полином $\varphi(\lambda) \equiv \theta_n(\lambda)$ и полиномиальная матрица $G(\lambda) \equiv G_{n-1}(\lambda)$, являющаяся присоединенной к исходной матрице $F(\lambda)$:

$$F(\lambda)G(\lambda) = \varphi(\lambda)I_n. \tag{13}$$

Заметим, что при точных вычислениях матрица $G_n(\lambda) = \mathbb{O}$. Этот факт может быть использован для оценки точности вычислений.

Из соотношения (13) для столбцов $g_i(\lambda)$ и e_i матриц $G(\lambda)$ и I_n имеем:

$$F(\lambda)g_i(\lambda) = \varphi(\lambda)e_i, \quad i = 1, 2, \dots, n. \tag{14}$$

Для каждого полиномиального вектора $g_i(\lambda)$ найдем наибольший общий делитель его компонент. С этой целью к полиномиальной $1 \times n$ матрице $g_i^T(\lambda)$ применяется алгоритм ΔW-1 факторизации:

$$g_i^T(\lambda)W_i(\lambda) = [\delta_i(\lambda)\ 0^T],$$

где $\delta_i(\lambda)$ – искомый НОД компонент вектора $g_i(\lambda)$, $W_i(\lambda)$ – унимодулярная матрица порядка n. В результате имеем

$$g_i(\lambda) = \delta_i(\lambda)\breve{g}_i(\lambda), \quad i = 1, 2, \dots, n, \tag{15}$$

где векторы $\breve{g}_i(\lambda)$, $i = 1, 2, \dots, n$, являются свободными. Подставляя (15) в (14), получаем

$$F(\lambda)\breve{g}_i(\lambda) = \psi_i(\lambda)e_i, \quad i = 1, 2, \dots, n, \tag{16}$$

где

$$\psi_i(\lambda) := \varphi(\lambda)/\delta_i(\lambda), \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

являются, очевидно, полиномами. Если полином $\psi_i(\lambda)$ отличен от константы, то вектор $\breve{g}_i(\lambda)$ является правым порождающим собственным вектором матрицы $F(\lambda)$, отвечающим ее собственному полиному $\psi_i(\lambda)$. Построение векторов $\breve{g}_i(\lambda)$ и полиномов $\psi_i(\lambda)$ выполняется описанными выше способами.

Если $F(\lambda)$ является $m \times n$ матрицей полного столбцового ранга ($m > n$), то ее характеристический полином $\varphi[F]$ может быть вычислен описанным выше способом как характеристический полином $\varphi[\Delta]$ регулярной матрицы $\Delta(\lambda)$ порядка n, получаемой в результате применения к $n \times m$ матрице $F^H(\lambda)$ алгоритма ΔW-1 факторизации:

$$F^H(\lambda)W(\lambda) = [\Delta(\lambda)\ 0_{n,m-n}], \tag{17}$$

где $W(\lambda)$ – унимодулярная матрица порядка m. Далее применяется первый вариант метода для матрицы $F(\lambda)$.

Замечания. 1. Соотношения (12) и (16) можно записать в матричном виде:

$$F(\lambda)\check{T}(\lambda) = S(\lambda)\Psi(\lambda),$$
$$F(\lambda)\check{G}(\lambda) = \Psi(\lambda),$$

где

$$\check{T}(\lambda) := [\check{t}_1(\lambda)\dots\check{t}_n(\lambda)], \quad \check{G}(\lambda) := [\check{g}_1(\lambda)\dots\check{g}_n(\lambda)],$$
$$\Psi(\lambda) := \operatorname{diag}\{\psi_1(\lambda), \dots, \psi_n(\lambda)\}.$$

Оба соотношения аналогичны по форме соотношению (4), получаемому из канонической формы Смита (2) для $m \times n$ матрицы $F(\lambda)$ при $\rho = n$. При этом вместо унимодулярной матрицы $Q(\lambda)$ порядка n имеем соответственно регулярные матрицы $\check{T}(\lambda)$ или $\check{G}(\lambda)$ порядка n, а вместо унимодулярной матрицы $P(\lambda)$ порядка m имеем $m \times n$ матрицу полного столбцового ранга $S(\lambda)$ или I_n.

2. В соотношении (8) $m \times n$ матрица $S(\lambda)$ не имеет конечного спектра (т.е. является подматрицей некоторой унимодулярной матрицы порядка m), а $\det T(\lambda) = \varphi^{n-1}(\lambda)$. В частности, $S(\lambda)$ является унимодулярной матрицей, если $F(\lambda)$ является регулярной матрицей. Справедливость последнего утверждения вытекает из того факта, что столбцы матрицы (7) и матрицы $[-I_n\ G(\lambda)]^B$ образуют унимодулярные базисы одного и того же правого нуль-пространства матрицы (5). Такие матрицы должны быть эквивалентными справа. Следовательно, в преобразовании, связывающем эти матрицы:

$$[-S(\lambda)\ T(\lambda)]^B = [-I_n\ G(\lambda)]^B S(\lambda),$$

матрица $S(\lambda)$ является унимодулярной, а $\det T(\lambda) = \det G(\lambda) = \varphi^{n-1}(\lambda)$. При $m > n$ базис правого нуль-пространства матрицы (5) образуют как столбцы матрицы (7), так и столбцы матрицы $[-F(\lambda)\ \varphi(\lambda)I_n]^B$, характеристический полином которой равен $\varphi(\lambda)$. Тогда, эти матрицы связаны соотношением

$$[-F(\lambda)\ \varphi(\lambda)I_n]^B = [-S(\lambda)\ T(\lambda)]^B P(\lambda),$$

где $P(\lambda)$ – регулярная полиномиальная матрица порядка n, причем $\det P(\lambda) = \varphi(\lambda)$. Следовательно, матрица $S(\lambda)$ не имеет конечного спектра, а $\det T(\lambda) = \varphi^{n-1}(\lambda)$.

3. Конечные собственные значения матриц $\check{T}(\lambda)$ и $\check{G}(\lambda)$, если они существуют, являются нулями характеристического полинома $\varphi(\lambda)$ матрицы $F(\lambda)$. Действительно, если при $\lambda = \lambda^*$ $\sum_{i=1}^n \alpha_i \check{t}_i(\lambda^*) = 0$, или $\sum_{i=1}^n \alpha_i \check{g}_i(\lambda^*) = 0$, то из (12), или (16) следует равенство $\sum_{i=1}^n \alpha_i \psi_i(\lambda^*) s_i(\lambda^*) = 0$, или $\sum_{i=1}^n \alpha_i \psi_i(\lambda^*) e_i = 0$, соответственно. В силу линейной независимости столбцов матриц $S(\lambda^*)$ и I_n, это возможно только, если $\alpha_i = 0$, или $\psi_i(\lambda^*) = 0$, $i = 1, \ldots, n$. Таким образом, λ^* должно являться нулем некоторого собственного полинома матрицы $F(\lambda)$, т.е. нулем ее характеристического полинома.

4. Хотя бы один из получаемых полиномов $\psi_i(\lambda)$ отличен от константы. Действительно, $\det T(\lambda) = \det G(\lambda) = \varphi^{n-1}(\lambda)$, и справедливость утверждения является следствием того, что НОД $\delta_i(\lambda)$ компонент каждого столбца матрицы $T(\lambda)$, или $G(\lambda)$ обязан быть делителем $\varphi(\lambda)$.

5. Если $F(\lambda)$ является $m \times n$ матрицей полного столбцового ранга $(m > n)$, то она может быть представлена в виде

$$F(\lambda) = U(\lambda)\widetilde{F}(\lambda),$$

где $U(\lambda)$ – полиномиальная $m \times n$ матрица, не имеющая конечного спектра, а $\widetilde{F}(\lambda)$ – регулярная полиномиальная матрица порядка n. Такое представление может быть получено из (17), при $\widetilde{F}(\lambda) := \Delta^T(\lambda)$, $U(\lambda) := \widetilde{W}_1^T(\lambda)$, где $W^{-1}(\lambda) = [\widetilde{W}_1(\lambda)\widetilde{W}_2(\lambda)]^B$. Тогда, собственный полином $\chi(\lambda)$ и отвечающий ему правый порождающий собственный вектор $x(\lambda)$ матрицы $\widetilde{F}(\lambda)$ являются таковыми и для матрицы $F(\lambda)$. Действительно, из соотношения

$$\widetilde{F}(\lambda)x(\lambda) = \chi(\lambda)z(\lambda)$$

имеем

$$F(\lambda)x(\lambda) = U(\lambda)\widetilde{F}(\lambda)x(\lambda) = \chi(\lambda)U(\lambda)z(\lambda),$$

причем вектор $U(\lambda)z(\lambda)$ является свободным.

6. Оба варианта метода допускают модификацию, связанную с заменой характеристического полинома $\varphi(\lambda)$ матрицы $F(\lambda)$ на ее минимальный полином $\varepsilon(\lambda)$. При этом в первом варианте метода матрицу (5) следует заменить на матрицу $[\varepsilon(\lambda)I_m F(\lambda)]$. Во

втором варианте соотношение (13) следует заменить на соотношение

$$F(\lambda)\widehat{G}(\lambda) = \varepsilon(\lambda) I_n,$$

где матрица $\widehat{G}(\lambda)$ получается делением всех элементов присоединенной матрицы $G(\lambda)$ на их НОД. Действительно, каждый элемент присоединенной матрицы $G(\lambda)$ является алгебраическим дополнением соответствующего элемента матрицы $F(\lambda)$, т.е. совпадает, с точностью до знака, с дополнительным минором этого элемента. Следовательно, НОД всех элементов матрицы $G(\lambda)$ равен $\varphi_{n-1}(\lambda)$. Остается учесть, что $\varepsilon(\lambda) = \varphi(\lambda)/\varphi_{n-1}(\lambda)$. Дальнейшие действия и свойства получаемых характеристик остаются прежними.

2.2. Второй метод построения порождающих векторов применим только к регулярной полиномиальной матрице $F(\lambda)$ порядка n. Образуем $(n-1)\times n$ матрицу $F_i(\lambda)$, вычеркиванием из $F(\lambda)$ одной строки с номером i $(1 \leqslant i \leqslant n)$. Применим к матрице $F_i(\lambda)$ алгоритм ΔW-1 факторизации:

$$F_i(\lambda) W_i(\lambda) = [\Delta_i(\lambda)\ 0], \quad W_i(\lambda) = [W_{i1}(\lambda)\ w_{i0}(\lambda)],$$

где $\Delta_i(\lambda)$ – регулярная матрица порядка $n-1$, $W_i(\lambda)$ – унимодулярная матрица порядка n. Последний столбец $w_{i0}(\lambda)$ матрицы $W_i(\lambda)$ является правым полиномиальным решением матрицы $F_i(\lambda)$:

$$F_i(\lambda) w_{i0}(\lambda) = 0.$$

Тогда полиномиальный вектор

$$u_i(\lambda) := F(\lambda) w_{i0}(\lambda)$$

будет иметь единственную отличную от нуля компоненту $u_{ii}(\lambda)$, так что

$$F(\lambda) w_{i0}(\lambda) = u_{ii}(\lambda) e_i,$$

где e_i – столбец i единичной матрицы. Следовательно, если $u_{ii}(\lambda)$ не является константой, то вектор $w_{i0}(\lambda)$ является правым порождающим собственным вектором матрицы $F(\lambda)$, отвечающим ее собственному полиному $u_{ii}(\lambda)$.

Метод не вычисляет порождающих векторов, если все $u_{ii}(\lambda)$ являются константами.

3. Построение собственных и корневых векторов. Описанные выше методы позволяют получать некоторые совокупности правых порождающих собственных векторов $x_i(\lambda)$ полиномиальной $m \times n$ матрицы $F(\lambda)$, отвечающих ее собственным полиномам $\chi_i(\lambda)$, $i = 1, \ldots, k$:

$$F(\lambda)x_i(\lambda) = \chi_i(\lambda)z_i(\lambda), \quad i = 1, 2, \ldots, k.$$

Нули полиномов[4] $\chi_i(\lambda)$ определяют собственные значения матрицы $F(\lambda)$, а вычисленные в них значения векторов $x_i(\lambda)$ определяют соответствующие им собственные векторы. Для кратных нулей полиномов $\chi_i(\lambda)$ вычисляются совокупности корневых векторов из соответствующих жордановых цепочек. При этом имеющаяся информация может оказаться как избыточной, так и недостаточной.

Так, линейно зависимыми могут оказаться значения порождающих собственных векторов, вычисленные в общем нуле соответствующих им собственных полиномов. Совокупность линейно независимых собственных векторов может быть построена, например, следующим способом.

Пусть, для определенности, λ^* является нулем первых l собственных полиномов: $\chi_i(\lambda^*) = 0$, $i = 1, \ldots, l$. Вычисляются векторы $x_i^* = x_i(\lambda^*)$, $i = 1, \ldots, l$, и формируется $n \times l$ матрица $X^* := [x_1^* \ldots x_l^*]$, к которой применяется алгоритм ΔW-0 факторизации (см., например, [1]):

$$X^* W^* = [\Delta \ \mathbb{O}_{n,l-r}],$$

где Δ^* – $n \times r$ матрица полного столбцового ранга ($r \leqslant l$), а W^* – невырожденная матрица порядка l. Тогда столбцы матрицы Δ^* являются искомыми линейно независимыми собственными векторами матрицы $F(\lambda)$, отвечающими собственному значению λ^*.

Недостаточность полученной информации связана с тем, что вычисленные совокупности корневых векторов могут определять не всю жорданову цепочку, а лишь начало ее. Предложенные методы сами по себе не гарантируют решение полной проблемы собственных значений. Однако, она фактически может быть решена при использовании процедуры исчерпывания найденных спектральных характеристик.

[4] Методы вычисления нулей полиномов здесь не обсуждаются.

4. Исчерпывание собственных полиномов. Пусть известен правый порождающий собственный вектор $x(\lambda)$ полиномиальной матрицы $F(\lambda)$, удовлетворяющий соотношению (1). Выполним для матрицы $F(\lambda)$ исчерпывание собственного полинома $\chi(\lambda)$, используя алгоритм построения базиса дополнительного подпространства (см. [1]). Применим алгоритм ΔW-1 факторизации к $1 \times n$ матрице $x^T(\lambda)$, не имеющей спектра:

$$x^T(\lambda)W(\lambda) = [\delta\ 0^T], \quad W(\lambda) = [w_1(\lambda)\ W_0(\lambda)],$$

где δ – отличная от нуля константа, $W(\lambda)$ – унимодулярная матрица порядка n, а $w_1(\lambda)$ – ее первый столбец. Далее, применим алгоритм ΔW-1 факторизации к $(n-1) \times n$ матрице $W_0^T(\lambda)$, не имеющей конечного спектра:

$$W_0^T(\lambda)\widehat{W}(\lambda) = [\widehat{\Delta}\ 0], \quad \widehat{W})(\lambda) = [\widehat{W}_1(\lambda)\ \widehat{w}_0(\lambda)],$$

где $\widehat{\Delta}$ – постоянная невырожденная матрица порядка $n-1$, $\widehat{W}(\lambda)$ – унимодулярная матрица порядка n, последний столбец $\widehat{w}_0(\lambda)$ которой отличается, очевидно, от вектора $x(\lambda)$ только постоянным множителем: $\widehat{w}_0(\lambda) = \alpha x(\lambda)$ $(\alpha \neq 0)$. Тогда, учитывая (1), имеем

$$\widehat{F}(\lambda) := F(\lambda)\widehat{W}(\lambda) = [F(\lambda)\widehat{W}_1(\lambda)\ \alpha\chi(\lambda)z(\lambda)]. \tag{18}$$

Теперь исчерпывание собственного полинома $\chi(\lambda)$ достигается умножением матрицы (18) на рациональную матрицу $R(\lambda) := \mathrm{blockdiag}\{I_{n-1}\chi^{-1}(\lambda)\}$:

$$\widetilde{F}(\lambda) := \widehat{F}(\lambda)R(\lambda) = [F(\lambda)\widehat{W}_1(\lambda)\,\alpha z(\lambda)]. \tag{19}$$

Легко убедиться в том, что конечные собственные значения матрицы $\widetilde{F}(\lambda)$ совпадают с конечными собственными значениями матрицы $F(\lambda)$, за исключением исчерпанных нулей полинома $\chi(\lambda)$. Если $\chi(\lambda)$ имеет кратные нули, то, в зависимости от свойств $x(\lambda)$ как правого порождающего корневого вектора, исчерпывается либо весь соответствующий элементарный делитель, либо делитель соответствующей степени. В терминах канонической формы Смита исчерпывается либо весь соответствующий инвариантный полином, либо его делитель. При этом, очевидно, указанные конечные собственные значения исчерпываются в бесконечную точку комплексной плоскости (см. о подобном исчерпывании в [2]). Заметим, что описанный способ исчерпывания эквивалентен факторизации матрицы $F(\lambda)$. Действительно, из (18),

(19) имеем

$$F(\lambda) = \widetilde{F}(\lambda)R^{-1}(\lambda)\widehat{W}^{-1}(\lambda) = \widetilde{F}(\lambda)\mathrm{blockdiag}\{I_{n-1}, \chi(\lambda)\}\widehat{W}^{-1}(\lambda).$$

Для повторного применение к матрице $\widetilde{F}(\lambda)$ первого метода, чтобы определить ее характеристический полином $\widetilde{\varphi}(\lambda)$, необходимо выполнить деление без остатка характеристического полинома $\varphi(\lambda)$ матрицы $F(\lambda)$ на все найденные и исчерпанные собственные полиномы.

Таким образом, циклическое определение собственных полиномов и отвечающих им порождающих собственных векторов (первый метод гарантирует определение, по крайней мере, одной такой пары), а затем исчерпывание найденных характеристик позволяет фактически решать полную проблему собственных значений, с точностью до возможных "разрывов" элементарных делителей и соответствующих жордановых цепочек векторов и необходимости перевычисления векторных характеристик. Если на первом шаге (или на каком либо последующем шаге) полученный собственный полином совпадает с характеристическим полиномом текущей матрицы, то это означает, что найден ее минимальный полином, являющийся единственным инвариантным делителем. В этом случае соответствующий порождающий вектор порождает все собственные векторы, а для кратных нулей – все жордановы цепочки векторов матрицы.

5. Общие замечания. Аналогично вводятся левые векторные характеристики полиномиальной матрицы (левый порождающий собственный вектор и левый порождающий корневой вектор) и устанавливаются их свойства. Очевидным образом модифицируются приведенные выше методы построения порождающих векторов полиномиальных матриц полного строчного ранга и исчерпывания соответствующих спектральных характеристик.

Описанные методы можно использовать и в случае, когда полиномиальная $m \times n$ матрица $F(\lambda)$ имеет ранг $\rho < \min\{m, n\}$. Для этого следует предварительно примерить к ней алгоритм ΔW-1 факторизации:

$$F(\lambda)W(\lambda) = [\Delta(\lambda)\ \mathbb{O}_{m,n-\rho}], \quad W(\lambda) = [W_1(\lambda)\ W_0(\lambda)],$$

где $\Delta(\lambda)$ – матрица полного столбцового ранга $\rho, W(\lambda)$ – унимодулярная матрица порядка n, подматрица $W_1(\lambda)$ которой имеет размеры $n\times\rho$. Далее к матрице $\Delta(\lambda)$ применяется один из методов построения правых порождающих векторов. Если $x(\lambda)$ является правым порождающим собственным вектором матрицы $\Delta(\lambda)$, отвечающим ее собственному полиному $\chi(\lambda)$:

$$\Delta(\lambda)x(\lambda) = \chi(\lambda)z(\lambda),$$

то вектор $\widetilde{x}(\lambda) := W_1(\lambda)x(\lambda)$ является правым порождающим собственным вектором матрицы $F(\lambda)$, отвечающим ее собственному полиному $\chi(\lambda)$:

$$F(\lambda)\widetilde{x}(\lambda) = \chi(\lambda)z(\lambda).$$

Все определения и методы могут быть обобщены на случай двухпараметрических полиномиальных матриц, спектр которых зависит только от одного из параметров. Определения и свойства порождающих векторов многопараметрической полиномиальной матрицы см. в [4]. Описание ΔW-2 алгоритма и его свойства см. в [1].

Литература

1. В. Н. Кублановская, *Методы и алгоритмы решения спектральных задач для полиномиальных и рациональных матриц*. Зап. научн. семин. ПОМИ, **238** (1998), 3–330.
2. В. Н. Кублановская, В. Б. Хазанов, *Исчерпывание в спектральных задачах для пучков матриц*. Вычислительные процессы и системы, Наука, М. (1987), 138–147.
3. В. Б. Хазанов, *О спектральных свойствах λ-матриц*. Зап. научн. семин. ЛОМИ, **111** (1981), 195–217.
4. В. Б. Хазанов, *О собственных порождающих векторах многопараметрической полиномиальной матрицы*. Зап. научн. семин. ПОМИ, **248** (1998), 165–186.

Kublanovskaya V. N., Khazanov V. B. To the solution of partial eigenproblems for polynomial matrices.

Methods for computing scalar and vector spectral characteristics of a polynomial matrix are proposed. These methods are based on determining the so-called generating vectors (eigenvectors and principal vectors) by using the rank-factorization method for polynomial matrices. The possibility of extending the methods to the case of two-parameter polynomial matrices is indicated.

Санкт-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН
С.-Петербургский государственный
морской технический университет

Поступило 23 января 2002 г.