Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 286, 2002 г.

Е.. П. Голубева

ОБ УРАВНЕНИИ ПЕЛЛЯ

Мы будем рассматривать уравнение Пелля вида

$$x^2 - dy^2 = 1,$$

где целое $d > 0$ и не является полным квадратом. Пусть $\varepsilon(d) = T + U\sqrt{d}$ — наименьшее решение этого уравнения.

Хорошо известно, что $\varepsilon(d)$ лежит в границах $\sqrt{d} < \varepsilon(d) < \exp(C\sqrt{d}\log d)$, где C — абсолютная постоянная. Если $d = x^2 - 1$, то $\varepsilon(d) = x + \sqrt{d}$. Таким образом, в этом случае порядок значения $\varepsilon(d)$ совпадает с нижней границей неравенства. Кроме этой последовательности существует и множество других (например, $d = 4x^2 - 9x + 5$, см. [1]), для которых $\varepsilon(D) \asymp \sqrt{d}$.

Вместе с тем, все результаты вычислительного характера (начиная с Гаусса) показывают, что для подавляющего большинства d значения $\varepsilon(d)$ удовлетворяют неравенству $\varepsilon(d) \geqslant \exp(\sqrt{d}/\log^2 d)$.

Одновременно, все известные на настоящий момент факты крайне далеки от ожидаемых:

в работе [2] показано, что для почти всех d $\varepsilon(d) > d^{\frac{3}{2}-\delta}$, где $\delta > 0$ — произвольная постоянная;

там же доказано, что существует последовательность d, имеющая положительную плотность и такая, что $\varepsilon(d) > d^{\frac{3}{2}}$.

Основная цель настоящей работы — улучшить последнюю оценку.

Для более редких последовательностей известны лучшие результаты:

в работе [3] показано, что для всех простых $p \equiv 3 \pmod 4$, $p \leqslant X$, кроме, самое большее, $X/\log^{1+\delta} X$ исключений, справедлива оценка $\varepsilon(p) > p^3/\log^{1+\delta} p$ ($\delta > 0$ произвольная постоянная).

Для еще более редких последовательностей, содержащих бесквадратные d, результаты еще лучше. Например, для $d = x^2 + 3$ при $x \geqslant 4$ $\varepsilon(d) > \exp(\log^2 x/2)$ (см. также [4,5]).

Наилучшие результаты достигнуты в случае, когда d делится на большой квадрат. Например, если $d = 5p^2$, то почти всегда

$\varepsilon(d) > \exp(d^{1/4})$ (см. [4]).

Проще всего величина $\varepsilon(d)$ ищется из разложения $\sqrt{d}$ в обыкновенную непрерывную дробь:

$$\sqrt{d} = [n, \overline{r_1, \ldots, r_l, r_{l+1}, r_l, \ldots, r_1, 2n}]. \tag{1}$$

Малые значения $\varepsilon(d)$ соответствуют коротким разложениям. По всем гипотезам и вычислениям, для большинства d длина периода является большой ($l > \sqrt{d}/\log^2 d$).

В работе [6] было показано, что для почти всех d первые элементы в этом разложении являются небольшими. Отсюда сразу же вытекает, что для почти всех d разложение (1) не может быть особенно коротким, поскольку $n = [\sqrt{d}]$.

Теорема. *Пусть $X/2 \leqslant d \leqslant X$. Существует не менее $C(\delta)X$ значений d таких, что $\varepsilon(d) > d^{2-\delta}$, где δ — произвольная постоянная, удовлетворяющая условию $0 < \delta < \frac{1}{2}$, $C(\delta) > 0$.*

Для доказательства этого результата там понадобятся три леммы.

Лемма 1(см. [6]). *Пусть P_k/Q_k — подходящая дробь к $\sqrt{d}$. Существует постоянная $\nu > 0$ такая, что для всех $X/2 < d < X$, кроме $O(X/\log^2 X)$ возможных исключений, в разложени P_k/Q_k в непрерывную дробь*

$$P_k/Q_k = [n, r_1, \ldots, r_k]$$

все элементы r_i $(1 \leqslant i \leqslant k)$ удовлетворяют условию $r_i < \log^{14} X$, если $Q_k < X/\log^{\nu} X$.

Лемма 2. *В предыдущих обозначениях значение $\varepsilon(d)$ удовлетворяет оценке $\varepsilon(d) > r_{l+1}\sqrt{d}Q_l^2/3$.*

Доказательство содержится в работе [7].

Лемма 3. *Пусть $X/2 < d < X$ и $d = d_1 p$, где p — простое, $p > X^{\frac{1}{2}+\lambda}$ и λ — произвольная постоянная, удовлетворяющая условию $0 < \lambda < 1/2$. Тогда для достаточно больших X имеем $r_{l+1} > X^{\lambda}/8$.*

Доказательство. Пусть ξ_i — приведенная квадратичная иррациональность, эквивалентная $\sqrt{d}$, которая соответствует подходящей дроби P_i/Q_i. Тогда

$$\left|\sqrt{d} - \frac{P_i}{Q_i}\right| = \frac{1}{Q_i(Q_i\xi_i + Q_{i-1}}.$$

Пусть $\xi_i = (b_i + \sqrt{d})/a_i$. В работе [7] было показано, что

$$d = a_{l+1}\left(\frac{r_{l+1}^2 a_{l+1}}{4} + a_l\right).$$

Таким образом, $a_{l+1}|2d$. Поскольку ξ_{l+1} является приведенной иррациональностью, $2 \leqslant a_{l+1} < 2\sqrt{d} \leqslant 2\sqrt{X}$.

Так как $p > X^{\frac{1}{2}\lambda}$, отсюда следует, что $a_{l+1}|2d_L$. Значит, $a_{l+1} \leqslant 2X^{\frac{1}{2}-\lambda}$. Поскольку

$$r_{l+1} \geqslant \left[\frac{\sqrt{d}}{a_{l+1}}\right],$$

отсюда вытекает, что для достаточно больших X $r_{l+1} > X^{\lambda}/8$, и лемма доказана.

Следствие. *Пусть $N(X,\lambda)$ — количество d таких, что $X/2 < d < X$ и элемент r_{l+1} в разложении (1) удовлетворяет условию $r_{l+1} > X^{\lambda}/8$.*

Тогда для достаточно больших X мы имеем

$$N(X,\lambda) > \frac{1}{4}\log\frac{2}{1+2\lambda}X.$$

Доказательство. Рассмотрим значения d, удовлетворяющие условиям леммы 3. Очевидно,

$$N(X,\lambda) \geqslant \sum_{X^{\frac{1}{2}+\lambda} < p < \frac{X}{2}} \frac{X}{2p}.$$

Отсюда следует требуемое утверждение.

Доказательство теоремы. Рассмотрим d, удовлетворяющие условиям леммы 3. В силу следствия к этой лемме, их количество не меньше, чем $\log(2/(1+2\lambda))/4X$, если X достаточно велико.

Для таких d элемент r_{l+1} в разложении (1) удовлетворяет оценке $r_{l+1} > X^{\lambda}/8$.

Пусть ν — постоянная из леммы 1. Выберем из этих значений d те, для которых элементы $r_1, \ldots, r_k$ при $Q_k < X/\log^{\nu} X$ удовлетворяют условию $r_i < \log^{14} X$ $(1 \leqslant i \leqslant k)$. В силу утверждения леммы 1, таковыми будут почти все d. Очевидно, что для них $k \leqslant l$.

Из леммы 2 следует, что тогда

$$\varepsilon(d) > \frac{1}{24} X^{\frac{3}{2}+\lambda} / \log^{2\nu} X,$$

и теорема доказана.

Литература

1. Е. П. Голубева, *О неопределенных бинарных квадратичных формах с большим числом классов*, Зап. научн. семин. ЛОМИ **185** (1990), 13–21.
2. C. Hooley, *On the Pellian equation and the class number of indefinite binary quadratic forms*, J. reine und angew Math. **353** (1984), 98–131.
3. Е. П. Голубева, *О числах классов вещественных квадратичных полей дискриминанта* $4p$, Зап. научн. семин. ПОМИ **204** (1993), 11–36.
4. Е. П. Голубева, *О длинах периодов разложения в непрерывную дробь квадратичных иррациональностей и числах классов вещественных квадратичных полей*, Зап. научн. семин. ЛОМИ **160** (1987), 72–81.
5. Y. Yamamoto, *Real quadratic number fields with large fundamental units*, Osaka J. Math. **8**, No. 2, 261–270.
6. Е. П. Голубева, *О длинах периодов разложения в непрерывную дробь квадратичных иррациональностей и числах классов вещественных квадратичных полей. II*, Зап. научн. семин. ЛОМИ **168** (1988), 11–22.
7. Е. П. Голубева, *Квадратичные иррациональности с фиксированой длиной периода разложения в непрерывную дробь*, Зап. Научн. семин. ПОМИ **196** (1991), 5–30.

Государственный университет
телекоммуникаций
им. М. А. Бонч-Бруевича
E-mail: elena_golubeva@ mail.ru

Поступило 29 августа 2002 г.