Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 286, 2002 г.

В. Н. Дубинин

К НЕРАВЕНСТВУ ШВАРЦА НА ГРАНИЦЕ ДЛЯ РЕГУЛЯРНЫХ В КРУГЕ ФУНКЦИЙ

1. Введение и формулировки результатов

Пусть функция $w = f(z)$ регулярна в круге $|z| < 1$, и пусть выполняются условия: $f(0) = 0$ и $|f(z)| < 1$ при $|z| < 1$. Предположим, что функция $w = f(z)$ продолжима по непрерывности в некоторую точку z_0 на окружности $|z| = 1$, причем $|f(z_0)| = 1$ и в точке z_0 существует производная $f'(z_0)$. Из классической леммы Шварца [1, с. 29] вытекает неравенство

$$|f'(z_0)| \geq 1, \tag{1}$$

известное под названием граничной леммы Шварца, а также как часть принципа Линделёфа. Неравенство (1) и его обобщения имеют существенные приложения в геометрической теории функций (см., например, [1–3]). Из последних работ, посвященных развитию данной тематике, отметим [4–7]. Недавно нами были получены приложения (1) к неравенствам для алгебраических полиномов и рациональных функций [8, 9]. В настоящей заметке приводятся уточнения неравенства Шварца в различных направлениях с целью возможного их применения вновь к указанной области исследований. Наши оценки, по-видимому, будут полезны также для широкого круга математиков.

Рассмотрим сначала усиления неравенства (1) с учетом нулей функции $w = f(z)$.

Теорема 1. *Пусть функция $w = f(z) = c_p z^p + \dots$, $c_p \neq 0$, регулярна в круге $|z| < 1$, и пусть $|f(z)| < 1$ при $|z| < 1$. Предположим, что функция $f(z)$ определена также в некоторой точке z_0 окружности $|z| = 1$, где она имеет производную $f'(z_0)$, причем $|f(z_0)| = 1$. Пусть $\{a_k\}_{k \in \alpha}$ – совокупность некоторых нулей функции $w = f(z)$ в круге*

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант 02-01-00028), а также программы "Университеты России (грант УР.04.01.016).

$|z|<1$, отличных от $z=0$, и пусть p_k – кратность нуля a_k, $k\in\alpha$. Тогда справедливо неравенство

$$|f'(z_0)| \geq p + \sum_{k\in\alpha} n_k \frac{1-|a_k|^2}{|z_0-a_k|^2} + \frac{\prod\limits_{k\in\alpha} |a_k|^{n_k} - |c_p|}{\prod\limits_{k\in\alpha} |a_k|^{n_k} + |c_p|}, \tag{2}$$

где n_k – любое натуральное число, $n_k \leq p_k$, $k\in\alpha$, и, как обычно, $\sum_{\varnothing} := 0$, $\prod_{\varnothing} := 1$. Если $\{a_k\}_{k\in\alpha}$ – совокупность, состоящая из всех нулей функции $w=f(z)$ в круге $|z|<1$, отличных от $z=0$, то выполняется также неравенство

$$|f'(z_0)| \geq p + \sum_{k\in\alpha} p_k \frac{1-|a_k|^2}{|z_0-a_k|^2} - \frac{1}{2}\log\left| c_p \Big/ \prod_{k\in\alpha} a_k^{p_k}\right|. \tag{3}$$

Равенство в (2) при $n_k=p_k$, $k\in\alpha$, и в (3) достигается для функции Бляшке

$$B(z) := z^p \prod_{k\in\alpha}\left[\frac{|a_k|}{a_k}\ \frac{a_k-z}{1-\overline{a}_k z}\right]^{p_k}, \tag{4}$$

где $\{a_k\}_{k\in\alpha}$ – совокупность точек в круге $|z|<1$, при которой произведение (4) сходится.

Заметим, что функция Бляшке не является единственной экстремальной функцией в этих неравенствах. Известно, что крайние справа слагаемые в неравенствах (2) и (3) неотрицательные (неравенство (16)), поэтому оба неравенства усиливают оценку

$$|f'(z_0)| \geq p + \sum_{k\in\alpha} n_k \frac{1-|a_k|^2}{|z_0-a_k|^2} \geq 1,$$

вытекающую из принципа Линделёфа [1, с. 331]. Далее, если функция $w=f(z)=c_pz^p+\dots$, $c_p\neq 0$, не имеет в круге $|z|<1$ нулей, отличных от $z=0$ (например, если $w=f(z)$ – p-листная в круге $|z|<1$), то неравенство (3) примет вид

$$|f'(z_0)| \geq p - \frac{1}{2}\log|c_p|, \tag{5}$$

что является более сильной оценкой, чем та, которая вытекает из неравенства (2) при $\alpha=\varnothing$:

$$|f'(z_0)| \geq p + \frac{1-|c_p|}{1+|c_p|}\ . \tag{6}$$

Однако неравенство (6) справедливо для любых регулярных функций, удовлетворяющих условию теоремы 1. Это неравенство было получено Оссерманом в недавней работе [7]. Если известен второй коэффициент в разложении функции

$$f(z) = c_p z^p + c_{p+1} z^{p+1} + \dots ,$$

то неравенства (2) и (3) можно усилить с учетом c_{p+1} и второго коэффициента в разложении функции Бляшке. Эти усиления легко вытекают из доказательства теоремы 1, если в этом доказательстве неравенство Шварца (1) заменить на более сильное неравенство Оссермана (6). Мы опускаем эти обобщения ввиду их громоздкости. Отметим только частные случаи, именно, усиления неравенств (5) и (6). Неравенство (6) усиливается следующим образом:

$$|f'(z_0)| \geq p + \frac{2(1 - |c_p|)^2}{1 - |c_p|^2 + |c_{p+1}|} , \tag{7}$$

что сильнее (6) ввиду оценки Мерсера

$$|c_{p+1}| \leq 1 - |c_p|^2$$

(мы применяем неравенство Мерсера [5, с. 511] к функции $f(z)/z^{p-1}$). Это же неравенство можно получить из "обобщенной граничной леммы" работы [7]. Если у функции $w = f(z)$ нет других нулей в круге $|z| < 1$, кроме $z = 0$, то имеет место следующее усиление неравенства (5):

$$|f'(z_0)| \geq p - \frac{2|c_p|(\log |c_p|)^2}{2|c_p| \log |c_p| - |c_{p+1}|} . \tag{8}$$

Здесь

$$|c_{p+1}| \leq 2|c_p \log |c_p|| . \tag{9}$$

Равенство в (9) достигается для функции

$$f(z) = z^p \exp\left(\frac{1+z}{1-z} \log c_p\right),$$

$0 < c_p < 1$, $\log c_p < 0$. Неравенства (2), (3) и (7)–(9) будут доказаны во второй части настоящей работы. Заканчивая анализ теоремы 1, приведем полезную в связи с (2) и (3) оценку из работы [9]:

$$\sum_{k\in\alpha}\frac{1-|a_k|^2}{|z_0-a_k|^2}\geq \max\left[1-\sqrt{\prod_{k\in\alpha}|a_k|},\ n-\sum_{k\in\alpha}\sqrt{|a_k|}\right].$$

Предыдущие неравенства дополняют неравенство Шварца (1) с учетом разложения функции $w=f(z)$ в нуле. Если же отказаться от условия $f(0)=0$, то, как легко видеть, неравенство (1) будет, вообще говоря, неверно. Вместе с тем, справедлива следующая

Теорема 2. *Пусть функция $w=f(z)$ регулярна в круге $|z|<1$ и удовлетворяет в этом круге условию $|f(z)|<1$. Предположим, что эта функция и ее производная определены также в граничных точках z_k таких, что точки $f(z_k)$ расположены на единичной окружности симметричным образом, $k=1,\dots,n$, $n\geq 2$. Тогда справедливо неравенство*

$$\left|\prod_{k=1}^{n} f'(z_k)\right|\geq 1. \tag{10}$$

Равенство достигается для функции $f(z)\equiv cz$, $|c|=1$.

Данный результат распространяет лемму 1.3 работы [8] на случай неоднолистных отображений. Кроме того, в отличие от [8], мы отказываемся от непрерывности производной в точках z_k, $k=1,\dots,n$.

Рассмотрим теперь усиления неравенства (1) в случае, когда функция

$$w=f(z)=cz+\dots$$

регулярна и однолистна в круге $|z|<1$. Пусть точка z_0 на окружности $|z|=1$, как выше, и пусть $|f(z_0)|=1$. Наиболее общим из известных автору неравенств, усиливающих (1) для однолистных функций, является следующее неравенство

$$|f'(z_0)|\geq\sqrt{\frac{1}{|c|}}\exp\frac{\arg^2(f(z_0)/z_0)}{-2\log|c|}. \tag{11}$$

Здесь $\arg(f(z_0)/z_0)$ равен приращению $\arg(f(z)/z)$ вдоль отрезка, соединяющего точки $z=0$ и $z=z_0$. Неравенство (11) можно получить из неравенства (2.2) работы Н. А. Лебедева [10]. Так как, по “внутренней” лемме Шварца, $|c_1| < 1$, то неравенство (11) дает

$$|f'(z_0)| \geq \sqrt{1/|c|}. \tag{12}$$

Интересно отметить, что это неравенство не использовалось в литературе так , как это можно было бы ожидать. Эффективность неравенства (12) применительно к полиномам и рациональным функциям показана нами в работах [8, 9, 11]. Доказательство неравенства (12) можно получить также из результатов Нехари [12], Поммеренке [13] и из свойств приведенных модулей конденсаторов [11]. Однако, самое простое, на наш взгляд, доказательство неравенства (12) вытекает из применения классической теоремы Бибербаха для регулярных и однолистных в круге функций [9].

В приложениях неравенства Шварца нередко возникает вопрос о существовании оценки модуля производной $|f'(z_0)|$ с другой стороны. Такая оценка невозможна без дополнительных ограничений на поведение функции $w = f(z)$ в окрестности точки z_0. Приведем следующий результат.

Теорема 3. *Пусть функция $w = f(z) = cz + \ldots$ регулярна и однолистна в круге $|z| < 1$, причем $|f(z)| < 1$, когда $|z| < 1$. Предположим, что функция $w = f(z)$ продолжима по непрерывности на некоторую дугу γ длины θ на окружности $|z| = 1$ и, кроме того, $|f(z)| = 1$ на γ. Тогда для точки z_0, центра дуги γ, справедливо неравенство*

$$|f'(z_0)| \leq (1/|c|)^{1/(2\sin^2(\theta/4))} . \tag{13}$$

Равенство достигается для функции $f(z) \equiv cz$, $|c| = 1$.

Приведенные выше оценки безусловно найдут приложения к неравенствам для полиномов и рациональных функций способом, указанным в работах [8, 9, 11]. Они приводят к уточнениям всех тех результатов, где применяется неравенство (1). В частности, мы получаем уточнения вариационных принципов конформных отображений [2, с.358].

2. Доказательства

Прежде, чем доказывать сформулированные выше утверждения, заметим, что по теореме Бляшке функция $w = f(z)$ из теоремы 1 представима в виде произведения

$$f(z) = B(z)g(z), \tag{14}$$

где $g(z)$ – отличная от нуля регулярная в круге $|z| < 1$ функция, причем $|g(z)| < 1$, когда $|z| < 1$ [14, с.49]. Далее, точка z_0 не является точкой сгущения нулей a_k и, следовательно, функция $w = B(z)$ определена и дифференцируема в этой точке. Простые вычисления показывают, что

$$|B'(z_0)| = \frac{z_0 B'(z_0)}{B(z_0)} = p + \sum_{k\in\alpha} p_k \frac{1-|a_k|^2}{|z_0 - a_k|^2}\ .$$

Доказательство неравенства (2). Пусть $\{a_k\}_{k\in\alpha}$ – совокупность некоторых нулей функции $w = f(z)$ в круге $|z| < 1$, отличных от $z = 0$, и пусть $n_k \le p_k$, где p_k–кратность нуля a_k. Произведение Бляшке

$$\widetilde{B}(z) := z^p \prod_{k\in\alpha} \left[\frac{|a_k|}{a_k}\ \frac{a_k - z}{1 - \overline{a}_k z}\right]^{n_k}$$

является регулярной в круге $|z| < 1$ функцией, причем $|\widetilde{B}(z)| < 1$ в $|z| < 1$ [14, с. 48]. Из принципа Линделёфа следует, что для любых точек z из круга $|z| < 1$ выполняется неравенство

$$|f(z)| \le |\widetilde{B}(z)| \tag{15}$$

(см., например, [1, с. 331]). Поэтому регулярная в круге $|z| < 1$ функция

$$h(z) := \frac{f(z)}{\widetilde{B}(z)}$$

ограничена в этом круге по модулю единицей. В частности,

$$|h(0)| = \frac{|c_p|}{\prod\limits_{k\in\alpha} |a_k|^{n_k}} \le 1\,. \tag{16}$$

Более того, учитывая геометрический смысл производной, имеем из неравенства (15)

$$\frac{z_0 f'(z_0)}{f(z_0)} = |f'(z_0)| \ge |\widetilde{B}'(z_0)| = \frac{z_0 \widetilde{B}'(z_0)}{\widetilde{B}(z_0)}.$$

Сложная функция
$$b(z) := \frac{h(z) - h(0)}{1 - \overline{h}(0)h(z)}$$
удовлетворяет условиям граничной леммы Шварца, из которой следует
$$1 \le |b'(z_0)| = \frac{1 - |h(0)|^2}{|1 - \overline{h}(0)h(z_0)|^2} \left| \frac{z_0 f'(z_0)}{f(z_0)} - \frac{z_0 \widetilde{B}'(z_0)}{\widetilde{B}(z_0)} \right| \le$$
$$\le \frac{1 + |h(0)|}{1 - |h(0)|} \left\{ \left| f'(z_0) \right| - |\widetilde{B}'(z_0)| \right\}.$$

Итоговое неравенство совпадает с неравенством (2). Равенство достигается в случае, если $f(z) = \widetilde{B}(z)$, т.е. если функция $w = f(z)$ является функцией Бляшке и $\{a_k\}_{k\in\alpha}$ – совокупность всех её нулей, отличных от $z = 0$, $n_k = p_k$, $k \in \alpha$.

Доказательство неравенства (7). Полагаем в предыдущем доказательстве $\widetilde{B}(z) = z^p$ и применяем к функции $b(z)$ неравенство (6), где $p = 1$ в случае $b'(0) \ne 0$ ($c_{p+1} \ne 0$) и $|b'(z_0)| \ge 2$ в противном случае. В результате получим неравенство (7).

Доказательство неравенства (3). Можно считать, что $c_p > 0$. Пусть $\{a_k\}_{k\in\alpha}$ – совокупность всех нулей функции $w = f(z)$, и пусть $B(z)$ – функция Бляшке (4). Имея в виду представление (14), а также неравенство (16), обозначим через $\log g(z)$ регулярную ветвь логарифма, нормированную условием
$$\log g(0) = \log \frac{c_p}{\prod\limits_{k\in\alpha} |a_k|^{p_k}} < 0 .$$

Вспомогательная функция
$$d(z) := \frac{\log g(z) - \log g(0)}{\log g(z) + \log g(0)}$$
удовлетворяет условиям граничной леммы Шварца, из которой следует
$$1 \le |d'(z_0)| = \left| \frac{2 \log g(0)}{(\log g(z_0) + \log g(0))^2 g(z_0)} \right| \left| \frac{z_0 f'(z_0)}{f(z_0)} - \frac{z_0 B'(z_0)}{B(z_0)} \right| =$$

$$= \frac{-2\log g(0)}{\arg^2 g(z_0) + \log^2 g(0)} \left\{|f'(z_0)| - |B'(z_0)|\right\} .$$

Заменяя квадрат аргумента нулем, приходим к неравенству (3) с очевидным случаем равенства. Этим завершается также доказательство теоремы 1.

Доказательство неравенства (9). Достаточно применить "внутреннюю" лемму Шварца к функции $d(z)$ из предыдущего доказательства:

$$|d'(0)| \leq 1.$$

Знак равенства проверяется непосредственно.

Доказательство неравенства (8) аналогично доказательству неравенства (7) с заменой функции $b(z)$ на функцию $d(z)$ из доказательства неравенства (3), и с заменой неравенства (6) на неравенство (5).

Доказательство теоремы 2. Без ограничения общности можно считать, что $f(z_k) = \exp(2\pi ik/n)$, $k = 1, \dots, n$, $n \geq 2$. Рассмотрим два конденсатора

$C^* = \left(\cup_{k=1}^n [0, (1-\triangle r)e^{2\pi ik/n}],\ \{z : |z| \geq 1\}\right)$ и

$C = \left(\cup_{k=1}^n [0, (1-\triangle r)z_k],\ \{z : |z| \geq 1\}\right)$,

где положительное число $\triangle r$ достаточно мало. Путем диссимметризации [15, с. 33–36] конденсатор C может быть получен из конденсатора C^* и, следовательно, для емкостей этих конденсаторов выполняется неравенство

$$\operatorname{cap} C^* \geq \operatorname{cap} C .$$

Пусть $\omega(z)$ – потенциальная функция конденсатора C, и пусть

$$\widetilde{\omega}(w) = \begin{cases} \min\{\omega(z) : f(z) = w\}, & w \in f(\{z : |z| < 1\}), \\ 1, & w \notin f(\{z : |z| < 1|\}) . \end{cases}$$

Функция $\widetilde{\omega}(w)$ равна нулю на связном множестве

$$\gamma := f\left(\cup_{k=1}^n [0, (1-\triangle r)z_k]\right).$$

Обозначим через G двусвязную область, одна компонента дополнения которой (E_0) ограничена точками из множества γ, а другая – $E_1 = \{w : |w| \geq 1\}$. Из конформной инвариантности интеграла

Дирихле следует

$$\operatorname{cap} C = \int \int\limits_{\{z:|z|<1\}} |\nabla\omega|^2 dxdy \geq \int \int\limits_{\{w:|w|<1\}} |\nabla\widetilde{\omega}|^2 dudv \geq$$

$$\geq \operatorname{cap}(E_0, E_1) = (\operatorname{mod} G)^{-1} ,$$

где $\operatorname{mod} G$ – модуль кольца G относительно семейства кривых, разделяющих его граничные компоненты. По теореме 2.4 работы [16] выполняется неравенство

$$(\operatorname{mod} G)^{-1} \geq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(\operatorname{mod} G_k)^{-1},$$

где $G_k = \{z : |z| < 1,\ z^{n/2} \notin [-\lambda_k, \lambda_k]\}$, $\lambda_k = 1 - \frac{n}{2}|f'(z_k)|\triangle r + +o(\triangle r)$, $\triangle r \to 0$ (имеется в виду случай (2) указанной теоремы и в этой теореме $t = 1$, $r_k = 0$, $a_k = f((1-\triangle r)z_k)$, $b_k = \mathrm{R}_k = 1$, $k = 1, \dots, n$). Суммируя полученные соотношения, имеем

$$\operatorname{cap} C^* \geq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(\operatorname{mod} G_k)^{-1} .$$

Величины $\operatorname{cap} C^*$ и $\operatorname{mod} G_k$, $k = 1, \dots, n$, легко выражаются через эллиптические интегралы. Привлекая асимптотику этих интегралов при $\triangle r \to 0$, приходим к неравенству (10) (ср.[16, с. 102]).

Доказательство теоремы 3. Можно считать, что $0 < \theta < 2\pi$ и $z_0 = 1$. Для произвольной области D на сфере Римана $\overline{\mathbb{C}}$ и точки b из D обозначим через $r(D, b)$ внутренний радиус этой области относительно точки b. Известно, что максимум произведения

$$r(D_1, 0)[r(D_2, 1)]^{4\sin^2(\theta/4)} r(D_3, \infty)$$

среди всех попарно непересекающихся односвязных областей D_1, D_2 и D_3 сферы $\overline{\mathbb{C}}$, удовлетворяющих условию $0 \in D_1$, $1 \in D_2$ и $\infty \in D_3$, достигается для круговых областей D_1^*, D_2^* и D_3^* квадратичного дифференциала

$$Q(z)dz^2 = -\frac{(z - e^{i\theta/2})(z - e^{-i\theta/2})}{z^2(z-1)^2} dz^2$$

[17, с. 230]. Область D_1^* принадлежит кругу $|z|<1$ и симметрична области D_3^* относительно окружности $|z|=1$, а область D_2^* рассекается дугой γ на две симметричные относительно окружности $|z|=1$ части. Положим $D_1=f(D_1^*)$, $D_3=\{z:1/\overline{z}\in D_1\}$, D_2 – объединение множества $f(D_2^*\cap\{z:|z|\le 1\})$ с его отражением относительно окружности $|z|=1$. Ввиду экстремальности круговых областей,

$$r(D_1,0)[r(D_2,1)]^{2\sin^2(\theta/4)}\le r(D_1^*,0)[r(D_2^*,1)]^{2\sin^2(\theta/4)}\,. \tag{17}$$

С другой стороны,

$$r(D_1,0)=r(D_1^*,0)|f'(0)|,\qquad r(D_2,1)\ge r(D_2^*,1)|f'(1)|\,. \tag{18}$$

Первое соотношение в (18) не требует пояснений. Что касается второго, то заметим, что по принципу симметрии аналитическое продолжение функции $w=f(z)$ через внутреннюю часть γ отображает область D_2^* на область D_2. Доказательство завершается сравнением соотношений (17) и (18).

Литература

1. Г. М. Голузин, *Геометрическая теория функций комплексного переменного,*. 2-е изд. М., 1966.
2. М. А. Лаврентьев и Б. В. Шабат, *Методы теории функций комплексного переменного.* 4-е изд. М., 1973.
3. Ch. Pommerenke, *Boundary Behaviour of Conformal Maps.* New York, 1992.
4. D. M. Burns and S. G. Krantz, *Rigidity of holomophic mappings and a new Schwarz Lemma at the boundary,* J.Amer. Math. Soc. **7**, No. 3 (1994), 661–676.
5. P. R. Mercer, *Sharpened versions of the Schwarz Lemma,* J. Math. Anal. Appl. **205** (1997), 508–511.
6. R. Osserman, *A new variant of the Schwarz-Pick-Ahlfors Lemma,* Manuscripta Mathematica **100** (1999), 123–129.
7. R. Osserman, *A sharp Schwarz inequality on the boundary,* Proc. Amer. Math. Soc. **128**, No. 12 (2000), 3513–3517.
8. В. Н. Дубинин, *Конформные отображения и неравенства для алгебраических полиномов,* Алгебра и анализ **13**, вып. 5 (2001), 16–43.
9. В. Н. Дубинин, *О применении конформных отображений в неравенствах для рациональных функций,* Изв. РАН. Сер. мат. **66**, No. 2 (2002).
10. Н. А. Лебедев, *Некоторые оценки для функций, регулярных и однолистных в круге,* Вестн. Ленингр. ун-та. No. 11, сер. мат., физ., хим., вып.4 (1955), 3–21.
11. В. Н. Дубинин, *Теоремы искажения для полиномов на окружности,* Мат. сб. **191**, No. 12 (2000), 51–60.
12. Z. Nehari, *Some inequalities in the theory of functions,* Trans. Amer. Math. Soc. **75**, No. 2 (1953), 256–286.

13. Ch. Pommerenke, *Univalent functions.* Cöttingen, 1975.
14. Э. Коллингвуд, А. Ловатер, *Теория предельных множеств.* М., 1971.
15. В. Н. Дубинин, *Симметризация в геометрической теории функций комплексного переменного,* Успехи мат. наук **49**, вып. 1 (1994), 3–76.
16. В. Н. Дубинин, Е. В. Костюченко, *Экстремальные задачи теории функций, связанные с n-кратной симметрией* Зап. науч. семин. ПОМИ **276** (2001), 83–111.
17. Г. В. Кузьмина, *Модули семейств кривых и квадратичные дифференциалы,* Тр. Мат. ин-та АН СССР **139** (1980), 1–240.

Институт прикладной
математики ДВО РАН,
Владивосток
E-mail: dubinin@iam-mail.febras.ru

Поступило 15 апреля 2002 г.