Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 284, 2002 г.

В. Б. Хазанов

О НЕКОТОРЫХ СВОЙСТВАХ ПОЛИНОМИАЛЬНЫХ БАЗИСОВ ПОДПРОСТРАНСТВ НАД ПОЛЕМ РАЦИОНАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ

1. Объектом исследования являются полиномиальные и рациональные векторы и матрицы, компоненты и элементы являются соответственно скалярными полиномами и рациональными функциями от нескольких переменных $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_q$ над полем комплексных чисел $\mathbb{C}$. В дальнейшем эти переменные будем называть параметрами и для кратности записывать их в виде *мультипараметра* $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_q)$. Таким образом, фиксированный набор значений параметров $\lambda_1^*, \lambda_2^*, \dots, \lambda_q^*$ может рассматриваться как точка $\boldsymbol{\lambda}^* = (\lambda_1^*, \lambda_2^*, \dots, \lambda_q^*)$ q-мерного аффинного пространства $\mathbb{C}^q$.

Будем рассматривать n-мерное рациональное векторное пространство $\mathbb{C}^n(\boldsymbol{\lambda})$, определенное над полем $C(\boldsymbol{\lambda})$. Компоненты любого многопараметрического рационального вектора $\mathbf{r}(\boldsymbol{\lambda}) \in \mathbb{C}^n(\boldsymbol{\lambda})$ представляют собой рациональные функции от мультипараметра $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_q)$:

$$\mathbf{r}(\boldsymbol{\lambda}) = [f_1(\boldsymbol{\lambda})/g_1(\boldsymbol{\lambda}), f_2(\boldsymbol{\lambda})/g_2(\boldsymbol{\lambda}), \dots, f_n(\boldsymbol{\lambda})/g_n(\boldsymbol{\lambda})]^T,$$

где $f_i(\boldsymbol{\lambda})$, $g_i(\boldsymbol{\lambda})$, $i = 1, \dots, n$ – полиномы от мультипараметра $\boldsymbol{\lambda}$. Основной интерес будет представлять модуль $\mathbb{C}^n[\boldsymbol{\lambda}]$ из многопараметрических полиномиальных векторов $\mathbf{x}(\boldsymbol{\lambda})$, т.е. векторов, компоненты которых являются полиномами от мультипараметра $\boldsymbol{\lambda}$:

$$\mathbf{x}(\boldsymbol{\lambda}) = \sum_{\mathbf{k}} \mathbf{a}_{\mathbf{k}} \lambda_1^{k_1} \lambda_2^{k_2} \dots \lambda_q^{k_q}.$$

Здесь $\mathbf{a}_{\mathbf{k}} \in \mathbb{C}^n$ – векторный коэффициент, *мультииндекс* $\mathbf{k} = (k_1, k_2, \dots, k_q)$ которого определяется соответствующими по-

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант 02-01-00059).

казателями степеней параметров $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_q$. Степень члена полиномиального вектора определяется как сумма этих показателей: $\delta_{\mathbf{k}} := k_1 + k_2 + \dots + k_q$, а степень полиномиального вектора (по совокупности всех параметров) определяется как наивысшая из степеней его членов: $s = \deg \mathbf{x} := \max \delta_{\mathbf{k}}$. Другими словами, степень полиномиального вектора определяется как наивысшая степень его компонент.

Очевидно, что полиномиальные векторы, принадлежащие модулю $\mathbb{C}^n[\boldsymbol{\lambda}]$, принадлежат также пространству $\mathbb{C}^n(\boldsymbol{\lambda})$ и что на них распространяются практически все определения и свойства векторного пространства. Исключение составляет свойство о возможности представления одного из совокупности линейно зависимых векторов в виде линейной комбинации остальных, что становится возможным в случае использования рациональных коэффициентов.

Базисом рационального векторного пространства $\mathbb{C}^n(\boldsymbol{\lambda})$ является совокупность линейно независимых рациональных векторов таких, что любой рациональный вектор $\mathbf{r}(\boldsymbol{\lambda}) \in \mathbb{C}^n(\boldsymbol{\lambda})$ представим в виде линейной комбинации этих векторов:

$$\mathbf{r}(\boldsymbol{\lambda}) = \sum_{i=1}^{n} a_i(\boldsymbol{\lambda}) \mathbf{e}_i(\boldsymbol{\lambda}).$$

Здесь $\mathbf{e}_i(\boldsymbol{\lambda}) \in C^n(\boldsymbol{\lambda})$, базисные векторы, число которых, очевидно, совпадает с размерностью пространства $C^n(\boldsymbol{\lambda})$, а $\alpha_i(\boldsymbol{\lambda}) \in C(\boldsymbol{\lambda})$, $i = 1, \dots, n$, – рациональные координаты вектора $\mathbf{r}(\boldsymbol{\lambda})$ относительно выбранного базиса. Аналогичная ситуация имеет место и для любого подпространства $\mathbf{M} \subset \mathbb{C}^n(\boldsymbol{\lambda})$. Если рациональные векторы $\mathbf{e}_i(\boldsymbol{\lambda}) \in \mathbb{C}^n(\boldsymbol{\lambda})$, $i = 1, \dots, m$, $(m < n)$ образуют базис подпространства $\mathbf{M}$ размерности m, то любой рациональный вектор $\mathbf{r}(\boldsymbol{\lambda}) \in \mathbf{M}$ представим в виде:

$$\mathbf{r}(\boldsymbol{\lambda}) = \sum_{i=1}^{m} a_i)(\boldsymbol{\lambda}) \mathbf{e}_i(\boldsymbol{\lambda}),$$

с рациональными координатами $\alpha_i(\boldsymbol{\lambda}) \in \mathbb{C}(\boldsymbol{\lambda})$, $i = 1, \dots, m$.

Особый интерес представляют полиномиальные базисы пространств и подпространств. Такие базисы всегда существуют. Действительно, от любого базиса, образованного рациональными векторами, можно перейти к полиномиальному базису. Для этого достаточно для каждого базисного вектора найти наименьшее общее кратное (НОК) знаменателей его компонент и умножить вектор на это НОК. Очевидно, что при разложении полиномиального вектора $\mathbf{x}(\boldsymbol{\lambda}) \in \mathbf{M}$ по некоторому полиномиальному базису $\mathbf{e}_i(\boldsymbol{\lambda}) \in \mathbb{C}^n[\boldsymbol{\lambda}]$, $i = 1, \ldots, m$, подпространства $\mathbf{M}$:

$$\mathbf{x}(\boldsymbol{\lambda}) = \sum_{i=1}^{m} a_i(\boldsymbol{\lambda})\mathbf{e}_i(\boldsymbol{\lambda}),$$

координаты его являются, в общем случае, рациональными: $\alpha_i(\boldsymbol{\lambda}) \in \mathbb{C}(\boldsymbol{\lambda}),\ i = 1, \ldots, m$.

Матрицы, столбцы которых образуют базис некоторого подпространства будем называть *базисными*. Свойства многопараметрических рациональных и полиномиальных базисов исследуются ниже как свойства соответствующих базисных матриц.

2. Рассматриваются многопараметрические полиномиальные и рациональные матрицы размеров $m \times n$. Квадратная $(m = n)$ многопараметрическая матрица $A(\boldsymbol{\lambda})$ называется регулярной, если ее определитель не равен тождественно нулю: $\det A(\boldsymbol{\lambda}) \not\equiv 0$. В противном случае, когда либо $m \neq n$, либо при $m = n$, $\det A(\boldsymbol{\lambda}) \equiv 0$, $m \times n$ матрица $A(\boldsymbol{\lambda})$ называется сингулярной. Обозначим через $\rho := \mathrm{rank} A(\boldsymbol{\lambda})$ нормальный ранг матрицы $A(\boldsymbol{\lambda})$, т.е. максимальный порядок ее минора, отличного от тождественного нуля. Очевидно, что $\rho \leqslant \min\{m, n\}$: в регулярном случае $\rho = m = n$, а в сингулярном случае $\rho < \min\{m, n\}$.

Многопараметрическая полиномиальная $m \times n$ матрица $F(\boldsymbol{\lambda})$, элементы $f_{ij}(\boldsymbol{\lambda})$ которой являются полиномами от мультипараметра $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_q)$, может быть записана в виде

$$F(\boldsymbol{\lambda}) = \sum_{\mathbf{k}} A_{\mathbf{k}} \lambda_1^{k_1} \lambda_2^{k_2} \ldots \lambda_q^{k_q},$$

где A_k – постоянный матричный коэффициент размеров $m \times n$, мультииндекс $\mathbf{k} = (k_1, k_2, \ldots, k_q)$ которого определяется соответствующими показателями степеней параметров $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_q$. Степень полиномиальной матрицы (по совокупности всех параметров) определяется так же, как степень полиномиального вектора.

Регулярная полиномиальная матрица $F(\boldsymbol{\lambda})$ является обратимой над $\mathbb{C}[\boldsymbol{\lambda}]$, если существует обратная к ней полиномиальная матрица $F^{-1}(\boldsymbol{\lambda})$. Такая матрица называется унимодулярной. Очевидно, что определитель унимодулярной матрицы $\det F(\boldsymbol{\lambda}) = \alpha \in C \setminus \{0\}$.

Спектральные задачи для многопараметрической полиномиальной матрицы $F(\boldsymbol{\lambda})$ связаны с задачей нахождения нетривиальных решений уравнений

$$F(\boldsymbol{\lambda})\mathbf{x} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{x} \in C^n \setminus \{\mathbf{0}\}, \tag{1}$$

$$\mathbf{y}^H F(\boldsymbol{\lambda}) = \mathbf{0}^H, \quad \mathbf{y} \in C^m \setminus \{\mathbf{0}\}, \tag{2}$$

относительно неизвестных векторов $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ и условий их существования. Нетривиальные решения уравнений (1) и (2) могут быть двух типов.

1. Рациональные (или полиномиальные) векторы $\mathbf{x}(\boldsymbol{\lambda})$ и $\mathbf{y}(\boldsymbol{\lambda})$, удовлетворяющие уравнениям (1) и (2) при любых значениях мультипараметра $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_q)$:

$$F(\boldsymbol{\lambda})\mathbf{x}(\boldsymbol{\lambda}) = \mathbf{0}, \quad \mathbf{x}(\boldsymbol{\lambda}) \neq \mathbf{0},$$

$$\mathbf{y}^H(\boldsymbol{\lambda})F(\boldsymbol{\lambda}) = \mathbf{0}^H, \quad \mathbf{y}(\boldsymbol{\lambda}) \neq \mathbf{0}.$$

Совокупности векторов $\{\mathbf{x}(\boldsymbol{\lambda})\}$ и $\{\mathbf{y}(\boldsymbol{\lambda})\}$ образуют соответственно правое $N_c[F] := N_c(\boldsymbol{\lambda}) \equiv \ker F(\boldsymbol{\lambda})$ и левое $N_r[F] := N_r(\boldsymbol{\lambda}) \equiv F^H(\boldsymbol{\lambda})$ нуль-пространства матрицы $F(\boldsymbol{\lambda})$. Полиномиальные векторы $\mathbf{x}(\boldsymbol{\lambda}) \in N_c(\boldsymbol{\lambda})$ и $\mathbf{y}(\boldsymbol{\lambda}) \in N_r(\boldsymbol{\lambda})$ называются соответственно правым и левым полиномиальными решениями матрицы $F(\boldsymbol{\lambda})$. С учетом сказанного выше, можно формировать базисы этих нуль-пространств из полиномиальных решений: $\mathbf{x}_i(\boldsymbol{\lambda})$, $i = 1, \ldots, u$, и $\mathbf{y}_i(\boldsymbol{\lambda})$, $i = 1, \ldots, v$ ($u := n - \rho \equiv \dim N_c[F]$ и $v := m - \rho \equiv N_r[F]$).

2. Отвечающие точке $\boldsymbol{\lambda}^* = (\lambda_1^*, \lambda_2^*, \ldots, \lambda_q^*)$ векторы $\mathbf{x}^*$ и $\mathbf{y}^*$, которые удовлетворяют уравнениям (1) и (2) при фиксированном значении мультипараметра $\boldsymbol{\lambda} = \boldsymbol{\lambda}^*$:

$$F(\boldsymbol{\lambda}^*)\mathbf{x}^* = \mathbf{0}, \quad \mathbf{x}^* \notin N_c(\boldsymbol{\lambda}^*),$$

$$\mathbf{y}^{*H} F(\boldsymbol{\lambda}^*) = \mathbf{0}^H, \quad \mathbf{y}^* \notin N_r(\boldsymbol{\lambda}^*).$$

Здесь $N_c(\boldsymbol{\lambda}^*) \subset \mathbb{C}^n$ и $N_r(\boldsymbol{\lambda}^*) \subset \mathbb{C}^n$ – подпространства, являющиеся линейными оболочками вычисленных при $\boldsymbol{\lambda} = \boldsymbol{\lambda}^*$ значений базисных полиномиальных векторов $\mathbf{x}_i(\boldsymbol{\lambda}^*)$, $i = 1, \ldots, u$, и $\mathbf{y}_i(\boldsymbol{\lambda}^*)$, $i = 1, \ldots, v$, соответственно[1]. Совокупность таких точек $\boldsymbol{\lambda}^* \in \mathbb{C}^q$,

[1]Заметим, что $N_c(\boldsymbol{\lambda}^*)$, в общем случае, отличается от нуль-пространства $N_c[F^*] := \ker F(\boldsymbol{\lambda}^*)$.

будем называть конечным спектром многопараметрической полиномиальной матрицы $F(\boldsymbol{\lambda})$, а векторы $\mathbf{x}^*$ и $\mathbf{y}^*$ – соответствующими им правым и левым собственными векторами.

Очевидно, что для существования правых и левых полиномиальных решений необходимо выполнение неравенств $\rho < n$ и $\rho < m$, соответственно. Необходимым и достаточным условием существования собственных векторов $\mathbf{x}^*$ и $\mathbf{y}^*$, не принадлежащих соответственно $N_c(\boldsymbol{\lambda}^*)$ и $N_r(\boldsymbol{\lambda}^*)$, является выполнение неравенства $\rho^* < \rho$, где $\rho^* := \mathrm{rank} F(\boldsymbol{\lambda}^*)$. Действительно, если $\rho^* = \rho$, то любые решения уравнений (1) и (2) принадлежат соответственно подпространствам $N_c(\boldsymbol{\lambda}^*)$ и $N_r(\boldsymbol{\lambda}^*)$. Дадим другое, более полное, определение конечного спектра многопараметрической полиномиальной матрицы $F(\boldsymbol{\lambda})$ и соответствующих векторных характеристик.

Определение 1. *Конечный спектр $\sigma_c[F]$ многопараметрической полиномиальной матрицы $F(\boldsymbol{\lambda})$ размеров $m \times n$ ранга ρ определяется как геометрической место точек $\boldsymbol{\lambda}^* = (\lambda_1^*, \lambda_2^*, \ldots, \lambda_q^*)$, координаты которых удовлетворяют системе нелинейных алгебраических уравнений*

$$F\begin{pmatrix} i_1, i_2, \ldots, i_p \\ j_1, j_2, \ldots, j_\rho \end{pmatrix} = 0, \quad \begin{matrix} 1 \leqslant i_1 < i_2 < \ldots < i_\rho \leqslant m \\ 1 \leqslant j_1 < j_2 < \ldots < j_\rho \leqslant n \end{matrix}. \tag{3}$$

Левые части уравнений системы (3) представляют собой всевозможные миноры порядка ρ матрицы $F(\boldsymbol{\lambda})$ размеров $m \times n$, так что система (3) состоит из $N = C_m^\rho C_n^\rho$ уравнений. Таким образом, конечный спектр $\sigma_c[F]$ q-параметрической полиномиальной матрицы $F(\boldsymbol{\lambda})$ представляет собой совокупность $(q-k)$-мерных решений, $1 \leqslant k \leqslant \min\{N, q\}$ q-мерного аффинного пространства $\mathbb{C}^q$. Эти решения будем называть *$(q-k)$-мерными собственными значениями* матрицы $F(\boldsymbol{\lambda})$. При $k = 1$ $(q-1)$-мерное собственное значение будем также называть *собственным полиномом* матрицы $F(\boldsymbol{\lambda})$. Таким образом, любой отличный от константы общий делитель миноров из (3) является собственным полиномом матрицы $F(\boldsymbol{\lambda})$.

Кратность точек $\boldsymbol{\lambda}^* \in \sigma_c[F]$ как нулей системы нелинейных алгебраических уравнений (3) определяется следующим образом.

Определение 2. *Точки $\boldsymbol{\lambda}^* \in \sigma_c[F]$ многопараметрической полиномиальной матрицы $F(\boldsymbol{\lambda})$ размеров $m \times n$ ранга ρ имеет аналити-*

ческую кратность $r+1$, если в этой точке обращаются в нуль полные дифференциалы вплоть до порядка r левых частей уравнений системы (3), и хотя бы для одного уравнения значение дифференциала порядка $r+1$ в этой точке отлично от нуля. Конечный спектр матрицы $F(\boldsymbol{\lambda})$ будем называть полным, если при этом учитывается кратность всех его точек.

Легко убедиться в том, что все определения и понятия, приведенные для многопараметрических полиномиальных матриц, при числе параметров $q = 1$ совпадают с классическими определениями и понятиями для однопараметрических полиномиальных матриц (см., например, [3]).

Рассмотрим представление полиномиальной $m \times n$ матрицы $F(\boldsymbol{\lambda})$ ранга ρ в виде:

$$F(\boldsymbol{\lambda}) = F_1(\boldsymbol{\lambda})F_2(\boldsymbol{\lambda}), \tag{4}$$

где $F_1(\boldsymbol{\lambda})$ и $F_2(\boldsymbol{\lambda})$ – полиномиальные матрицы размеров $m \times l$ и $l \times n$ ранга ρ_1 и ρ_2, соответственно. Представление (4) будем называть *полиномиальной ранговой факторизацией* матрицы $F(\boldsymbol{\lambda})$, если $l = \rho$, т.е., если матрицы $F_1(\boldsymbol{\lambda})$ и $F_2(\boldsymbol{\lambda})$ являются соответственно матрицами полного столбцового и строчного ранга.

Справедливы следующие утверждения [4].

Лемма 1. *Пусть многопараметрическая полиномиальная $m \times n$ матрица $F(\boldsymbol{\lambda})$ ранга ρ представлена в виде (4) произведения матриц $F_1(\boldsymbol{\lambda})$ и $F_2(\boldsymbol{\lambda})$ размеров $m \times l$ и $l \times n$ ранга ρ_1 и ρ_2 соответственно. Тогда полный конечный спектр матрицы $F(\boldsymbol{\lambda})$:*

(i) *содержит в себе полный конечный спектр матрицы $GF_i(\boldsymbol{\lambda})$, если ее ранг $\rho_i = \rho$;*

(ii) *содержит в себе объединение полных конечных спектров матриц $F_1(\boldsymbol{\lambda})$ и $F_2(\boldsymbol{\lambda})$, если $\rho_1 = \rho_2 = \rho$;*

(iii) *совпадает с полным конечным спектром матрицы $F_i(\boldsymbol{\lambda})$ за исключением, быть может, дополнительных точек конечного спектра матрицы $F_j(\boldsymbol{\lambda})$ $(j \neq i)$, если матрица $F_j(\boldsymbol{\lambda})$ является регулярной;*

(iv) *состоит из объединения полных конечных спектров матриц $F_1(\boldsymbol{\lambda})$ и $F_2(\boldsymbol{\lambda})$, если они являются регулярными (т.е. при $m = n = l = \rho = \rho_1 = \rho_2$);*

(v) *совпадает с полным конечным спектром матрицы $F_i(\boldsymbol{\lambda})$, если матрица $F_j(\boldsymbol{\lambda})$, $j \neq i$, является унимодулярной.*

Лемма 2. *Если $m \times n$ матрица $F(\boldsymbol{\lambda})$ является сингулярной и ее ранг $\rho < \min\{m, n\}$, то она может быть представлена в виде*

$$a(\boldsymbol{\lambda})F(\boldsymbol{\lambda}) = F_1(\boldsymbol{\lambda})F_2(\boldsymbol{\lambda}), \tag{5}$$

где $F_1(\boldsymbol{\lambda})$ и $F_2(\boldsymbol{\lambda})$ – матрицы полного столбцового и строчного ранга размеров $m \times \rho$ и $\rho \times n$, соответственно, а $\alpha(\boldsymbol{\lambda})$ – некоторый полином. При этом правое и левое нуль-пространства матрицы $F(\boldsymbol{\lambda})$ совпадают соответственно с правым нуль-пространством матрицы $F_2(\boldsymbol{\lambda})$ и левым нуль-пространством матрицы $F_1(\boldsymbol{\lambda})$.

Действительно, если $\rho < n$, то матрица $F(\boldsymbol{\lambda})$ имеет правое нуль-пространство $N_c(\boldsymbol{\lambda})$ размерности $n-\rho$. Тогда существует некоторая регулярная рациональная матрица $E(\lambda) = [E_1(\lambda)\ E_2(\lambda)]$ порядка n, $n\times(n-\rho)$ подматрица $E_0(\boldsymbol{\lambda})$ которой является базисной матрицей, отвечающей $N_c(\boldsymbol{\lambda})$, так что выполняется равенство

$$F(\boldsymbol{\lambda})[E_1(\boldsymbol{\lambda})\ E_0(\boldsymbol{\lambda})] = [R_1(\boldsymbol{\lambda})\ \mathbb{O}_{m,n-\rho}], \tag{6}$$

где $R_1(\boldsymbol{\lambda})$ – рациональная $m \times \rho$ матрица полного столбцового ранга. Обозначая $E^{-1}(\boldsymbol{\lambda}) \equiv P(\boldsymbol{\lambda}) \equiv [P_1(\boldsymbol{\lambda})\, P_0(\boldsymbol{\lambda})]$, где $P_1(\boldsymbol{\lambda})$ – рациональная матрица размеров $\rho \times n$, имеем из (6)

$$F(\boldsymbol{\lambda}) = R_1(\boldsymbol{\lambda})P_1(\boldsymbol{\lambda}). \tag{7}$$

Представляя рациональные матрицы $P_1(\boldsymbol{\lambda})$ и $R_1(\boldsymbol{\lambda})$ в виде

$$P_1(\boldsymbol{\lambda}) = \beta^{-1}(\boldsymbol{\lambda})F_1(\boldsymbol{\lambda}), \quad R_1(\boldsymbol{\lambda}) = \gamma^{-1}(\boldsymbol{\lambda})F_2(\boldsymbol{\lambda}),$$

где $F_1(\boldsymbol{\lambda})$ и $F_2(\boldsymbol{\lambda})$ – полиномиальные матрицы соответствующих размеров, получаем из (7) представление (5), где $\alpha(\boldsymbol{\lambda}) := \beta(\boldsymbol{\lambda})\gamma(\boldsymbol{\lambda})$.

Если полиномиальная матрица $F(\boldsymbol{\lambda})$ является регулярной, то ее конечный спектр определяется единственным детерминантным уравнением

$$\varphi(\boldsymbol{\lambda}) := \det F(\boldsymbol{\lambda}) = 0,$$

левую часть которого $\varphi(\boldsymbol{\lambda})$ будем называть характеристическим полиномом матрицы $F(\boldsymbol{\lambda})$, так что $\sigma_c[F] = \{\varphi(\boldsymbol{\lambda}) = 0\}$. Таким образом, конечный спектр регулярной полиномиальной матрицы состоит только из $(q-1)$-мерных решений, определяемых делителями характеристического полинома, т.е. характеризуется только собственными полиномами.

Из вышесказанного следует, что при $q > 1$ только сингулярная q-параметрическая полиномиальная матрица при $k > 1$ может иметь $(q-k)$-мерные собственные значения. Поэтому совокупность $(q-1)$-мерных собственных значений полиномиальной матрицы $F(\boldsymbol{\lambda})$, т.е. совокупность ее собственных полиномов, будем называть регулярной частью конечного спектра и обозначать ее $\sigma_{cr}[F]$, а совокупность $(q-k)$-мерных собственных значений при $k > 1$ будем называть сингулярной частью конечного спектра и обозначать ее $\sigma_{cs}[F]$. Таким образом, $\sigma_c[F] = \sigma_{cr}[F] \cup \sigma_{cs}[F]$.

Справедливость использования названия сингулярного спектра для совокупности $(q-k)$-мерных собственных значений сингулярной матрицы при $k > 1$ подтверждается следующим свойством полиномиальных базисов ее нуль-пространств [3].

Теорема. *Пусть $X(\boldsymbol{\lambda})$ и $Y(\boldsymbol{\lambda})$ – $n \times (n-\rho)$ и $m \times (m-\rho)$ полиномиальные базисные матрицы, отвечающие соответственно правому $N_c[F]$ и левому $N_r[F]$ нуль пространствам $m \times n$ полиномиальной матрицы $F(\boldsymbol{\lambda})$ ранга ρ:*

$$F(\boldsymbol{\lambda})X(\boldsymbol{\lambda}) = \mathbb{O}_{m,n-\rho}, \quad Y^H(\boldsymbol{\lambda})F(\boldsymbol{\lambda}) = \mathbb{O}_{m-\rho,n}.$$

Тогда сингулярная часть полного конечного спектра матрицы $F(\boldsymbol{\lambda})$ состоит из объединения сингулярных частей полных конечных спектров матриц $X(\boldsymbol{\lambda})$ и $Y(\boldsymbol{\lambda})$.

Приведем здесь более простое доказательство теоремы. Вначале отметим связь “дополнительных” миноров квадратной матрицы и присоединенной к ней матрицы.

Пусть F матрица порядка n, элементы которой f_{ij}, $i,j = 1,\dots,n$, являются скалярными величинами произвольной природы. Элементы g_{ij}, $i,j = 1,\dots,n$, присоединенной к ней матрицы G определяются соотношениями

$$g_{ij} = (-1)^{i+j} F\begin{pmatrix} 1,\dots,j-1,j+1,\dots,n \\ 1,\dots,i-1,i+1,\dots,n \end{pmatrix}, \quad i,j = 1,\dots,n, \tag{8}$$

так что имеет место равенство

$$FG = GF = \varphi I_n,$$

где $\varphi := \det F$. Из свойств ассоциированных матриц [1] следует соотношение для “дополнительных” миноров матриц F и G:

$$G\begin{pmatrix} i_1,\dots,i_m \\ j_1,\dots,j_m \end{pmatrix} = (-1)^{\sigma_{\mathbf{ij}}}\varphi^{m-1} F\begin{pmatrix} k_1,\dots,k_{n-m} \\ l_1,\dots,l_{n-m} \end{pmatrix}, \tag{9}$$

где

$$\{i_1,\dots,i_m\}\cup\{l_1,\dots,l_{n-m}\}=\{1,\dots,n\},$$

$$\{j_1,\dots,j_m\}\cup\{k_1,\dots,k_{n-m}\}=\{1,\dots,n\},\quad 1\leqslant m\leqslant n-1.$$

Показатель степени $\sigma_{\mathbf{ij}} := \sum_{s=1}^{m}(i_s+j_s)$ может быть заменен на $\sigma_{\mathbf{kl}} := \sum_{r=l}^{n-m}(k_r+l_r)$. Рассмотрим теперь случай, когда $F(\boldsymbol{\lambda})$ является матрицей полного строчного ранга размеров $\rho\times n$. Дополним ее некоторым образом до регулярной полиномиальной матрицы[2] $\widetilde{F}(\boldsymbol{\lambda}) := [F(\boldsymbol{\lambda})\ F_0(\boldsymbol{\lambda})]^B$ порядка n. Присоединенную к ней полиномиальную матрицу $G(\boldsymbol{\lambda})$ представим в виде $\widetilde{G}(\boldsymbol{\lambda}) := [G(\boldsymbol{\lambda})\ G_0(\boldsymbol{\lambda})]$, где $G_0(\boldsymbol{\lambda})$ – полиномиальная матрица размеров $n\times(n-\rho)$. Тогда имеем

$$\widetilde{F}(\boldsymbol{\lambda})\,\widetilde{G}(\boldsymbol{\lambda}) = [F(\boldsymbol{\lambda})\ F_0(\boldsymbol{\lambda})]^B\,[G(\boldsymbol{\lambda})\ G_0(\boldsymbol{\lambda})] = \varphi(\boldsymbol{\lambda})I_n, \tag{10}$$

где $\varphi(\boldsymbol{\lambda}) := \det\widetilde{F}(\boldsymbol{\lambda})$. Из (10) следует, что столбцы матрицы $G_0(\boldsymbol{\lambda})$ образуют полиномиальный базис правого нуль-пространства матрицы $F(\boldsymbol{\lambda}) : F(\boldsymbol{\lambda})G_0(\boldsymbol{\lambda}) = \mathbb{O}_{\rho,n-\rho}$. Из (9) следует, что каждый минор порядка ρ матрицы $F(\boldsymbol{\lambda})$, образованный элементами ее столбцов $i_1,\dots,i_\rho$, $(1\leqslant i_1,\dots,i_\rho\leqslant n)$ равен, с точностью до множителя $(-1)^{\sigma_{\mathbf{ij}}}\varphi^{n-\rho-1}(\boldsymbol{\lambda})$, где $\sigma_{\mathbf{ij}} := \sum_{s=1}^{\rho}(s+i_s)$, минору порядка $n-\rho$ матрицы $G_0(\boldsymbol{\lambda})$, образованному вычеркиванием ее строк $i_1,\dots,i_\rho$. Таким образом, левые части систем вида (3), которые определяют конечные спектры матриц $F(\boldsymbol{\lambda})$ и $G_0(\boldsymbol{\lambda})$, отличаются только общим множителем $\varphi^{n-\rho-1}(\boldsymbol{\lambda})$ и, возможно, знаком. Следовательно, конечные сингулярные части их спектров совпадают. Очевидно, что это будет выполняться и для любой другой базисной матрицы правого нуль-пространства матрицы $F(\boldsymbol{\lambda})$ полного строчного ранга.

Аналогичным образом, приходим к выводу о том, что совпадают конечные сингулярные части спектров матрицы $F(\boldsymbol{\lambda})$ полного столбцового ранга и базисной матрицы ее левого нуль-пространства.

В общем случае $m\times n$ матрица $F(\boldsymbol{\lambda})$ ранга ρ представима в виде (5). Тогда из лемм 1 и 2 следует, что $\sigma_c[F_1]\cup\sigma_c[F_2] = \sigma_c[F]\cup\{\alpha^\rho(\boldsymbol{\lambda})=0\}$ и что $N_c[F]=N_c[F_2]$, $N_r[F]=N_r[F_l]$. Таким образом, приходим к выводу, что конечный сингулярный спектр

[2]Символ ^{B} обозначает блочное транспонирование матрицы.

полиномиальной матрицы $F(\boldsymbol{\lambda})$ совпадает с объединением конечных сингулярных частей спектров базисных матриц, отвечающих ее нуль-пространством:

$$\sigma_{cs}[F] = \sigma_{cs+}[F] \cup \sigma_{cs-}[F], \quad \sigma_{cs}[X] \equiv \sigma_{cs+}[F], \quad \sigma_{cs}[Y] \equiv \sigma_{cs-}[F].$$

Существование сингулярной части спектра полиномиальной матрицы приводит к существенному усложнению понятия геометрической кратности точки ее конечного спектра. В контексте данной работы этот аспект многопараметрической спектральной задачи не рассматривается.

Для регулярных спектральных характеристик полиномиальной матрицы $F(\boldsymbol{\lambda})$ вводится следующее обобщающее понятие.

Определение 3. *Свободный полиномиальный вектор* $\mathbf{x}(\boldsymbol{\lambda})$ *будем называть правым порождающим собственным вектором полиномиальной матрицы* $F(\boldsymbol{\lambda})$, *отвечающим ее собственному полиному* $\chi(\boldsymbol{\lambda})$, *если имеет место соотношение*

$$F(\boldsymbol{\lambda})\mathbf{x}(\boldsymbol{\lambda}) = \chi(\boldsymbol{\lambda})\mathbf{z}(\boldsymbol{\lambda}),$$

где полиномиальный вектор $\mathbf{z}(\boldsymbol{\lambda}) \not\equiv 0$, *и вычисленное в любом нуле* $\boldsymbol{\lambda}^* \notin \sigma_{cs}[\mathbf{x}]$ *полинома* $\chi(\boldsymbol{\lambda})$ *значение* $\mathbf{x}(\boldsymbol{\lambda}^*)$, *отличное от нуля, является правым собственным вектором матрицы* $F(\boldsymbol{\lambda})$, *отвечающим этой точке* $\boldsymbol{\lambda}^*$.

Понятие *свободного вектора* приводится ниже, а свойства порождающих собственных векторов рассматриваются в [5].

3. Пусть $\mathbf{e}_i(\boldsymbol{\lambda}) \in \mathbb{C}^n[\boldsymbol{\lambda}]$, $i = 1, \dots, m$ – полиномиальный базис некоторого подпространства многопараметрических рациональных векторов $\mathbf{M} \subset \mathbb{C}^n(\boldsymbol{\lambda})$. Сформируем из базисных векторов $\mathbf{e}_i(\boldsymbol{\lambda})$, $i = 1, \dots, m$, базисную полиномиальную $n \times m$ матрицу

$$E(\boldsymbol{\lambda}) := [\mathbf{e}_1(\boldsymbol{\lambda})\ \mathbf{e}_2(\boldsymbol{\lambda}) \dots\ \mathbf{e}_m(\boldsymbol{\lambda})]. \tag{11}$$

В общем случае, эта матрица полного столбцового ранга может иметь сингулярный спектр. Естественно было бы ожидать, что в любом подпространстве $\mathbf{M} \subset C^n(\boldsymbol{\lambda})$ существует *свободный* полиномиальный базис $\mathbf{e}_i(\boldsymbol{\lambda})$, $i = 1, \dots, m$, т.е. такой базис, что соответствующая базисная полиномиальная матрица (11) не имеет конечного регулярного спектра. Для одномерных подпространств, базис которых состоит из одного вектора это действительно имеет место. Для получения свободного базисного вектора достаточно найти наибольший общий делитель (НОД) компонент исходного базисного вектора и разделить вектор на этот НОД. При $m = n$ свободный базис также существует: в качестве базисной матрицы можно взять I_n. Следующий пример опровергает справедливость вышеизложенного предположения при $1 < m < n$.

Пример. Рассмотрим трехпараметрическую 1×3 матрицу

$$F(\lambda, \mu, \nu) = [\lambda \, \mu \, \nu] \tag{12}$$

ранга 1, конечный спектр которой состоит только из сингулярной части с единственным нуль-мерным собственным значением: $\sigma_c[F] = \sigma_{cs}[F] = \{(0, 0, 0)\}$. Размерность правого нуль-пространства $N_c[F] := N_c(\lambda, \mu, \nu) \equiv \ker F(\lambda, \mu, \nu)$ матрицы $F(\lambda, \mu, \nu)$ равна двум. Легко убедиться в том, что следующие матрицы являются базисными матрицами этого нуль-пространства:

$$E_1(\lambda, \mu, \nu) = \begin{bmatrix} \mu & \nu \\ -\lambda & 0 \\ 0 & -\lambda \end{bmatrix}, \quad E_2(\lambda, \mu, \nu) = \begin{bmatrix} -\mu & 0 \\ \lambda & \nu \\ 0 & -\mu \end{bmatrix},$$

$$E_3(\lambda, \mu, \nu) = \begin{bmatrix} -\nu & 0 \\ 0 & -\nu \\ \lambda & \mu \end{bmatrix}.$$

Все эти матрицы имеют одну и ту же сингулярную часть конечных спектров $\sigma_{cs}[E_i] = \{(0, 0, 0)\}$, $i = 1, 2, 3$, совпадающую с $\sigma_{cs}[F]$, и различающиеся регулярные части конечных спектров:

$$\sigma_{cr}[E_1] = \{\lambda = 0\}, \quad \sigma_{cr}[E_2] = \{\mu = 0\}, \quad \sigma_{cr}[E_3] = \{\nu = 0\}.$$

Матрицы $E_i(\lambda, \mu, \nu)$, $i = 1, 2, 3$, связаны между собой соотношениями вида

$$E_i(\lambda, \mu, \nu) G_{ij}(\lambda, \mu, \nu) = E_j(\lambda, \mu, \nu), \quad i, j = 1, 2, 3,$$

где, например,

$$G_{12}(\lambda, \mu, \nu) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \mu \end{bmatrix}, \quad G_{21}(\lambda, \mu, \nu) = \begin{bmatrix} -1 & -\nu \\ 0 & \lambda \end{bmatrix},$$

$$G_{23}(\lambda, \mu, \nu) = \begin{bmatrix} 0 & -\nu \\ -1 & -\lambda \end{bmatrix}, \quad G_{32}(\lambda, \mu, \nu) = \begin{bmatrix} 0 & \mu \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Покажем, что невозможно построить свободный полиномиальный базис рассматриваемого нуль-пространства. Доказательство осуществим от противного. Предположим, что такой базис существует. Обозначим соответствующую ему базисную матрицу через $E(\lambda,\mu,\nu)$:

$$E(\lambda,\mu,\nu)=\begin{bmatrix} e_{11} & e_{12}\\ e_{21} & e_{22}\\ e_{31} & e_{32}\end{bmatrix}.$$

Тогда каждая из матриц $E_i(\lambda,\mu,\nu)$, $i=1,2,3$, связана с матрицей $E(\lambda,\mu,\nu)$ соотношением вида:

$$E_i(\lambda,\mu,\nu)=E(\lambda,\mu,\nu)H_i(\lambda,\mu,\nu),\quad i=1,2,3, \tag{13}$$

причем (в соответствии с леммой 1) конечный спектр каждой регулярной матрицы $H_i(\lambda,\mu,\nu)$ совпадает с регулярной частью конечного спектра соответствующей матрицы $E_i(\lambda,\mu,\nu)$, $i=1,2,3$. Рассмотрим, для определенности, случай $i=1$, так что $\sigma_{cr}[H_1]=$ $=\sigma_{cr}[E_1]=\{\lambda=0\}$. Обозначим через $K(\lambda,\mu,\nu)$:

$$K(\lambda,\mu,\nu)=\begin{bmatrix} k_{11} & k_{12}\\ k_{21} & k_{22}\end{bmatrix}$$

матрицу, присоединенную к матрице $H_1(\lambda,\mu,\nu)$, так что имеет место соотношение:

$$H_1(\lambda,\mu,\nu)K(\lambda,\mu,\nu)=K(\lambda,\mu,\nu)H_1(\lambda,\mu,\nu)=\lambda I. \tag{14}$$

Следовательно, конечный спектр регулярной матрицы $K(\lambda,\mu,\nu)$ определяется характеристическим полиномом

$$\det K(\lambda,\mu,\nu)=\lambda. \tag{15}$$

Из (13) и (14) получаем соотношение

$$E_1(\lambda,\mu,\nu)K(\lambda,\mu,\nu)=\lambda E(\lambda,\mu,\nu). \tag{16}$$

Вид второй и третьей строк матрицы $E_1(\lambda,\mu,\nu)$ автоматически обеспечивает возможность вынесения общего множителя λ в правой части (16). Далее, произведение первой строки матрицы $E_1(\lambda,\mu,\nu)$

$$[\mu\ \nu] \tag{17}$$

на каждый из столбцов матрицы $K(\lambda,\mu,\nu)$ должно дать либо отличный от тождественного нуля полином, кратный λ, либо число 0. Учитывая то, что элементы строки (17) не зависят от λ, первый результат можно получить только, если соответствующий столбец j регулярной матрицы $K(\lambda,\mu,\nu)$ является кратным λ, т.е. если оба элемента столбца, или хотя бы один элемент (равенство второго из элементов нулю допустимо) кратны λ:

$$\begin{bmatrix} \lambda\widehat{k}_{1j} \\ \lambda\widehat{k}_{2j} \end{bmatrix}.$$

Второй результат достигается только, если столбец матрицы $K(\lambda,\mu,\nu)$ пропорционален правому полиномиальному решению матрицы-строки (17):

$$\begin{bmatrix} -\nu \\ \mu \end{bmatrix}. \tag{18}$$

Так как матрица $K(\lambda,\mu,\nu)$ является регулярной, а ее определитель (15) равен λ, то для столбцов матрицы $K(\lambda,\mu,\nu)$ возможна только смешанная ситуация, когда один из них является кратным λ, а второй – пропорционален столбцу (18). Тогда, с точностью до отличного от нуля множителя α, имеем следующее выражение определителя $K(\lambda,\mu,\nu)$:

$$\det K(\lambda,\mu,\nu) = \alpha(\mu\widehat{k}_{1j} + \nu\widehat{k}_{2j}), \tag{19}$$

где j – номер столбца матрицы $K(\lambda,\mu,\nu)$, являющегося кратным λ. Осталось отметить очевидный факт: ни при каких условиях последний сомножитель $(\mu\widehat{k}_{1j} + \nu\widehat{k}_{2j})$ в (19) не может быть равен отличной от нуля константе. Таким образом, мы пришли к противоречию с предположением о существовании свободного базиса правого нуль-пространства трехпараметрической матрицы $F(\lambda,\mu,\nu)$ вида (12). Следовательно, справедливо следующее.

Утверждение. *Не в любом многопараметрическом рациональном векторном подпространстве существует свободный полиномиальный базис.*

4. Задача построения сводного базиса подпространства эквивалентна задаче "исчерпывания" регулярного спектра у сингулярной матрицы $F(\boldsymbol{\lambda})$ полного столбцового ранга, т.е. представления ее в виде (4), где матрица полного столбцового ранга $F_1(\boldsymbol{\lambda})$ не имеет регулярного спектра, а конечный спектр регулярной матрицы $F_2(\boldsymbol{\lambda})$ совпадает с конечным регулярным спектром исходной матрицы $F(\boldsymbol{\lambda})$. При этом столбцы матрицы $F_1(\boldsymbol{\lambda})$ образуют свободный базис подпространства, являющегося линейной оболочкой столбцов исходной матрицы $F(\boldsymbol{\lambda})$.

Анализ свойств порождающих векторов многопараметрической полиномиальной матрицы позволяет сделать следующий вывод: исчерпывание собственного полинома полиномиальной матрицы не возможно, если соответствующий ему порождающий собственный вектор, имеет конечный сингулярный спектр. Это связано с тем, что невозможно дополнить такой вектор до унимодулярной полиномиальной матрицы. Можно сделать следующие предположения.

Гипотеза. Исчерпывание собственного полинома полиномиальной матрицы возможно, если соответствующий ему порождающий собственный вектор, не имеет конечного сингулярного спектра. Исчерпывание регулярного спектра у матрицы полного столбцового (строчного) ранга возможно, если она не имеет левого (правого) сингулярного спектра.

В работе [2] был предложен метод построения несократимой факторизации многопараметрической рациональной матрицы, в основе которого лежит построение свободного базиса правого нуль-пространства для некоторой полиномиальной матрицы. Таким образом, вышеустановленный факт приводит к выводу о том, что не для любой рациональной матрицы возможно построение соответствующей несократимой факторизации. В частности, используя матрицу (12) из рассмотренного выше примера, можно сделать вывод о том, что рациональная матрица

$$R((\lambda, \mu, \nu) = \lambda^{-1}[\mu \ \nu] \tag{20}$$

не может быть представлена в виде правой несократимой факторизации. Заметим, что само представление (20) матрицы $R(\lambda, \mu, \nu)$ является ее левой несократимой факторизацией. Очевидно, что рассматриваемая задача также связана с задачей исчерпывания регулярного спектра.

Литература

1. Ф. Р. Гантмахер, *Теория матриц*. Наука, М., 1967.

2. В. Н. Кублановская, В. Б. Хазанов, *Несократимые факторизации q-параметрических рациональных матриц*. Зап. научн. семин. ПОМИ, **248** (1998), 147–164.
3. В. Б. Хазанов, *О спектральных свойствах λ-матриц*. Зап. научн. семин. ЛОМИ, **111** (1981), 195–217.
4. В. Б. Хазанов, *О спектральных свойствах многопараметрических полиномиальных матриц*. Зап. научн. семин. ПОМИ, **229** (1995), 284–321.
5. В. Б. Хазанов, *О собственных порождающих векторах многопараметрической полиномиальной матрицы*. Зап. научн. семин. ПОМИ, **248** (1998), 165–186.

Khazanov V. B. On some properties of polynomial bases of subspaces over the field of rational functions in several variables.

Spaces of multiparameter rational vectors, i.e., of vectors whose components are rational functions in several variables, and polynomial bases of their subspaces are considered. The conjecture that any subspace in the space of multiparameter rational vectors possesses a “free” polynomial basis, i.e., a basis for which the associated basis multiparameter polynomial matrix has no finite regular spectrum, is refuted on an example. Some consequences of this fact are indicated. Simpler proofs of some properties of singular spectra of the basis polynomial matrices corresponding to the null-spaces of a singular polynomial matrix are presented.

Санкт-Петербургский государственный морской технический университет

Поступило 23 января 2002 г.