Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 284, 2002 г.

М. Н. Яковлев

СУЩЕСТВОВАНИЕ 2^n ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ У СИСТЕМЫ n ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

Доказываются теоремы разрешимости краевой задачи для системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$u_i' = f_i(t, u_1, \dots, u_n) \quad (i = 1, \dots, n), \quad 0 < t < 1 \tag{1}$$

с двухточечными краевыми условиями

$$u_i(0) = \Delta_i u_i(1) \quad (i = 1, \dots, n). \tag{2}$$

Установлены условия (теоремы 3 и 5), обеспечивающие существование 2^n решений задачи (1), (2).

В заключительной части приводятся соответствующие теоремы существования 1-периодических решений, т.е. решений, удовлетворяющих условиям

$$u_i(t+1) = u_i(t) \quad (i = 1, \dots, n), \quad -\infty < t < +\infty, \tag{3}$$

для системы n дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом.

Теорема 1. *Пусть*

1. $\beta_i \in \{-1, 1\}$ $(i = 1, \dots, n)$*;*
2. *функции* $a_i(t)$ $(i = 1, \dots, n)$ *суммируемы на отрезке* $[0, 1]$, *и верны неравенства*

$$\int_0^1 a_i(t)dt > 0 \quad (i = 1, \dots, n); \tag{4}$$

3. *неотрицательные функции* $h_i(t, z_1, \dots, z_{i-1}) \geqslant 0$ $(i = 1, \dots, n)$ *не убывают по всем* $z_1, \dots, z_{i-1}$ *и удовлетворяют условиям Каратеодори при* $0 \leqslant t \leqslant 1$, $0 \leqslant z_k < +\infty$ $(k = 1, \dots, i-1)$*;*

4. *функции* $f_i(t, u_1, \dots, u_n)$ $(i = 1, \dots, n)$ *удовлетворяют условиям Каратеодори при* $0 \leqslant t \leqslant 1$, $-\infty < u_k < +\infty$ $(k = 1, \dots, n)$*;*
5. *верны неравенства*

$$\beta_i f_i(t, u_1, \dots, u_n) \operatorname{sign} u_i \geqslant a_i(t)|u_i| - h_i(t, |u_1|, \dots, |u_{i-1}|) \\ (i = 1, \dots, n) \tag{5}$$

при $0 \leqslant t \leqslant 1$, $-\infty < u_k < +\infty$ $(k = 1, \dots, n)$*;*

6. *последовательность неотрицательных чисел* q_k $(k = 1, \dots, n)$ *удовлетворяет соотношениям*

$$q_i \geqslant \max_{0 \leqslant t \leqslant 1} \int_0^1 |g_i(t, s)| h_i(s, q_1, \dots, q_{i-1}) ds \quad (i = 1, \dots, n), \tag{6}$$

где

$$g_i(t, s) = \begin{cases} \frac{v_i(t)}{[1 - |\Delta_i| v_i(1)] v_i(s)}, & 0 \leqslant s < t \leqslant 1, \\ \\ \frac{|\Delta_i| v_i(t) v_i(1)}{[1 - |\Delta_i| v_i(1)] v_i(s)}, & 0 \leqslant t < s \leqslant 1, \end{cases} \\ (i = 1, \dots, n) \tag{7}$$

и

$$v_i(s) = \exp\left[\beta_i \int_0^s a_i(t) dt\right] \quad (i = 1, \dots, n);$$

7. *верны неравенства*

$$\exp\left[-\int_0^1 a_i(t) at\right] < |\Delta_i| < \exp\left[\int_0^1 a_i(t) at\right] \quad (i = 1, \dots, n). \tag{8}$$

Тогда краевая задача (1), (2) *имеет по крайней мере одно решение* $u(t) = \{u_1(t), \dots, u_n(t)\}$ *такое, что* $|u_i(t)| \leqslant q_i$ $(i = 1, \dots, n)$, $0 \leqslant t \leqslant 1$.

Доказательство. Наряду с краевой задачей (1), (2) рассмотрим λ-семейство $(0 \leqslant \lambda \leqslant 1)$ краевых задач

$$\beta_i \frac{du_i}{dt} - a_i(t) u_i = \lambda \big[\beta_i f_i(t, u_1, \dots, u_n) - a_i(t) u_i\big],$$

$$0 < t < 1 \quad (i = 1, \ldots, n), \tag{9}$$

$$u_i(0) = \Delta_i u_i(1) \quad (i = 1, \ldots, n).$$

Умножая каждое из уравнений (9) на $\operatorname{sign} u_i$ и учитывая неравенства (5), получим

$$\beta_i \frac{d|u_i|}{dt} - a_i(t)|u_i| \geqslant -h_i\bigl(t, |u_1|, \ldots, |u_{i-1}|\bigr),$$

$$0 < t < 1 \quad (i = 1, \ldots, n), \tag{10}$$

$$|u_i(0)| = |\Delta_i|\,|u_i(1)| \quad (i = 1, \ldots, n), \tag{11}$$

и поэтому

$$|u_i(t, \lambda)| \leqslant \int\limits_0^1 |g_i(t,s)| h_i(s, q_1, \ldots, q_{i-1}) ds \leqslant q_i,$$

$$0 \leqslant t \leqslant 1, \quad 0 \leqslant \lambda \leqslant 1 \quad (i = 1, \ldots, n). \tag{12}$$

Для доказательства разрешимости задачи (9), (2) рассмотрим преобразование пространства вектор-функций $c_n([0,1])$ в себя, определяемое соотношениями

$$z = \lambda \Phi(w),$$

где компоненты вектора $\Phi(w)$ определяются равенствами

$$\Phi_i(w)(t) = \int\limits_0^1 K_i(t,s)\bigl[f_i(s, w_1(s), \ldots, w_n(s)) - a_i(s) w_i(s)\bigr]\, ds,$$

$$0 \leqslant t \leqslant 1 \quad (i = 1, \ldots, n).$$

Здесь

$$K_i(t,s) = \begin{cases} \frac{v_i(t)}{[1-\Delta_i v_i(1)] v_i(s)}, & 0 \leqslant s < t \leqslant 1, \\ \\ \frac{\Delta_i v_i(1) v_i(t)}{[1-\Delta_i v_i(1)] v_i(s)}, & 0 \leqslant t < s \leqslant 1, \end{cases} \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

Оператор $\Phi(w)$ вполне непрерывен как оператор из $c_n([0,1])$ в $c_n([0,1])$. Поэтому, учитывая неравенства (12), по теореме о неподвижной точке (см., например, [1], с. 231–232) заключаем, что краевая задача (1), (2) имеет решение $u(t) = \{u_1(t), \ldots, u_n(t)\}$, удовлетворяющее неравенствам $|u_i(t)| \leqslant q_i$, $(i = 1, \ldots, n)$.

Теорема 2. *Пусть*

1. $\beta_i \in \{-1, 1\}$, $\gamma_i \in \{0, 1\}$, $\delta_i \in \{0, 1\}$, $\gamma_i + \delta_i = 1$ $(i = 1, \dots, n)$, $\Delta_i > 0$ $(i = 1, \dots, n)$;
2. *функции* $a_i(t)$ $(i = 1, \dots, n)$ *суммируемы на отрезке* $[0, 1]$, *и верны неравенства*

$$\int_0^1 a_i(t)dt > 0 \quad (i = 1, \dots, n);$$

3. *неотрицательные функции* $h_i(t, z_1, \dots, z_{i-1}) \geqslant 0$ $(i = 1, \dots, n)$ *не убывают по всем* $z_1, \dots, z_{i-1}$ *и удовлетворяют условиям Каратеодори при* $0 \leqslant t \leqslant 1$, $0 \leqslant z_k < +\infty$ $(k = 1, \dots, i-1)$;
4. *функции* $f_i(t, u_1, \dots, u_n)$ $(i = 1, \dots, n)$ *удовлетворяют условиям Каратеодори при* $0 \leqslant t \leqslant 1$, $\gamma_k u_k \geqslant 0$, $\delta_k u_k \leqslant 0$ $(k = 1, \dots, n)$;
5. *верны неравенства*

$$\beta_i f_i(t, u_1, \dots, u_n) \operatorname{sign} u_i \geqslant a_i(t)|u_i| - h_i(t, |u_1|, \dots, |u_{i-1}|) \quad (i = 1, \dots, n) \tag{13}$$

при $0 \leqslant t \leqslant 1$, $\gamma_k u_k \geqslant 0$, $\delta_k u_k \leqslant 0$ $(k = 1, \dots, n)$;

6. *выполняются условия* 6 *и* 7 *теоремы* 1;
7. *верны неравенства*

$$\gamma_i \beta_i f_i(t, u_1, \dots, u_{i-1}, 0, u_{i+1}, \dots, u_n) \leqslant 0 \quad (i = 1, \dots, n), \tag{14}$$

$$\delta_i \beta_i f_i(t, u_1, \dots, u_{i-1}, 0, u_{i+1}, \dots, u_n) \geqslant 0 \quad (i = 1, \dots, n) \tag{15}$$

при $0 \leqslant t \leqslant 1$, $\gamma_k u_k \geqslant 0$, $\delta_k u_k \leqslant 0$ $(k = 1, \dots, n)$.

Тогда существует по крайней мере одно решение $u(t) = \{u_1(t), \dots, u_n(t)\}$ *краевой задачи* (1), (2) *такое, что* $\gamma_k u_k(t) \geqslant 0$, $\delta_k u_k(t) \leqslant 0$, $|u_k(t)| \leqslant q_k$, $0 \leqslant t \leqslant 1$ $(k = 1, \dots, n)$.

Доказательство. Наряду с краевой задачей (1), (2) рассмотрим λ-семейство $(0 \leqslant \lambda \leqslant 1)$ краевых задач

$$\beta_i u_i' - a_i(t)u_i = \lambda\big[\beta_i f_i\big(t, \langle\, u_1 \,\rangle, \dots, \langle\, u_n \,\rangle\big) - a_i(t)\langle\, u_i \,\rangle\big]$$
$$(i = 1, \dots, n), \quad 0 < t < 1, \tag{16}$$

$$u_i(0) = \Delta_i u_i(1) \quad (i = 1, \dots, n). \tag{2}$$

Здесь

$$\langle\, u_k(t)\,\rangle = \\ = \begin{cases} \max\{0, u_k(t)\} & \text{при} \quad \gamma_k = 1, \ 0 \leqslant t \leqslant 1 \\ \min\{0, u_k(t)\} & \text{при} \quad \delta_k = 1, \ 0 \leqslant t \leqslant 1 \end{cases} \quad k = 1, \ldots, n. \quad (17)$$

Любое решение $u(t,\lambda) = \{u_1(t,\lambda), \ldots, u_n(t,\lambda)\}$ λ-семейства краевых задач (16), (2) удовлетворяет неравенствам $\gamma_k u_k(t,\lambda) \geqslant 0$, $\delta_k u_k(t,\lambda) \leqslant 0$ $(k = 1, \ldots, n)$, $0 \leqslant t \leqslant 1$. В самом деле, пусть при некотором k существует t^*, $0 \leqslant t^* \leqslant 1$, такое, что $\gamma_k u_k(t^*,\lambda) < 0$.

Рассмотрим сначала случай $\beta_k = 1$. Пусть $t^* = 0$. Тогда $u_k(t,\lambda) < 0$ при $0 \leqslant t < t_0$. Поскольку $\langle\, u_k(t,\lambda)\,\rangle = 0$ при $0 \leqslant t < t_0$, имеем

$$u_k(t_0,\lambda) = u_k(0,\lambda) \exp\left[\int_0^{t_0} a_k(\tau)d\tau\right] + \\ +\lambda \int_0^{t_0} f_k\big(\tau, \langle\, u_1\,\rangle, \ldots, \langle\, u_{k-1}\,\rangle, 0, \langle\, u_{k+1}\,\rangle, \ldots, \langle\, u_n\,\rangle\big) \times \\ \times \exp\left[\int_\tau^{t_0} a_k(s)ds\right] d\tau < 0.$$

Таким образом $u_k(t,\lambda) < 0$ при всех $0 \leqslant t \leqslant 1$. Если $t^* = 1$, то, поскольку $u_k(0,\lambda) = \Delta_k u_k(1,\lambda) < 0$, опять получаем $u_k(t,\lambda) < 0$ при всех $0 \leqslant t \leqslant 1$. Если $0 < t^* < 1$, то $u_k(t,\lambda) < 0$ при $t^* \leqslant t < t_1$ и, повторяя приведенные выше рассуждения, получим сначала $u_k(t,\lambda) < 0$ при $t^* \leqslant t \leqslant 1$. Затем, учитывая равенство $u_k(0,\lambda) = \Delta_k u_k(1,\lambda) < 0$, вернемся к случаю $t^* = 0$. Но тогда

$$u_k(1,\lambda) = u_k(0,\lambda) \exp\left[\int_0^1 a_k(s)ds\right] + \\ +\lambda \int_0^1 f_k\big(\tau, \langle\, u_1\,\rangle, \ldots, \langle\, u_{k-1}\,\rangle, 0, \langle\, u_{k+1}\,\rangle, \ldots, \langle\, u_n\,\rangle\big) \times \\ \times \exp\left[\int_\tau^1 a_k(s)ds\right] d\tau \leqslant u_k(0,\lambda) \exp\left[\int_0^1 a_k(s)ds\right].$$

Учитывая краевое условие $u_k(0,\lambda)=\Delta_k u_k(1,\lambda)$, получаем

$$0\leqslant u_k(0,\lambda)\left[\exp\left[\int\limits_0^1 a_k(s)ds\right]-\frac{1}{\Delta_k}\right].$$

Поскольку $u_k(0,\lambda)<0$, получаем $\Delta_k\leqslant\exp\left[-\int\limits_0^1 a_k(s)ds\right]$, что противоречит неравенству (8). В случае $\beta_k=-1$ рассуждения начинаем с $t^*=1$. Случай неравенств $\delta_i u_i(t,\lambda)\leqslant 0$ рассматривается аналогично. В силу доказанных таким образом неравенств $\gamma_i u_i(t,\lambda)\geqslant 0$, $\delta_i u_i(t,\lambda)\leqslant 0$ решение краевой задачи (16), (2) является решением краевой задачи

$$\begin{aligned}&\beta_i u_i'=\lambda\beta_i f_i(t,u_1,\dots,u_n)+(1-\lambda)a_i(t)u_i\\&u_i(0)=\Delta_i u_i(1),\end{aligned}$$

и, как и при доказательстве теоремы 1, получаем оценку решений

$$|u_i(t,\lambda)|\leqslant q_i\quad(i=1,\dots,n),\quad 0\leqslant t\leqslant 1,\quad 0<\lambda<1.$$

Остается применить теорему о неподвижной точке к преобразованию $z=\lambda\Phi(\langle\, w\,\rangle)$ в пространстве $c_n([0,1])$.

Теорема 3. *Пусть*

1. $\alpha_i\in\{-1,1\}$, $\Delta_i>0$ $(i=1,\dots,n)$*;*
2. *выполнены условия* 2, 3, 4, 6, 7 *теоремы* 1*;*
3. *верны неравенства*

$$\alpha_i f_i(t,u_1,\dots,u_n)\geqslant a_i(t)|u_i|-h_i(t,|u_1|,\dots,|u_{i-1}|)\ (i=1,\dots,n),\quad(18)$$

$$\alpha_i f_i(t,u_1,\dots,u_{i-1},0,u_{i+1},\dots,u_n)<0\quad(i=1,\dots,n)\qquad(19)$$

при $0\leqslant t\leqslant 1$, $-\infty<u_k<+\infty$ $(k=1,\dots,n)$.

Тогда существует по крайней мере 2^n *решений краевой задачи* (1), (2)*. При этом компоненты всех этих решений удовлетворяют неравенствам* $|u_k(t)|\leqslant q_k$ $(k=1,\dots,n)$, $0\leqslant t\leqslant 1$, *и для каждого из* 2^n *квадрантов вещественного* n*-мерного пространства* R^n *существует по крайней мере одно решение, все значения которого принадлежат этому квадранту.*

Доказательство. Рассмотрим некоторый квадрант n-мерного вещественного пространства R^n с элементами $u=\{u_1,\dots,u_n\}$.

Если в рассматриваемом квадранте компонента $u_k \geqslant 0$, положим $\gamma_k = 1$, $\delta_k = 0$. Если же компонента $u_k \leqslant 0$, положим $\delta_k = 1$, $\gamma_k = 0$. Далее, положим $\beta_i = \alpha_i\ (\gamma_i - \delta_i)\ (i = 1, \dots, n)$. Тогда $\gamma_i\beta_i = \alpha_i$, $\delta_i\beta_i = -\alpha_i, \beta_i \operatorname{sign} u_i = \alpha_i\ (i = 1, \dots, n)$. Тем самым выполнены все условия теоремы 2, и, следовательно, существует решение краевой задачи (1), (2), удовлетворяющее неравенствам $\gamma_k u_k(t) \geqslant 0$, $\delta_k u_k(t) \leqslant 0$, т.е. со значениями в рассматриваемом квадранте. Таким образом, существует решение, значения которого принадлежат рассматриваемому квадранту и не принадлежат соседним квадрантам. Поскольку рассматривается любой квадрант, существует по крайней мере 2^n различных решений.

Теорема 4. *Пусть*

1. $\beta_i \in \{-1, 1\}$, $\Delta_i > 0\ (i = 1, \dots, n)$;
2. *вектор-функции* $A(t) = \{A_1(t), \dots, A_n(t)\}$ *и* $B(t) = \{B_1(t), \dots, B_n(t)\}$ *определены и абсолютно непрерывны при* $0 \leqslant t \leqslant 1$ *и* $A_i(t) \leqslant B_i(t)\ (i = 1, \dots, n)$;
3. *функции* $f_i(t, u_1, \dots, u_n)\ (i = 1, \dots, n)$ *определены и удовлетворяют условиям Каратеодори при* $0 \leqslant t \leqslant 1$, $A_k(t) \leqslant u_k \leqslant B_k(t)$ $(k = 1, \dots, n)$, $0 \leqslant t \leqslant 1$;
4. *для любой абсолютно непрерывной вектор-функции* $u(t) = \{u_1(t), \dots, u_n(t)\}$,

$$\langle\, u_k(t)\,\rangle = \min\big\{B_k(t), \max\{u_k(t), A_k(t)\}\big\},$$
$$0 \leqslant t \leqslant 1, \quad (k = 1, \dots, n); \tag{20}$$

5. *верны неравенства*

$$\beta_i\big\{A_i' - f_i\big(t, \langle\, u_1\,\rangle, \dots, \langle\, u_{i-1}\,\rangle, A_i(t), \langle\, u_{i+1}\,\rangle, \dots, \langle\, u_n\,\rangle\big)\big\} \leqslant 0, \tag{21}$$

$$\beta_i\big\{B_i'(t) - f_i\big(t, \langle\, u_1\,\rangle, \dots, \langle\, u_{i-1}\,\rangle, B_i(t), \langle\, u_{i+1}\,\rangle, \dots, \langle\, u_n\,\rangle\big)\big\} \geqslant 0, \tag{22}$$

$$\beta_i\big\{A_i(0) - \Delta_i A_i(1)\big\} \leqslant 0, \tag{23}$$

$$\beta_i\big\{B_i(0) - \Delta_i B_i(1)\big\} \geqslant 0, \tag{24}$$

$(i = 1, \dots, n)$ *при* $0 < t < 1$.

Тогда краевая задача (1), (2) *имеет решение* $u(t) = \{u_1(t), \dots, u_n(t)\}$ *такое, что* $A_k(t) \leqslant u_k(t) \leqslant B_k(t)\ (k = 1, \dots, n)$, $0 \leqslant t \leqslant 1$.

Доказательство. Пусть положительное число $w > 0$ таково, что

$$\frac{1}{\exp w} < \Delta_i < \exp w \quad (i = 1, \dots, n). \tag{25}$$

Наряду с задачей (1), (2) рассмотрим краевую задачу

$$\beta_i u_i' + w u_i = \beta_i f_i\big(t, \langle u_1 \rangle, \dots, \langle u_n \rangle\big) + w\langle u_i \rangle, \ 0 < t < 1, \tag{26}$$

$$u_i(0) = \Delta_i u_i(1) \quad (i = 1, \dots, n). \tag{27}$$

Краевая задача (26), (27), очевидно, разрешима. Покажем, что любое решение краевой задачи (26), (27) удовлетворяет неравенствам $A_i(t) \leqslant u_i(t) \leqslant B_i(t)$, $0 \leqslant t \leqslant 1$, $(i = 1, \dots, n)$. Тем самым любое решение краевой задачи (26), (27) является решением краевой задачи (1), (2). Допустим противное. Пусть, например, при некотором k существует t^*, $0 \leqslant t^* \leqslant 1$, такое что $A_k(t^*) > u_k(t^*)$. Пусть сначала $\beta_k = -1$. При $t^* = 0$ имеем $A_k(t) > u_k(t)$, $0 \leqslant t < t_0$. Из уравнения (26), учитывая, что $\langle u_k(t) \rangle = A_k(t)$ при $0 \leqslant t < t_0$, получим

$$u_k'(t) - w u_k(t) = f_k\big(t, \langle u_1(t) \rangle, \dots, \langle u_{k-1}(t) \rangle,$$

$$A_k(t), \langle u_{k+1}(t) \rangle, \dots, \langle u_n(t) \rangle\big) - w A_k(t), \quad 0 \leqslant t < t_0. \tag{28}$$

Складывая полученное равенство (28) с неравенством (21), получим

$$u_k'(t) - A_k'(t) - w\big[u_k(t) - A_k(t)\big] \leqslant 0, \quad 0 \leqslant t < t_0,$$

и

$$u_k(t_0) - A_k(t_0) \leqslant \big[u_k(0) - A_k(0)\big] \exp[w t_0] < 0.$$

Таким образом $u_k(t) - A_k(t) < 0$ при всех $0 \leqslant t \leqslant 1$ и поэтому

$$u_k(1) - A_k(1) \leqslant [u_k(0) - A_k(0)] \exp w.$$

Отсюда, используя краевое условие (27) и неравенства (23), получим

$$0 \leqslant [u_k(0) - A_k(0)] \left[\exp w - \frac{1}{\Delta_k}\right],$$

что невозможно, поскольку $\Delta_k > \frac{1}{\exp w}$ в силу неравенств (25). Тем самым неравенство $u_k(0) - A_k(0) < 0$ невозможно.

Пусть теперь $t^* = 1$. Тогда, учитывая краевые условия (27) и неравенства (23), получаем

$$u_k(0) - A_k(0) \leqslant \Delta_k[u_k(1) - A_k(1)] \tag{29}$$

и опять $u_k(t) - A_k(t) < 0$ при всех $0 \leqslant t \leqslant 1$, что, как показано выше, приводит к противоречию. Если $0 < t^* < 1$, то $u_k(t) - A_k(t) < 0$ при $t^* \leqslant t < t_1$, и, повторяя рассуждения, приведенные выше для случая $t^* = 0$, получаем сначала, что $u_k(t) - A_k(t) < 0$ при $t^* \leqslant t \leqslant 1$. Затем, используя неравенство (29), возвращаемся к случаю $t^* = 0$. Таким образом, неравенство $A_k(t) \leqslant u_k(t)$ при $0 \leqslant t \leqslant 1$ доказано в случае $\beta_k = -1$.

В случае $\beta_k = 1$ начинаем с $t^* = 1$. Итак, $u_k(1) < A_k(1)$. Следовательно, $u_k(t) < A_k(t)$ при $1 \geqslant t > t_2$, и поэтому $\langle u_k(t) \rangle = A_k(t)$ при $1 \geqslant t > t_2$. Тогда из уравнений (26) и неравенств (21) получаем

$$u_k(t_2) - A_k(t_2) \leqslant \bigl[u_k(1) - A_k(1)\bigr] \exp[w(1 - t_2)].$$

Таким образом, $u_k(t) - A_k(t) < 0$ при всех $0 \leqslant t \leqslant 1$, и

$$u_k(0) - A_k(0) \leqslant \bigl[u_k(1) - A_k(1)\bigr] \exp w. \tag{30}$$

Учитывая краевые условия (27) и неравенства (23), из неравенства (30) получаем неравенство

$$0 \leqslant \bigl[u_k(1) - A_k(1)\bigr]\bigl[\exp w - \Delta_k\bigr]. \tag{31}$$

Так как из неравенств (25) следует, что $\exp w - \Delta_k > 0$, неравенство (31) невозможно. Таким образом невозможно и неравенство $u_k(1) - A_k(1) < 0$. Случай $t^* = 0$ сводится к случаю $t^* = 1$, если учесть неравенство

$$u_k(0) - A_k(0) \geqslant \Delta_k\bigl[u_k(1) - A_k(1)\bigr], \tag{32}$$

следующее из краевых условий (27) и неравенств (23). Рассуждения для случая $0 < t^* < 1$ аналогичны рассуждениям при $\beta_k = -1$. Таким образом неравенства $A_k(t) \leqslant u_k(t)$ доказаны при всех $0 \leqslant t \leqslant 1$ и всех k $(k = 1, \dots, n)$.

Для доказательства неравенств $u_k(t) \leqslant B_k(t)$ $(k = 1, \dots, n)$ при $0 \leqslant t \leqslant 1$ поступаем аналогично.

Теорема 5. *Пусть*

1. $\alpha_i \in \{-1, 1\}$, $\Delta_i > 0$ $(i = 1, \dots, n)$*;*
2. *вектор-функции* $q(t) = \{q_1(t), \dots, q_n(t)\}$ *и* $M(t) = \{M_1(t), \dots, M_n(t)\}$ *абсолютно непрерывны и удовлетворяют неравенствам* $q_k(t) < 0 < M_k(t)$ $(k = 1, \dots, n)$ *при* $0 \leqslant t \leqslant 1$*;*

3. *функции* $f_i(t, u_1, \dots, u_n)$ $(i = 1, \dots, n)$ *определены и удовлетворяют условиям Каратеодори при* $0 \leqslant t \leqslant 1$, $q_k(t) \leqslant u_k \leqslant M_k(t)$ $(k = 1, \dots, n)$, $0 \leqslant t \leqslant 1$;
4. *для любой непрерывной вектор-функции* $u(t) = \{u_1(t), \dots, u_n(t)\}$

$$\langle\, u_k(t)\,\rangle = \min\big\{M_k(t), max\{u_k(t), q_k(t)\}\big\}$$
$$(k = 1, \dots, n),\ \ 0 \leqslant t \leqslant 1; \tag{33}$$

5. *верны неравенства*

$$\alpha_i\big\{M_i'(t) - f_i\big(t, \langle\, u_1\,\rangle, \dots, \langle\, u_{i-1}\,\rangle, M_i(t), \langle\, u_{i+1}\,\rangle, \dots, \langle\, u_n\,\rangle\big)\big\} \geqslant 0, \tag{34}$$
$$\alpha_i\big\{q_i'(t) - f_i\big(t, \langle\, u_1\,\rangle, \dots, \langle\, u_{i-1}\,\rangle, q_i(t), \langle\, u_{i+1}\,\rangle, \dots, \langle\, u_n\,\rangle\big)\big\} \geqslant 0, \tag{35}$$
$$\alpha_i\big\{M_i(0) - \Delta_i M_i(1)\big\} \geqslant 0, \tag{36}$$
$$\alpha_i\big\{q_i(0) - \Delta_i q_i(1)\big\} \geqslant 0, \tag{37}$$
$$\alpha_i f_i\big(t, \langle\, u_1\,\rangle, \dots, \langle\, u_{i-1}\,\rangle, 0, \langle\, u_{i+1}\,\rangle, \dots, \langle\, u_n\,\rangle\big) > 0 \tag{38}$$
$$(i = 1, \dots, n), \quad 0 \leqslant t \leqslant 1.$$

Тогда существует по крайней мере 2^n *решений краевой задачи* (1), (2). *При этом компоненты всех решений* $u(t) = \{u_1(t), \dots, u_n(t)\}$ *удовлетворяют неравенствам* $q_k(t) \leqslant u_k(t) \leqslant M_k(t)$ $(k = 1, \dots, n)$, $0 \leqslant t \leqslant 1$, *и для каждого квадранта пространства* R^n *существует решение* $u(t)$, *значения которого принадлежат этому квадранту при* $0 \leqslant t \leqslant 1$.

Доказательство. Исходя из вектор-функции $M(t)$ построим 2^n различных вектор-функции той же размерности следующим образом. Сначала рассмотрим две одномерные вектор-функции $\{M_1(t)\}$ и $\{0\}$. Пусть, далее, уже построены 2^{n-1} различных $(n-1)$-мерных вектор-функций. Тогда по каждой из этих различных $(n-1)$-мерных вектор-функций построим две n-мерные вектор-функции, добавив в качестве n-ой компоненты в первом случае $M_n(t)$, а во втором случае 0. Возьмем одну из так построенных различных 2^n вектор-функций в качестве вектор-функции $B(t)$. В качестве парной к ней вектор-функции возьмем вектор-функцию, компоненты которой определяются следующим образом

$$A_k(t) = \begin{cases} q_k(t), & \text{если} \ \ B_k(t) = 0, \\ 0, & \text{если} \ \ B_k(t) = M_k(t) \end{cases}$$
$$(k = 1, \dots, n), \quad 0 \leqslant t \leqslant 1. \tag{39}$$

Далее, положим

$$\beta_i = \begin{cases} \alpha_i, & \text{если} \quad A_i(t) = 0, \\ -\alpha_i, & \text{если} \quad A_i(t) = q_i(t). \end{cases} \tag{40}$$

Тогда для каждой из так построенных различных 2^n пар вектор-функций $A(t)$ и $B(t)$ выполнены все условия теоремы 4. Таким образом, для каждой из 2^n различных пар вектор-функций $A(t)$ и $B(t)$ по теореме 4 существует решение краевой задачи (1), (2) такое, что $A_k(t) \leqslant u_k(t) \leqslant B_k(t)$ $(k = 1, \dots, n)$, $0 \leqslant t \leqslant 1$. Поскольку либо $A_k(t) = 0$ и $B_k(t) = M_k(t) > 0$, либо $A_k(t) = q_k(t) < 0$ и $B_k(t) = 0$ $(k = 1, \dots, n)$ при всех $0 \leqslant t \leqslant 1$, то компоненты решения $u(t)$ принимают все свои значения во вполне определенных квадрантах пространства R^n. Каждый из 2^n построенных векторов $A(t)$ однозначно определяет тот квадрант, которому принадлежат значения решения, существование которого установлено по теореме 4 с помощью вектор-функции $A(t)$. Поскольку в силу неравенства (37) полученное решение не попадает на границы квадранта, различным вектор-функциям $A(t)$ отвечают различные решения. Всего построено 2^n различных вектор-функций $A(t)$. В пространстве R^n существует 2^n различных квадрантов. Таким образом для каждого квадранта существует решение $u(t)$, значения которого принадлежат этому квадранту.

Рассмотрим теперь задачу отыскания 1-периодического решения $u(t) = \{u_1(t), \dots, u_n(t)\}$, т.е. вектор-функции, удовлетворяющей условиям

$$u_i(t+1) = u_i(t) \quad (i = 1, \dots, n), \quad -\infty < t < +\infty \tag{41}$$

для системы n дифференциальных уравнений первого порядка с отклоняющимся аргументом

$$\begin{aligned} u_i'(t) = f_i\bigl(t, u_1(t), \dots, u_n(t), u_1(t+\sigma_{11}(t)), \dots, u_n\bigl(t+\sigma_{1n}(t)\bigr), \dots, \\ \dots, u_1\bigl(t+\sigma_{m1}(t)\bigr), \dots, u_n\bigl(t+\sigma_{mn}(t)\bigr)\bigr), \\ -\infty < t < +\infty \quad (i = 1, \dots, n). \end{aligned} \tag{42}$$

В следующих теоремах предполагаем, что $\sigma_{jk}(t+1) = \sigma_{jk}(t)$ $(j = 1, \dots, m)$ $(k = 1, \dots, n)$ и

$$\begin{aligned} f_i\bigl(t+1, u_1, \dots, u_n, v_{11}, \dots, v_{mn}\bigr) = f_i\bigl(t, u_1, \dots, u_n, v_{11}, \dots, v_{mn}\bigr) \\ (i = 1, \dots, n), \quad -\infty < t < +\infty. \end{aligned} \tag{43}$$

Теорема 6. *Пусть*

1. $\beta_i \in \{-1, 1\}$ $(i = 1, \dots, n)$;
2. *вектор-функции* $A(t) = \{A_1(t), \dots, A_n(t)\}$ *и* $B(t) = \{B_1(t), \dots, B_n(t)\}$ *абсолютно непрерывны при* $0 \leqslant t \leqslant 1$, $a_k = \min\limits_{0 \leqslant t \leqslant 1} A_k(t)$, $b_k = \max\limits_{0 \leqslant t \leqslant 1} B_k(t)$, $A_k(t) \leqslant B_k(t)$ $(k = 1, \dots, n)$;
3. *функции* $f_i\big(t, u_1, \dots, u_n, v_{11}, \dots, v_{mn}\big)$, $0 \leqslant t \leqslant 1$ $(i = 1, \dots, n)$, *удовлетворяют условиям Каратеодори при* $0 \leqslant t \leqslant 1$, $a_k \leqslant u_k \leqslant b_k$, $a_k \leqslant v_{jk} \leqslant b_k$ $(k = 1, \dots, n)$ $(j = 1, \dots, m)$;
4. *функции* $\sigma_{jk}(t)$ *непрерывны при* $-\infty < t < +\infty$ $(k = 1, \dots, n)$ $(j = 1, \dots, m)$ *и* $\sigma_{jk}(t+1) = \sigma_{jk}(t)$;
5. *для любой непрерывной вектор-функции* $u(t)=\{u_1(t), \dots, u_n(t)\}$

$$\langle u_k(t)\rangle = \min\big\{B_k(t), \max\{u_k(t), A_k(t)\}\big\},$$

$$0 \leqslant t \leqslant 1 \quad (k = 1, \dots, n), \tag{44}$$

$$[u_k]_j = \min\big\{b_k, \max\{u_k(t + \sigma_{jk}(t)), a_k\}\big\},$$

$$0 \leqslant t \leqslant 1 \quad (k = 1, \dots, n) \quad (j = 1, \dots, m); \tag{45}$$

6. *верны неравенства*

$$\beta_i\big\{A_i'(t) - f_i\big(t, \langle\, u_1 \,\rangle, \dots, \langle\, u_{i-1} \,\rangle,$$

$$A_i(t), \langle\, u_{i+1} \,\rangle, \dots, \langle\, u_n \,\rangle, [u_1]_1, \dots, [u_n]_m\big)\big\} \leqslant 0, \tag{46}$$

$$\beta_i\big\{B_i'(t) - f_i\big(t, \langle\, u_1 \,\rangle, \dots, \langle\, u_{i-1} \,\rangle,$$

$$B_i(t), \langle\, u_{i+1} \,\rangle, \dots, \langle\, u_n \,\rangle, [u_1]_1, \dots, [u_n]_m\big)\big\} \geqslant 0, \tag{47}$$

$$\beta_i\big\{A_i(0) - A_i(1)\big\} \leqslant 0, \tag{48}$$

$$\beta_i\big\{B_i(0) - B_i(1)\big\} \geqslant 0, \tag{49}$$

$(i = 1, \dots, n)$ *при* $0 \leqslant t \leqslant 1$.

Тогда существует по крайней мере одно периодическое решение системы дифференциальных уравнений (42) *такое, что* $A_k(t) \leqslant u_k(t) \leqslant B_k(t)$ *при* $0 \leqslant t \leqslant 1$ $(k = 1, \dots, n)$.

Доказательство теоремы 6 аналогично доказательству теоремы 4 с учетом того, что если $A_k(t) \leqslant u_k(t) \leqslant B_k(t)$ при $0 \leqslant t \leqslant 1$, то $a_k \leqslant u_k(t + \sigma_{jk}(t)) \leqslant b_k$ при $0 \leqslant t \leqslant 1$ $(k = 1, \dots, n)$ $(j = 1, \dots, m)$ для 1-периодической вектор-функции $u(t) = \{u_1(t), \dots, u_n(t)\}$.

Теорема 7. *Пусть*

1. $\alpha_i \in \{-1, 1\}$ $(i = 1, \dots, n)$;
2. *вектор-функции* $q(t) = \{q_1(t), \dots, q_n(t)\}$ *и* $M(t) = \{M_1(t), \dots, M_n(t)\}$ *абсолютно непрерывны и удовлетворяют неравенствам* $q_k(t) < 0 < M_k(t)$ $(k = 1, \dots, n)$ *при* $0 \leqslant t \leqslant 1$, $Q_k = \min\limits_{o \leqslant t \leqslant 1} q_k(t)$, $m_k = \max\limits_{0 \leqslant t \leqslant 1} M_k(t)$;
3. *функции* $f_i(t, u_1, \dots, u_n, v_{11}, \dots, v_{mn})$ $(i = 1, \dots, n)$ *удовлетворяют условиям Каратеодори при* $0 \leqslant t \leqslant 1$, $Q_k \leqslant u_k \leqslant m_k$, $Q_k \leqslant v_{jk} \leqslant m_k$ $(k = 1, \dots, n)$ $(j = 1, \dots, m)$;
4. *верно условие* 4 *теоремы* 6;
5. *для любой непрерывной при* $0 \leqslant t \leqslant 1$ *вектор-функции* $u(t) = \{u_1(t), \dots, u_n(t)\}$

$$\langle\, u_k(t)\,\rangle = \min\bigl\{M_k(t), \max\{u_k(t), q_k(t)\}\bigr\},$$
$$0 \leqslant t \leqslant 1 \ (k = 1, \dots, n), \tag{50}$$
$$[u_k]_j = \min\bigl\{m_k, \max\{u_k(t + \sigma_{jk}(t)), Q_k\}\bigr\},$$
$$0 \leqslant t \leqslant 1 \ (k = 1, \dots, n), \tag{51}$$

6. *верны неравенства*

$$\alpha_i\bigl\{M_i'(t) - f_i\bigl(t, \langle\, u_1\,\rangle, \dots, \langle\, u_{i-1}\,\rangle,$$
$$M_i(t), \langle\, u_{i+1}\,\rangle, \dots, \langle\, u_n\,\rangle, [u_1]_1, \dots, [u_n]_m\bigr)\bigr\} \geqslant 0, \tag{52}$$
$$\alpha_i\bigl\{q_i'(t) - f_i\bigl(t, \langle\, u_1\,\rangle, \dots, \langle\, u_{i-1}\,\rangle,$$
$$q_i(t), \langle\, u_{i+1}\,\rangle, \dots, \langle\, u_n\,\rangle, [u_1]_1, \dots, [u_n]_m\bigr)\bigr\} \geqslant 0, \tag{53}$$
$$\alpha_i\bigl\{q_i(0) - q_i(1)\bigr\} \geqslant 0, \tag{54}$$
$$\alpha_i\bigl\{M_i(0) - M_i(1)\bigr\} \geqslant 0, \tag{55}$$
$$\alpha_i f_i\bigl(t, \langle\, u_1\,\rangle, \dots, \langle\, u_{i-1}\,\rangle, 0, \langle\, u_{i+1}\,\rangle, \dots, \langle\, u_n\,\rangle,$$
$$[u_1]_1, \dots, [u_n]_m\bigr) > 0 \tag{56}$$

при $0 \leqslant t \leqslant 1$ $(i = 1, \dots, n)$.

Тогда существует по крайней мере 2^n *периодических решений системы* n *дифференциальных уравнений* (42). *При этом компоненты этих решений* $u(t) = \{u_1(t), \dots, u_n(t)\}$ *удовлетворяют неравенствам* $q_k(t) \leqslant u_k(t) \leqslant M_k(t)$ $(k = 1, \dots, n)$ *при* $0 \leqslant t \leqslant 1$, *и для* *каждого квадранта пространства R^n существует периодическое решение $u(t)$, значения которого принадлежат этому квадранту.*

Пример. Рассмотрим уравнение

$$u' = 3u^4 - 10u^2(t-h) + \sin(2\pi t) - 10. \tag{57}$$

Положим $\alpha = -1$, $M(t) = R > 0$, $q(t) = -R$. Тогда

$$\alpha f(t, 0, v) \geqslant 10v^2 + 9 > 0,$$

$$-\alpha f(t, R, v) \geqslant 3R^4 - 10R^2 - 11, \tag{58}$$

$$-\alpha f(t, -R, v) \geqslant 3R^4 - 10R^2 - 11. \tag{59}$$

При достаточно больших R правые части выражений (58) и (59) положительны. По теореме 7 уравнение (57) имеет не менее двух периодических решений.

Теорема 8. *Пусть*

1. *верны условия 1, 2, 3, 6 теоремы 1 при $\Delta_i = 1$ $(i = 1, \dots, n)$;*
2. *верно условие 4 теоремы 6;*
3. *функции $f_i(t, u_1, \dots, u_n, v_{11}, \dots, v_{mn})$ $(i = 1, \dots, n)$ удовлетворяют условиям Каратеодори при $0 \leqslant t \leqslant 1$, $-\infty < u_k < +\infty$, $-\infty < v_{jk} < +\infty$ $(k = 1, \dots, n)$ $(j = 1, \dots, m)$;*
4. *верны неравенства*

$$\beta_i f_i(t, u_1, \dots, u_n, v_{11}, \dots, v_{mn}) \operatorname{sign} u_i \geqslant a_i(t)|u_i| - h_i(t, |u_1|, \dots, |u_{i-1}|)$$

при $0 \leqslant t \leqslant 1$, $-\infty < u_k < +\infty$, $-\infty < v_{jk} < +\infty$ $(k = 1, \dots, n)$ $(j = 1, \dots, m)$.

Тогда существует периодическое решение системы уравнений (42) *такое, что $|u_k(t)| \leqslant q_k$ $(k = 1, \dots, n)$, $-\infty < t < +\infty$.*

Теорема 9. *Пусть*

1. *$\beta_i \in \{-1, 1\}$, $\gamma_i \in \{0, 1\}$, $\delta_i \in \{0, 1\}$, $\gamma_i + \delta_i = 1$ $(i = 1, \dots, n)$;*
2. *выполнены условия 2, 3, 6 теоремы 1 при $\Delta_i = 1$ $(i = 1, \dots, n)$;*
3. *функции $f_i(t, u_1, \dots, u_n, v_{11}, \dots, v_{mn})$ $(i = 1, \dots, n)$ удовлетворяют условиям Каратеодори при $0 \leqslant t \leqslant 1$, $\gamma_k u_k \geqslant 0$, $\delta_k u_k \leqslant 0$, $\gamma_k v_{jk} \geqslant 0$, $\delta_k v_{jk} \leqslant 0$ $(k = 1, \dots, n)$ $(j = 1, \dots, m)$;*
4. *верны неравенства*

$$\beta_i f_i(t, u_1, \dots, u_n, v_{11}, \dots, v_{mn}) \operatorname{sign} u_i \geqslant$$
$$\geqslant a_i(t)|u_i| - h_i(t, |u_1|, \dots, |u_{i-1}|) \ (i = 1, \dots, n)$$

при $0 \leqslant t \leqslant 1$, $\gamma_k u_k \geqslant 0$, $\delta_k u_k \leqslant 0$, $\gamma_k v_{jk} \geqslant 0$, $\delta_k v_{jk} \leqslant 0$ $(k = 1, \dots, n)$ $(j = 1, \dots, m)$*;*

5. *верны неравенства*

$$\left.\begin{aligned} &\gamma_i \beta_i f_i(t, u_1, \dots, u_{i-1}, 0, u_{i+1}, \dots, u_n, v_{11}, \dots, v_{mn}) \leqslant 0 \\ &\delta_i \beta_i f_i(t, u_1, \dots, u_{i-1}, 0, u_{i+1}, \dots, u_n, v_{11}, \dots, v_{mn}) \geqslant 0 \end{aligned}\right. \quad (i = 1, \dots, n)$$

при $0 \leqslant t \leqslant 1$, $\gamma_k u_k \geqslant 0$, $\delta_k u_k \leqslant 0$, $\gamma_k v_{jk} \geqslant 0$, $\delta_k v_{jk} \leqslant 0$ $(k = 1, \dots, n)$ $(j = 1, \dots, m)$*;*

6. *верно условие* 4 *теоремы* 6.

Тогда существует периодическое решение системы дифференциальных уравнений (42) *такое, что* $\gamma_k u_k \geqslant 0$, $\delta_k u_k \leqslant 0$, $|u_k(t)| \leqslant q_k$ *при* $-\infty < t < +\infty$ $(k = 1, \dots, n)$.

Теорема 10. *Пусть*

1. $\alpha_i \in \{-1, 1\}$ $(i = 1, \dots, n)$*;*
2. *выполнены условия* 2, 3, 6 *теоремы* 1 *при* $\Delta_i = 1$*;*
3. *выполнено условие* 4 *теоремы* 6*;*
4. *функции* $f_i(t, u_1, \dots, u_n, v_{11}, \dots, v_{mn})$ $(i = 1, \dots, n)$ *удовлетворяют условиям Каратеодори при* $0 \leqslant t \leqslant 1$, $-\infty < u_k < +\infty$, $-\infty < v_{jk} < +\infty$ $(k = 1, \dots, n)$ $(j = 1, \dots, m)$*;*
5. *верны неравенства*

$$\alpha_i f_i(t, u_1, \dots, u_n, v_{11}, \dots, v_{mn}) \geqslant a_i(t)|u_i| - h_i(t, |u_1|, \dots, |u_{i-1}|) \qquad (i = 1, \dots, n)$$
$$\alpha_i f_i(t, u_1, \dots, u_{i-1}, 0, u_{i+1}, \dots, u_n, v_{11}, \dots, v_{mn}) < 0$$

при $0 \leqslant t \leqslant 1$, $-\infty < u_k < +\infty$, $-\infty < v_{jk} < +\infty$ $(k = 1, \dots, n)$ $(j = 1, \dots, m)$.

Тогда существует по крайней мере 2^n *периодических решений системы дифференциальных уравнений* (42). *При этом компоненты всех этих решений удовлетворяют неравенствам* $|u_k(t)| \leqslant q_k$ $(k = 1, \dots, n)$, $-\infty < t < +\infty$, *и для каждого из* 2^n *квадрантов вещественного n-мерного пространства* R^n *существует решение, все значения которого принадлежат этому квадранту.*

Литература

1. М. Н. Яковлев, *Разрешимость периодической краевой задачи для системы обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка при наличии* (β, γ, δ)*-пар сравнения.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **248** (1998), 231–241.

Yakovlev M. N. Existence of 2^n periodic solutions of a system of n differential equations of first order.

Conditions sufficient for a system of n first-order differential equations with deviating argument to be solvable and to have at least 2^n periodic solutions are obtained.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН

Поступило 15 января 2002 г.