Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 284, 2002 г.

М. Н. Яковлев

СУЩЕСТВОВАНИЕ 2^n РЕШЕНИЙ У СИСТЕМЫ n НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ С n НЕИЗВЕСТНЫМИ

Пусть $f_i(u_1, \dots, u_n)$ $(i = 1, \dots, n)$ – вещественные функции n вещественных переменных u_k $(k = 1, \dots, n)$. Рассмотрим систему n уравнений с n неизвестными

$$f_i(u_1, \dots, u_n) = 0 \quad (i = 1, \dots, n). \tag{1}$$

Ниже, развивая соображения, изложенные в [1], устанавливаются условия, при выполнении которых система уравнений (1) имеет, по крайней мере, 2^n решений (теоремы 3 и 5).

Теорема 1. *Пусть*

1. $\beta_i \in \{-1, 1\}$ $(i = 1, \dots, n)$, $0 < r < +\infty$;
2. *функции* $f_i(u_1, \dots, u_n)$ $(i = 1, \dots, n)$ *непрерывны при* $|u_k| \leqslant r$ $(k = 1, \dots, n)$;
3. *верны неравенства*

$$\begin{gathered} \beta_i f_i(u_1, \dots, u_n) \operatorname{sign} u_i \geqslant 0 \\ \text{при} \quad \max_{1 \leqslant k \leqslant n} |u_k| = r = |u_i| \ (i = 1, \dots, n). \end{gathered} \tag{2}$$

Тогда существует решение $u = \{u_1, \dots, u_n\}$ *системы уравнений* (1) *такое, что* $\max\limits_{1 \leqslant k \leqslant n} |u_k| \leqslant r$.

Доказательство. Рассмотрим следующее λ-семейство уравнений

$$u_i = \lambda\big[u_i - \beta_i f_i(u_1, \dots, u_n)\big], \ 0 \leqslant \lambda \leqslant 1 \ (i = 1, \dots, n). \tag{3}$$

Тогда при $\max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} |u_i| = r = |u_k|$ имеем

$$(1 - \lambda)|u_k| = -\lambda \beta_k f_k(u_1, \dots, u_n) \operatorname{sign} u_k \leqslant 0$$

или

$$(1 - \lambda) r \leqslant 0,$$

что невозможно при $0 < \lambda < 1$. Поэтому

$$\max_{1\leqslant k\leqslant n} |u_k(\lambda)| \neq r \quad \text{при} \quad 0 < \lambda < 1.$$

Т.е. уравнение (3) не имеет при $0 < \lambda < 1$ решения с $\max\limits_{1\leqslant k\leqslant n} |u_i(\lambda)| = r$.

Для завершения доказательства остается применить теорему о неподвижной точке (см., например, [2, с. 231–232]).

Теорема 2. *Пусть*

1. $\beta_i \in \{-1, 1\}$, $0 < r < +\infty$, $\gamma_i \in \{0, 1\}$, $\delta_i \in \{0, 1\}$ $(i = 1, \ldots, n)$, $\gamma_i + \delta_i = 1$ $(i = 1, \ldots, n)$;
2. *функции* $f_i(u_1, \ldots, u_n)$ $(i = 1, \ldots, n)$ *непрерывны при* $|u_k| \leqslant r$, $\gamma_k u_k \geqslant 0$, $\delta_k u_k \leqslant 0$ $(k = 1, \ldots, n)$;
3. *верны неравенства*

$$\beta_i\, f_i(u_1, \ldots, u_n) \operatorname{sign} u_i \geqslant 0 \ (i = 1, \ldots, n)$$

$$\text{при} \quad \max_{1\leqslant k\leqslant n} |u_k| = r = |u_i|,\ \gamma_k u_k \geqslant 0, \quad \delta_k u_k \leqslant 0 \ \ (k = 1, \ldots, n); \tag{4}$$

4. *верны неравенства*

$$\gamma_i \beta_i f_i\bigl(u_1, \ldots, u_{i-1}, 0, u_{i+1}, \ldots, u_n\bigr) \leqslant 0 \ (i = 1, \ldots, n) \tag{5}$$

$$\delta_i \beta_i f_i\bigl(u_1, \ldots, u_{i-1}, 0, u_{i+1}, \ldots, u_n\bigr) \geqslant 0 \ (i = 1, \ldots, n) \tag{6}$$

при $|u_k| \leqslant r$, $\gamma_k u_k \geqslant 0$, $\delta_k u_k \leqslant 0$ $(k = 1, \ldots, n)$.

Тогда существует решение $u = \{u_1, \ldots, u_n\}$ *системы уравнений* (1) *такое, что* $\gamma_k u_k \geqslant 0$, $\delta_k u_k \leqslant 0$, $|u_k| \leqslant r$ $(k = 1, \ldots, n)$.

Доказательство. Рассмотрим систему уравнений $(0 \leqslant \lambda \leqslant 1)$

$$u_i = \lambda\bigl[\langle\, u_i \,\rangle - \beta_i f_i(\langle\, u_1 \,\rangle, \ldots, \langle\, u_n \,\rangle)\bigr], \quad i = 1, \ldots, n. \tag{7}$$

Здесь

$$\langle\, u_k \,\rangle = \begin{cases} \max\{0, u_k\}, & \gamma_k = 1, \\ \min\{0, u_k\}, & \delta_k = 1. \end{cases} \tag{8}$$

Покажем сначала, что любое решение $u(\lambda) = \{u_1(\lambda), \ldots, u_n(\lambda)\}$ системы уравнений (7) удовлетворяет неравенствам $\gamma_k u_k(\lambda) \geqslant 0$, $\delta_k u_k(\lambda) \leqslant 0$ $(k = 1, \ldots, n)$. В самом деле, пусть, например,

$\gamma_k u_k(\lambda) < 0$. Тогда $\langle\, u_k(\lambda)\,\rangle = 0$, и из системы уравнений (7) получаем, что

$$0 > u_k = -\lambda\beta_k f_k\big(\langle\, u_1\,\rangle, \dots, \langle\, u_{i-1}\,\rangle, 0, \langle\, u_{i+1}\,\rangle, \dots, \langle\, u_n\,\rangle\big) \geqslant 0.$$

Полученное противоречие $(0 < 0)$ доказывает неравенство $\gamma_k u_k(\lambda) \geqslant 0$. Неравенства $\delta_k u_k(\lambda) \leqslant 0$ доказываются аналогично. В силу неравенств $\gamma_k u_k(1) \geqslant 0$, $\delta_k u_k(1) \leqslant 0$ решение системы (7) при $\lambda = 1$ является решением системы (1).

Покажем, что при $0 < \lambda < 1$ система уравнений (7) не имеет решений с $\max\limits_{1\leqslant k\leqslant n} |u_k(\lambda)| = r$. Опять, учитывая уже доказанные неравенства $\gamma_k u_k(\lambda) \geqslant 0$, $\delta_k u_k(\lambda) \leqslant 0$, имеем, что если $\max\limits_{1\leqslant k\leqslant n} |u_k(\lambda)| = |u_i(\lambda)| = r$ при некотором λ, $0 < \lambda < 1$, то

$$(1-\lambda)|u_i| = (1-\lambda)r = -\lambda\beta_i f_i(u_1, \dots, u_n)\operatorname{sign} u_i \leqslant 0$$

при $\gamma_k u_k \geqslant 0$, $\delta_k u_k \leqslant 0$. Полученное противоречие $[(1-\lambda)r \leqslant 0$ при $0 < \lambda < 1$, $r > 0]$ доказывает, что $\max\limits_{1\leqslant k\leqslant n} |u_k(\lambda)| \neq r$ для любого решения системы уравнений (7) при $0 < \lambda < 1$. Остается применить теорему о неподвижной точке (см. [2, с. 231–232]).

Теорема 3. *Пусть*

1. $\alpha_i \in \{-1, 1\}$ $(i = 1, \dots, n)$, $0 < r < +\infty$*;*
2. *функции* $f_i(u_1, \dots, u_n)$ *непрерывны при* $|u_k| \leqslant r$ $(k = 1, \dots, n)$*;*
3. *верны неравенства*

$$\alpha_i\, f_i(u_1, \dots, u_n) \geqslant 0$$
$$\textit{при} \quad \max_{1\leqslant k\leqslant n} |u_k| = r = |u_i| \ (i = 1, \dots, n);$$

4. *верны неравенства*

$$\alpha_i f_i\big(u_1, \dots, u_{i-1}, 0, u_{i+1}, \dots, u_n\big) < 0 \quad (i = 1, \dots, n)$$
$$\textit{при} \quad \max_{1\leqslant k\leqslant n} |u_k| \leqslant r.$$

Тогда система уравнений (1) *имеет по крайней мере* 2^n *решений таких, что* $\max\limits_{1\leqslant k\leqslant n} |u_k| \leqslant r$*. При этом в каждом из квадрантов пространства* R^n *существует по крайней мере одно решение.*

Доказательство. Рассмотрим квадрант пространства R^n и положим $\gamma_i = 1$, $\delta_i = 0$, если в этом квадранте $u_i \geqslant 0$, и $\delta_i = 1$, $\gamma_i = 0$, если в этом квадранте $u_i \leqslant 0$. При этом, очевидно, $\gamma_i + \delta_i = 1$ $(i = 1, \dots, n)$. Далее, положим $\beta_i = \alpha_i\ (\gamma_i - \delta_i)$ $(i = 1, \dots, n)$. Тогда $\gamma_i\beta_i = \alpha_i$, $\delta_i\beta_i = -\alpha_i$, $\beta_i \operatorname{sign} u_i = \alpha_i$. Тем самым выполнены все условия теоремы 2, так что в рассматриваемом квадранте существует решение $u = \{u_1, \dots, u_n\}$ такое, что $0 < \min\limits_{1\leqslant k\leqslant n} |u_k| \leqslant r$. Всего, очевидно, квадрантов 2^n.

Теорема 4. *Пусть*

1. $\beta_i \in \{-1, 1\}$, $-\infty < q_i < 0 < M_i < +\infty$ $(i = 1, \dots, n)$, $i_s \in \{1, 2, \dots, n\}$, $i_s \neq i_k$ *при* $s \neq k$; $s = 1, \dots, n$;
2. $Q_{n,i_1,\dots,i_m}$ – *множество* n*-векторов* $u = \{u_1, \dots, u_n\}$ *таких, что* $0 \leqslant u_k \leqslant M_k$ *при* $k = i_1, i_2, \dots, i_m$; $q_k \leqslant u_k \leqslant 0$ *при* $k = i_{m+1}, \dots, i_n$;
3. *для любого вектора* $u = \{u_1, \dots, u_n\}$
$$\langle\, u_k \,\rangle = \begin{cases} \min\{M_k, \max\{u_k, 0\}\} & \text{при}\quad k = i_1, \dots, i_m, \\ \max\{q_k, \min\{u_k, 0\}\} & \text{при}\quad k = i_{m+1}, \dots, i_n; \end{cases}$$
4. *функции* $f_i(u_1, \dots, u_n)$ $(i = 1, \dots, n)$ *непрерывны в* $Q_{n,i_1,\dots,i_m}$;
5. *верны неравенства*
$$\beta_i f_i\big(\langle\, u_1 \,\rangle, \dots, \langle\, u_{i-1} \,\rangle, 0, \langle\, u_{i+1} \,\rangle, \dots, \langle\, u_n \,\rangle\big) \leqslant 0 \quad \text{при}\quad i = i_1, \dots, i_m, \tag{9}$$
$$\beta_i f_i\big(\langle\, u_1 \,\rangle, \dots, \langle\, u_{i-1} \,\rangle, 0, \langle\, u_{i+1} \,\rangle, \dots, \langle\, u_n \,\rangle\big) \geqslant 0 \quad \text{при}\quad i = i_{m+1}, \dots, i_n; \tag{10}$$
6. *верны неравенства*
$$\beta_i f_i\big(\langle\, u_1 \,\rangle, \dots, \langle\, u_{i-1} \,\rangle, M_i, \langle\, u_{i+1} \,\rangle, \dots, \langle\, u_n \,\rangle\big) \geqslant 0 \quad \text{при}\quad i = i_1, \dots, i_m, \tag{11}$$
$$\beta_i f_i\big(\langle\, u_1 \,\rangle, \dots, \langle\, u_{i-1} \,\rangle, q_i, \langle\, u_{i+1} \,\rangle, \dots, \langle\, u_n \,\rangle\big) \leqslant 0 \quad \text{при}\quad i = i_{m+1}, \dots, i_n. \tag{12}$$

Тогда существует решение $u \in Q_{n,i_1,\dots,i_m}$ *системы уравнений* (1).

Доказательство. Наряду с системой уравнений (1) рассмотрим систему уравнений
$$u_i = \langle\, u_i \,\rangle - \beta_i f_i(\langle\, u_1 \,\rangle, \dots, \langle\, u_n \,\rangle)\ (i = 1, \dots, n). \tag{13}$$

Существование решения системы уравнений (13) следует из теоремы о неподвижной точке. Покажем, что решение системы уравнений (13) удовлетворяет неравенствам

$$0 \leqslant u_k \leqslant M_k \quad \text{при} \quad k = i_1, \dots, i_m,$$
$$0 \geqslant u_k \geqslant q_k \quad \text{при} \quad k = i_{m+1}, \dots, i_n.$$

В самом деле, пусть, например, $u_k < 0$ при некотором $k = i_s$, $1 \leqslant s \leqslant m$. Тогда $\langle u_k \rangle = 0$, и в силу неравенств (9) имеем

$$0 > u_k = -\beta_k f_k\big(\langle u_1 \rangle, \dots, \langle u_{k-1} \rangle, 0, \langle u_{k+1} \rangle, \dots, \langle u_n \rangle\big) \geqslant 0.$$

Противоречие. Пусть теперь $u_k > M_k$. Тогда $\langle u_k \rangle = M_k$, и

$$M_k < u_k = M_k - \beta_k f_k\big(\langle u_1 \rangle, \dots, \langle u_{k-1} \rangle, M_k, \langle u_{k+1} \rangle, \dots, \langle u_n \rangle\big) \leqslant M_k,$$

т.е. $M_k < M_k$ – противоречие. Случай $0 \geqslant u_k \geqslant q_k$ рассматривается аналогично. Таким образом решение системы уравнений (13) является решением системы уравнений (1).

Теорема 5. *Пусть*

1. $\alpha_i \in \{-1, 1\}$, $-\infty < q_i < 0 < M_i < +\infty$ $(i = 1, \dots, n)$;
2. *функции* $f_i(u_1, \dots, u_n)$ $(i = 1, \dots, n)$ *непрерывны при* $q_k \leqslant u_k \leqslant M_k$ $(k = 1, \dots, n)$;
3. *верны неравенства*

$$\alpha_i f_i\big(u_1, \dots, u_{i-1}, 0, u_{i+1}, \dots, u_n\big) < 0,$$
$$\alpha_i f_i\big(u_1, \dots, u_{i-1}, q_i, u_{i+1}, \dots, u_n\big) \geqslant 0,$$
$$\alpha_i f_i\big(u_1, \dots, u_{i-1}, M_i, u_{i+1}, \dots, u_n\big) \geqslant 0,$$
$$(i = 1, \dots, n) \quad \text{при} \quad q_k \leqslant u_k \leqslant M_k \ (k = 1, \dots, n).$$

Тогда существует по крайней мере 2^n решений системы уравнений (1) таких, что компоненты решения удовлетворяют неравенствам $q_k \leqslant u_k \leqslant M_k$ $(k = 1, \dots, n)$, и в каждом из 2^n квадрантов пространства R^n содержится не менее одного решения системы уравнений (1).

Доказательство. Рассмотрим один из 2^n квадрантов пространства R^n, которому принадлежит множество $Q_{n,i_1,\dots,i_m}$. Положим

$$\beta_{i_1} = \alpha_{i_1}, \dots, \beta_{i_m} = \alpha_{i_m}, \ \beta_{i_{m+1}} = -\alpha_{i_{m+1}}, \dots, \ \beta_{i_n} = -\alpha_{i_n}.$$

Тогда в $Q_{n,i_1,\dots,i_m}$ выполнены все условия теоремы 4. В силу теоремы 4 в $Q_{n,i_1,\dots,i_m}$ существует решение $u = \{u_1, \dots, u_n\}$. При этом $0 < \min\limits_{1\leqslant k\leqslant n} |u_k|$. Таким образом всего существует по крайней мере 2^n различных решений системы уравнений (1).

Пример. Рассмотрим систему уравнений

$$u_1^{12} - u_2^8 - u_1^{11} + \sin(u_1 + u_2) - 6 = 0, \quad -u_2^4 + 3u_1^2 - \cos u_1 + 12 = 0.$$

Положим $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = -1$. Имеем

$$\alpha_1 f_1(0, u_2) \leqslant -5, \quad \alpha_2 f_2(u_1, 0) \leqslant -11 < 0.$$

Далее, положим $M_1 = M_2 = R$, $q_1 = q_2 = -R$. Тогда

$$\alpha_1 f_1(R, u_2) \geqslant R^{12} - R^{11} - R^8 - 7, \qquad \alpha_2 f_2(u_1, R) \geqslant R^4 - 3R^2 - 13,$$
$$\alpha_1 f_1(-R, u_2) \geqslant R^{12} - R^8 + R^{11} - 7, \quad \alpha_2 f_2(u_1, -R) \geqslant R^4 - 3R^2 - 13.$$

При достаточно большом R все правые части неотрицательны.

Таким образом существует не менее 4 решений рассматриваемой системы уравнений.

Литература

1. М. Н. Яковлев, *Разрешимость систем нелинейных уравнений при наличии (γ,δ)-пар сравнения.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **202** (1992), 185–189.
2. М. Н. Яковлев, *Разрешимость периодической краевой задачи для системы обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка при наличии (β,γ,δ)-пар сравнения.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **248** (1998), 231–241.

Yakovlev M. N. Existence of 2^n solutions of a system of n nonlinear equations in n unknowns.

It is demonstrated that, under some conditions, a system of n nonlinear equations with n unknowns has at least 2^n solutions.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН

Поступило 13 января 2002 г.