Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 286, 2002 г.

Е. Г. Емельянов

К ЗАДАЧЕ О МАКСИМУМЕ ПРОИЗВЕДЕНИЯ СТЕПЕНЕЙ КОНФОРМНЫХ РАДИУСОВ НЕНАЛЕГАЮЩИХ ОБЛАСТЕЙ

§1. Введение. Формулировки результатов

1.1. Пусть $\mathbf{b} = \{b_i\}_{i=1}^n$ – система различных точек на римановой сфере $\overline{\mathbb{C}}^z$. Под допустимой системой областей понимаем систему $\mathbb{D} = \{D_i\}_{i=1}^n$ попарно неналегающих односвязных областей на $\overline{\mathbb{C}}^z$ таких, что $b_i \in D_i$, $i = 1, \ldots, n$. Пусть $\mathcal{D}(\mathbf{b})$ – семейство всех допустимых систем областей. Пусть $\boldsymbol{\alpha} = \{\alpha_i\}_{i=1}^n$ – система положительных чисел. На семействе $\mathcal{D}(\mathbf{b})$ определен функционал

$$\Phi(\mathbb{D}, \boldsymbol{\alpha}) = \sum_{i=1}^n \alpha_i^2 M(D_i, b_i), \tag{1}$$

где через $M(D, b)$ обозначается приведенный модуль области D относительно точки $b \in D$. Имеем равенство

$$\Phi(\mathbb{D}, \boldsymbol{\alpha}) = \frac{1}{2\pi} \log \prod_{i=1}^n R^{\alpha_i^2}(D_i, b_i), \tag{1$'$}$$

где $R(D, b)$ – конформный радиус области D относительно точки $b \in D$ (при $b_n = \infty$ под соответствующим множителем в (1$'$) понимается $R^{-\alpha_n^2}(D_n, \infty)$),

Задачи о максимуме произведения степеней конформных радиусов неналегающих областей принадлежат к числу классических проблем геометрической теории функций; об этих задачах и связанных с ними новых вопросах см., например, обзорные статьи [1, 2]. Общий результат в указанной задаче состоит в следующем. Существует единственная система областей $\mathbb{D}(\mathbf{b}, \boldsymbol{\alpha}) = \{D_i(\mathbf{b}, \boldsymbol{\alpha})\}_{i=1}^n$, реализующая максимум $\mathcal{M}(\mathbf{b}, \boldsymbol{\alpha})$ суммы (1):

$$\mathcal{M}(\mathbf{b}, \boldsymbol{\alpha}) = \Phi\big(\mathbb{D}(\mathbf{b}, \boldsymbol{\alpha}), \boldsymbol{\alpha}\big).$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант No. 00-01-00118.

Области $D_i(\mathbf{b},\boldsymbol{\alpha})$ системы $\mathbb{D}(\mathbf{b},\boldsymbol{\alpha})$ являются круговыми областями ассоциированного квадратичного дифференциала $Q_{\mathbf{b}}(z,\boldsymbol{\alpha})dz^2$ данной задачи. Указанный квадратичный дифференциал единственен.

При $n=2,3$ решение задачи весьма просто следует из выражения для дифференциала $Q_{\mathbf{b}}(z,\alpha)dz^2$ и формулируется в элементарных функциях.

В случае $n=4$ при помощи дробно-линейного преобразования четверка точек $\mathbf{b}=\{b_1,b_2,b_3,b_4\}$ с ангармоническим отношением

$$\lambda=\frac{b_3-b_1}{b_3-b_2}:\frac{b_4-b_1}{b_4-b_2}$$

переходит в четверку $\{-1,1,b,-b\}$, где

$$b=\frac{\sqrt{\lambda}-1}{\sqrt{\lambda}+1}.$$

В указанном случае мы имеем дело с задачей нахождения величины $\mathcal{M}(\mathbf{b},\boldsymbol{\alpha})$ при любом заданном значении λ и задачей о максимуме указанной величины при всех значениях λ. При $\boldsymbol{\alpha}=\mathbf{1}=\{1,1,1,1\}$ обе эти задачи решены Г. В. Кузьминой [3], а вторая из них также С. И. Федоровым [4]. В случае произвольных значений α_1, α_2, α_3, α_4 вопрос остается открытым.

В настоящей работе мы рассматриваем задачу о $\mathcal{M}(\mathbf{b},\boldsymbol{\alpha})$ в случае $n=4$, $\boldsymbol{\alpha}=\{1,1,\alpha,\alpha\}$, где α – любое положительное число. При $\mathbf{b}=\{-1,1,b,-b\}$ допустимое семейство систем областей, максимум функционала (1), экстремальную систему областей и т.д. будем обозначать через $\mathcal{D}(b)$, $\mathcal{M}(b,\alpha)$, $\mathbb{D}(b,\alpha)=\{D_j(b,\alpha)\}_{j=1}^4$ и т.д. При $\alpha=1$ индекс "α" в этих обозначениях будем опускать.

Случай $\boldsymbol{\alpha}=\{1,1,\alpha,\alpha\}$ существенно отличается от исследованного в [3]. При $\boldsymbol{\alpha}=\mathbf{1}$ в силу симметрии в условиях задачи при любой перестановке точек $-1,1,b,-b$ экстремальная конфигурация переходит в себя. Поэтому при двукратном "сворачивании" экстремальной конфигурации посредством преобразований

$$u=z^2,\quad w=G\left(b\frac{u^2-1}{u^2-b^2}\right),\tag{2}$$

где $G(t)=\frac{1}{2}(t+1/t)$ – функция Жуковского, точки $z=-1,1,b,-b$ переходят в точку $w=\infty$, точки $z=0,\infty$ переходят в $w=G(b)$, а точки $u = \pm b$, являющиеся особыми для второго из преобразований (2), – в $w = \pm 1$. Рассуждение, аналогичное приведенному в [3], где рассматривается система точек $\{-1, 1, a, \infty\}$, показывает, что при указанных преобразованиях каждая из областей $D_i(b_i)$, $i = 1, 2, 3, 4$, переходит в одну и ту же область на $\overline{\mathbb{C}}^w \setminus \{-1, 1, G(b)\}$, содержащую точку $w = \infty$ и реализующую максимум приведенного модуля относительно точки $w = \infty$ в семействе всех областей, обладающих упомянутым свойством. Это означает, что объединение замыканий критических траекторий ассоциированного крадратичного дифференциала $Q_b(z)dz^2$ переходит в континуум наименьшей емкости $E(-1, 1, G(b))$, содержащий указанные точки. Отсюда получаем выражение для искомого максимума в случае $\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{1}$ (ср. с теоремой 1 в [3]):

$$2\pi\mathcal{M}(b) = -4\log\operatorname{cap} E(-1, 1, G(b)) + 4\log|b^2 - 1| - 2\log|b| - 4\log 4. \quad (3)$$

Равенство (3) можно записать иначе, введя в рассмотрение конформный инвариант. Пусть для $\mathbf{b} = \{b_j\}_{j=1}^4$

$$\begin{gathered} L_0(\mathbf{b}) = -\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2\pi}\sum_{1\leqslant i<j\leqslant 4}\log|b_i - b_j|^2, \\ J_0(\mathbf{b}) = \mathcal{M}(\mathbf{b}) + L_0(\mathbf{b}). \end{gathered} \quad (4)$$

Функционал $J_0(\mathbf{b})$ инвариантен относительно группы дробно-линейных преобразований $\overline{\mathbb{C}}^z$. В случае симметричной системы $\mathbf{b} = \{-1, 1, b, -b\}$ из (3) и (4) получим

$$2\pi J_0(b) = -4\log\operatorname{cap} E(-1, 1, p) + \frac{4}{3}\log|p^2 - 1| - \frac{10}{3}\log 4, \quad p = G(b). \quad (5)$$

Известно неравенство (см. [3, 4]):

$$J_0(b) \leqslant J_0(b^*), \quad \text{где} \quad b^* = (2 - \sqrt{3})i, \quad (6)$$

откуда вытекает оценка для $\mathcal{M}(b)$:

$$\begin{gathered} 2\pi\mathcal{M}(b) \leqslant 2\pi\big(\mathcal{M}(b^*) + L_0(b^*) - L_0(b)\big) = \\ = 2\log\frac{3}{4} + \frac{4}{3}\log|b^2 - 1| + \frac{2}{3}\log|b|. \end{gathered} \quad (7)$$

Равенство в (7) достигается лишь при $b = \pm b^*$, $\pm 1/b^*$.

В случае $\alpha \neq 1$ мы не получим формулы, аналогичной (3). Однако с помощью специально подобранного конформного инварианта удается получить оценку, аналогичную (7).

1.2. Положим для $\alpha > 0$ и $\mathbf{b} = \{b_j\}_{j=1}^4$

$$L(\mathbf{b}, \alpha) = \frac{1}{2\pi} \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant j} \mu_{i,j} \log |b_i - b_j|^2, \tag{8}$$

где

$$\mu_{1,2} = 2\alpha - 1, \quad \mu_{3,4} = 2\alpha - \alpha^2, \quad \mu_{1,3} = \mu_{1,4} = \mu_{2,3} = \mu_{2.4} = -\alpha.$$

Тогда функционал

$$J(\mathbf{b}, \alpha) = \mathcal{M}(\mathbf{b}, \alpha) + L(\mathbf{b}, \alpha)$$

конформно-инвариантен и ограничен сверху (см. [5]). В частности, для $\mathbf{b} = \{-1, 1, b, -b\}$ имеем равенство

$$\begin{gathered} J(\mathbf{b}, \alpha) = \mathcal{M}(\mathbf{b}, \alpha) + \\ + \frac{1}{2\pi}\Big(- 4\alpha \log |b^2 - 1| + (2\alpha - \alpha^2) \log |b^2| + (4\alpha - \alpha^2 - 1) \log 4\Big). \end{gathered} \tag{9}$$

Справедлива следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть $J(b, \alpha)$ – функционал (9). Для любого $\alpha > 0$ и любого $b \neq \pm 1$ справедливо неравенство*

$$J(b, \alpha) \leqslant J(i, \alpha), \tag{10}$$

где

$$J(i, \alpha) = 2\alpha \log 4 + 2\alpha^2 \log \alpha - (\alpha + 1)^2 \log(\alpha + 1) - (\alpha - 1)^2 \log |\alpha - 1|.$$

При $\operatorname{Im} b \geqslant 0$ равенство в (10) достигается только при $b = i$. Экстремальной системой областей является только система $\mathbb{D}(i, \alpha)$, состоящая из круговых областей квадратичного дифференциала

$$\frac{\big((\alpha + 1)z^2 - (\alpha - 1)\big)\big((\alpha - 1)z^2 - (\alpha + 1)\big)}{(z^4 - 1)^2}\, dz^2.$$

Следствие 1. *Пусть α – любое положительное число, $\mathbf{b} = \{b_j\}_{j=1}^4$ – система различных точек, $\mathcal{M}(\mathbf{b}, \alpha)$ – максимум функционала (1) на семействе $\mathcal{D}(\mathbf{b})$ при $\boldsymbol{\alpha} = (1, 1, \alpha, \alpha)$. Справедливо неравенство*

$$\mathcal{M}(\mathbf{b}, \alpha) + L(\mathbf{b}, \alpha) \leqslant J(i, \alpha), \tag{11}$$

где $L(\mathbf{b}, \alpha)$ – функция (8). Равенство в (11) имеет место только для $\mathbf{b} = \{-1, 1, i, -i\}$ и для систем точек, соответствующих указанной четверке при дробно-линейных преобразованиях z-сферы.

Следствие 2. *Пусть* $\alpha > 0$ – *любое,* $B \neq \pm 1, \infty$, $\mathbf{b} = \{-1, 1, B, \infty\}$, $\widetilde{\mathcal{M}}(B, \alpha) = \mathcal{M}(\mathbf{b}, \alpha\}$. *Справедливо неравенство*

$$\widetilde{\mathcal{M}}(B, \alpha) - \frac{\alpha}{\pi} \log |B^2 - 1| \leqslant \widetilde{\mathcal{M}}(0, \alpha). \tag{12}$$

Равенство в (12) *достигается только при* $B = 0$.

Замечания. 1. Следствие 2 показывает, в частности, что в случае $0 \leqslant B < 1$ максимум функции $\widetilde{\mathcal{M}}(B, \alpha)$ достигается только при $B = 0$.

2. В случае $\alpha = 1$, $0 \leqslant B < 1$ неравенство (12) и утверждение о равенстве в (12) следуют из результата в [3].

1.3. Доказательство теоремы 1 основывается на решении задачи о максимуме конформного инварианта, возникающего при "сворачивании" исходной задачи посредством преобразований (2).

Пусть $\mathbf{a} = \{a_j\}_{j=1}^4$ – система различных точек на v-сфере. Под допустимой системой здесь будем понимать пару $\widehat{\mathbb{D}} = \{\Delta_j\}_{j=1}^2$ неналегающих односвязных областей на $\overline{\mathbb{C}}^v \setminus \{a_3, a_4\}$ таких, что $a_j \in \Delta_j$, $j = 1, 2$. Пусть $\widehat{\mathcal{D}}(\mathbf{a})$ – семейство всех допустимых пар областей. При любом $\alpha > 0$ на семействе $\widehat{\mathcal{D}}(\mathbf{a})$ определен функционал

$$\Phi_1(\widehat{\mathbb{D}}, \alpha) = M(\Delta_1, a_1) + \alpha^2 M(\Delta_2, a_2). \tag{13}$$

Пусть $\mathcal{M}_1(\mathbf{a}, \alpha)$ – максимум функционала (11) на семействе $\widehat{\mathcal{D}}(\mathbf{a})$, $\widehat{\mathbb{D}}(\mathbf{a}, \alpha) = \{\Delta_j(\mathbf{a}, \alpha)\}_{j=1}^2$ – экстремальная пара областей этого семейства:

$$\mathcal{M}_1(\mathbf{a}, \alpha) = \Phi_1(\widehat{\mathbb{D}}(\mathbf{a}, \alpha), \alpha).$$

Положим

$$L_1(\mathbf{a}, \alpha) = \frac{1}{2\pi} \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant 4} \lambda_{i,j} \log |a_i - a_j|, \tag{14}$$

где

$$\lambda_{1,2} = -2\alpha, \qquad \lambda_{1,3} = \lambda_{1,4} = (\alpha - 1),$$
$$\lambda_{3,4} = (\alpha - 1)^2, \qquad \lambda_{2,3} = \lambda_{2,4} = -\alpha(\alpha - 1).$$

(Как обычно, если $a_i = \infty$, то соответствующее слагаемое в (14) отсутствует.) Функционал

$$J_1(\mathbf{a}, \alpha) = \mathcal{M}_1(\mathbf{a}, \alpha) + L_1(\mathbf{a}, \alpha) \tag{15}$$

является конформным инвариантом и ограничен сверху. Через $Q_{\mathbf{a}}(v,\alpha)dv^2$ обозначаем ассоциированный квадратичный дифференциал. В случае

$$\mathbf{a} = \{0, \infty, 1, a\}, \quad \text{где} \quad a \neq 0, 1, \infty,$$

в используемых обозначениях $\mathbf{a}$ заменяем на a.

Нетрудно видеть, что при преобразовании

$$v = b^2 \frac{z^2-1}{z^2-b^2},$$

переводящем точки -1, 1 и $-b$, b соответственно в точки 0 и ∞, области $D_1(b,\alpha)$, $D_2(b,\alpha)$ и $D_3(b,\alpha)$, $D_4(b,\alpha)$, образующие экстремальную систему $\mathbb{D}(b,\alpha)$, переходят соответственно в области $\Delta_1(b^2,\alpha)$ и $\Delta_2(b^2,\alpha)$, образующие экстремальную систему $\widehat{\mathbb{D}}(b^2,\alpha)$. Непосредственное вычисление дает

$$\frac{1}{2}J(b,\alpha) = J_1(b^2,\alpha) - \frac{1}{2\pi}(\alpha-1)^2 \log 4. \tag{16}$$

Задача о максимуме функционала $J(b,\alpha)$ тем самым сводится к задаче о максимуме функционала $J_1(a,\alpha)$, решение которой дается следующей теоремой.

Теорема 2. *Пусть $\alpha > 1$, $a \neq 0, 1, \infty$. Пусть $J_1(a,\alpha)$ – функционал* (15). *Справедливо неравенство*

$$J_1(a,\alpha) \leqslant J_1(-1,\alpha). \tag{17}$$

Равенство в (17) *достигается только при $a = -1$. Экстремальная пара областей $\widehat{\mathbb{D}}(-1,\alpha)$ состоит из круговых областей квадратичного дифференциала*

$$Q_{-1}(v,\alpha)dv^2 = -\frac{1}{4\pi^2}\ \frac{\alpha^2 v^2 - 1}{(v^2-1)v^2}\, dv^2. \tag{18}$$

§2. Доказательства

2.1. Доказательство теоремы 2. Из ограниченности сверху функционала $J_1(a,\alpha)$ следует существование значения $a^* = a^*(\alpha)$, реализующего максимум этого функционала. Пользуясь конформной инвариантностью функционала $J_1(a,\alpha)$, можем применить преобразование $v \to v/a^*$, переводящее систему $(0,\infty,1,a^*)$ в

$(0, \infty, 1/a^*, a)$. Вследствие этого и благодаря симметричной роли точек a_3, a_4 в условиях рассматриваемой задачи можем считать, что $|a^*| \leqslant 1$. Из общей формулы в [5] получаем выражение для ассоциированного квадратичного дифференциала $Q_{a^*}(v,\alpha)dv^2$ данной задачи:

$$4\pi^2 Q_{a^*}(v,\alpha)dv^2 = -\frac{(\alpha v - 1)(\alpha v - a^*)}{v^2(v-1)(v-a^*)}dv^2. \tag{19}$$

Значение a^*, являющееся полюсом дифференциала (19), подлежит определению. Для нахождения этого значения важен тот факт, что объединение замыканий критических траекторий дифференциала (19) связно и разбивает $\overline{\mathbb{C}}^v$ на две круговые области $\Delta_1(a^*,\alpha)$ и $\Delta_2(a^*,\alpha)$ этого дифференциала, тогда как в общем случае в структуре траекторий дифференциала (19) может присутствовать кольцевая область. Пусть также $D_1^*(\alpha)$, $D_2^*(\alpha)$, где $0 \in D_1^*(\alpha)$, $\infty \in D_2^*(\alpha)$, – круговые области дифференциала (18).

2.2. Следующие четыре леммы характеризуют структуру траекторий дифференциалов (18) и (19).

Лемма 1. *Значение $a^* = a^*(\alpha)$, реализующее максимум функционала $J_1(a,\alpha)$, удовлетворяет условию*

$$\operatorname{Im} a^* = 0.$$

Лемма 2. *Если $a^* < 0$, то касание траекторий дифференциалов $Q_{a^*}(v,\alpha)dv^2$ и $Q_{-1}(v,\alpha)dv^2$ возможно только в точках вещественной оси v-плоскости и в точках окружности $C_r = \{v : |v| = r\}$, где $r = (|a^*|/\alpha)^{1/2}$.*

Лемма 3. *Если $a^* < 0$, то касание траекторий дифференциала $Q_{a^*}(v,\alpha)dv^2$ с окружностью C_r возможно только в точках $\pm r$, $\pm ir$.*

Лемма 4. *Пусть $\alpha > 1$, $0 < x < 1/\alpha$, и пусть σ_x – замкнутая траектория дифференциала $Q_{-1}(v,\alpha)dv^2$, проходящая через точку $v = x$. Тогда $\sigma_x \subset \overline{U}_x$, где $U_x = \{v : |v| < x\}$.*

Доказательства лемм 1–4 приводятся в §2.4.

2.3. Далее при доказательстве теоремы 2 мы будем опираться на предыдущие леммы. В силу леммы 1, a^* – вещественное. Предположим, что $0 < a^* < 1$. Если $a^* \neq 1/\alpha$, то дифференциал $Q_{a^*}(v,\alpha)dv^2$ имеет на вещественной оси два простых нуля:

$c_1 = a^*/\alpha > 0$ и $c_2 = 1/\alpha > 0$. В случае отсутствия в структуре траекторий кольцевой области точки c_1 и c_2 должны принадлежать границе области $\Delta_1(a^*, \alpha)$, содержащей точку $v = 0$, что невозможно вследствие симметрии структуры траекторий дифференциала $Q_{a^*}(v, \alpha)dv^2$. Значит, возможен только случай $a^* = 1/\alpha$. Тогда

$$Q_{a^*}(v, \alpha)dv^2 = Q_{1/\alpha}(v, \alpha)dv^2 = -\frac{1}{4\pi^2} \, \frac{\alpha^2 v^2 - 1}{(v-1)v^2} dv^2,$$

и значение функционала $J_1(1/\alpha)$ непосредственно вычисляется:

$$2\pi J_1(1/\alpha, \alpha) = 2(\alpha^2 - 1)\log 2 + \alpha(\alpha - 1)\log\alpha - (\alpha+1)^2 \log(\alpha+1). \quad (20)$$

Также непосредственное вычисление дает равенство

$$2\pi J_1(-1, \alpha) = (\alpha^2 - \alpha + 1)\log 4 + \alpha^2 \log\alpha -$$

$$-\frac{1}{2}(\alpha+1)^2 \log(\alpha+1) - \frac{1}{2}(\alpha-1)^2 \log(\alpha-1). \quad (21)$$

Несложно проверить, что при $\alpha > 1$

$$J_1(-1, \alpha) > J_1(1/\alpha, \alpha).$$

Таким образом, $a^* < 0$. Предположим, что $-1 < a^* < 0$. В дальнейшем мы будем неоднократно использовать следующее очевидное утверждение.

Пусть траектории γ_1 и γ_2 квадратичных дифференциалов $Q_1(z)dz^2$ и $Q_2(z)dz^2$ на $\overline{\mathbb{C}}$ пересекаются в точках A и B, и пусть в замыкании области, ограниченной дугами этих траекторий с концами в точках A и B, нет нулей и полюсов рассматриваемых дифференциалов. Тогда на дуге траектории γ_i одного из указанных дифференциалов имеется точка касания этой дуги с некоторой траекторией другого из этих дифференциалов.

Пусть $c_1 = a^*/\alpha$ и $c_2 = 1/\alpha$ – нули дифференциала $Q_{a^*}(v, \alpha)dv^2$, γ – критическая траектория этого дифференциала в верхней полуплоскости, соединяющая точки c_1 и c_2. Прежде всего покажем, что γ может пересекать окружность C_r не более чем в одной точке, причем только в случае $r < 1/\alpha$. Действительно, если $r < 1/\alpha$, то точка c_1 лежит внутри окружности C_r, а точка c_2 – снаружи, значит, имеется нечетное число точек пересечения γ и C_r. Если число таких точек не меньше трех, то в верхней полуплоскости существует не менее двух точек касания окружности C_r с траекториями дифференциала $Q_{a^*}(v,\alpha)dv^2$, что невозможно по лемме 3. Если $1/\alpha \leqslant r$ и δ пересекает окружность C_r, то найдется точка p пересечения C_r и γ такая, что дуга траектории γ, имеющая своими концами точки p и $c_2 = 1/\alpha$, лежит внутри окружности C_r. Поскольку $r < 1$, то на дуге окружности C_r с концами в точках r и p должна быть точка касания с траекторией дифференциала $Q_{a^*}(v,\alpha)dv^2$, что противоречит лемме 3. Таким образом, сформулированное предложение доказано.

Далее, поскольку $c_1 \in D_1^*(\alpha)$, то существует замкнутая траектория σ дифференциала $Q_{-1}(v,\alpha)dv^2$, проходящая через точку c_1. Так как σ пересекает вещественную ось также в точке $x = -a^*/\alpha < 1/\alpha$, то траектории σ и γ должны пересекаться в некоторой точке q. Тогда на дуге траектории γ с концами в точках c_1 и q должна существовать точка касания траектории дифференциалов $Q_{a^*}(v,\alpha)dv^2$ и $Q_{-1}(v,\alpha)dv^2$. По лемме 2, эта точка должна принадлежать окружности C_r. Следовательно, точка q лежит вне окружности C_r, значит, кривая σ пересекает эту окружность, что противоречит лемме 4. Это противоречие доказывает, что случай $-1 < a^* < 0$ невозможен. Таким образом, $a^* = -1$.

Для завершения доказательства теоремы 2 остается доказать леммы 1–4.

2.4. Доказательство леммы 1. Поскольку точки $v = 1$ и $v = 1/\alpha$ являются соответственно простым полюсом и простым нулем каждого из дифференциалов $Q_{a^*}(v,\alpha)dv^2$ и $Q_{-1}(v,\alpha)dv^2$, и объединение замыканий критических траекторий дифференциала $Q_{a^*}(v,\alpha)dv^2$ связно, то на отрезке $1/\alpha < x < 1$, являющемся траекторией дифференциала $Q_{-1}(v,\alpha)dv^2$, должна быть точка касания траекторий указанных двух дифференциалов. Условия касания в точке v траекторий дифференциалов $Q_{a^*}(v,\alpha)dv^2$ и $Q_{-1}(v,\alpha)dv^2$ имеет вид $Q_{a^*}(v,\alpha)/Q_1(v,\alpha) > 0$, откуда

$$\operatorname{Im} \frac{\alpha v(a^*+1)}{(v-a^*)(\alpha v+1)} = 0. \tag{22}$$

Если $v = x$ – вещественное, то из (22) получаем $\operatorname{Im}\{(a^*+1)/(x-a^*)\} = 0$, следовательно, $\operatorname{Im} a^* = 0$.

Доказательство леммы 2. Используя условие $-1 \leqslant a^* < 0$, из

(22) получаем:

$$\operatorname{Im}\left(\left(\frac{\alpha}{|a^*|}\right)^{1/2} v + \frac{1}{\left(\frac{\alpha}{|a^*|}\right)^{1/2} v}\right) = 0,$$

откуда и следует утверждение леммы.

Доказательство леммы 3. Условия касания траекторий дифференциала $Q_{a^*}(v,\alpha)dv^2$ с окружностью C_r в точке $v \in C_r$ имеет вид

$$\frac{(\alpha v - 1)(\alpha v - a^*)}{(v-1)(v-a^*)} > 0. \tag{23}$$

Из (23) получаем неравенство

$$\left(\alpha + \frac{\alpha - 1}{v - 1}\right)\left(\alpha + \frac{(\alpha-1)a^*}{v - a^*}\right) > 0,$$

откуда

$$\operatorname{Im}\left\{\big(\alpha(a^*+1)v - a^*(1+\alpha)\big)\big(\overline{v}^{\,2} - (a^*+1)\overline{v} + a^*\big)\right\} = 0.$$

Учитывая, что $|v|^2 = \dfrac{|a^*|}{\alpha} = -\dfrac{a^*}{\alpha}$, отсюда получаем равенство

$$\operatorname{Im} = \left\{\alpha a^*(a^*+1)(\,\overline{v} + v) - a^*(1+\alpha)\overline{v}^{\,2}\right\} = 0,$$

следовательно,

$$\operatorname{Im} v^2 = 0,$$

что и требовалось доказать.

Доказательство леммы 4. Сначала покажем, что касание траекторий дифференциалов $Q_{-1}(v,\alpha)dv^2$ и $-\dfrac{dv^2}{v^2}$ возможно только в точках вещественной или мнимой осей v-плоскости. Действительно, указанные условия касания имет вид

$$\frac{\alpha^2 v^2 - 1}{v^2 - 1} > 0,$$

откуда следует, что $\operatorname{Im} v^2 = 0$.

Далее, предположим, что точка $p \in \sigma_x \cap U_x \neq \varnothing$. В силу симметрии траектории σ_x относительно вещественной и мнимой осей, можем считать, что $\operatorname{Re} p > 0$, $\operatorname{Im} p > 0$. Если $\sigma_x \not\subset \overline{U}_x$, то найдется точка $q \in \mathbb{C} \setminus \overline{U}_x$, $q \in \sigma$, $\operatorname{Re} p > 0$, $\operatorname{Im} q > 0$. Дуга траектории σ с концами в точках p и q должна пересекать окружность C_x в некоторой точке s. Дуга траектории σ с концами в точках $v = x$ и s соединяет две точки окружности C_x, следовательно, на дуге C_x между этими точками должна быть точка касания с траекторией дифференциала $Q_{-1}(v, \alpha)dv^2$, что невозможно, так как окружность C_x является траекторией дифференциала $-\dfrac{dv^2}{v^2}$. Значит, если $\sigma_x \cap U_x \neq \varnothing$, то $\sigma_x \subset \overline{U}_x$. Предположим теперь, что

$$\sigma_x \cap U_x = \varnothing. \tag{24}$$

Поскольку никакая окружность C_x не является траекторией дифференциала $Q_{-1}(v, \alpha)dv^2$ при $\alpha \neq 1$, то из соображений непрерывности ясно, что условие (24) должно выполняться для всех $x \in (0, 1/\alpha)$, что, очевидно, невозможно. Полученное противоречие доказывает, что всегда $\sigma_x \subset \overline{U}_x$.

2.5. Доказательство теоремы 1. Пусть $\alpha > 1$. Используя теорему 2, из (14) получаем

$$\frac{1}{2}J(b, \alpha) = J_1(b^2, \alpha) - \frac{1}{2\pi}(\alpha - 1)^2 \log 4 \leqslant$$

$$\leqslant J_1(-1, \alpha) - \frac{1}{2\pi}(\alpha - 1)^2 \log 4 = \frac{1}{2}J(i, \alpha),$$

что и требовалось доказать. Пусть теперь $0 < \alpha < 1$. Преобразование $w = \varphi(z) = b/z$ переводит пары точек $-1, 1$ и $b, -b$ друг в друга. Следовательно, система областей

$$\widetilde{\mathbb{D}} = \Big\{\varphi\big(D_4(b, \alpha)\big), \varphi\big(D_3(b, \alpha)\big), \varphi\big(D_2(b, \alpha)\big), \varphi\big(D_1(b, \alpha)\big)\Big\}$$

является экстремальной для системы весов $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha, \alpha, 1, 1)$, а значит, и для системы весов $\boldsymbol{\alpha} = (1, 1, 1/\alpha, 1/\alpha)$. Поэтому имеем

$$\mathcal{M}(b, \alpha) = \alpha^2 \mathcal{M}(b. 1/\alpha) + \frac{1}{2\pi}(\alpha^2 - 1) \log |b|. \tag{25}$$

Из (8) получаем

$$\alpha^2 L(b, 1/\alpha) = L(b, \alpha) + \frac{1}{2\pi}(\alpha^2 - 1) \log |b^2|. \tag{26}$$

Теперь из (25) и (26) следует

$$\alpha^2 J(b, 1/\alpha) = J(b, \alpha).$$

Поскольку $1/\alpha > 1$, то, по доказанному,

$$J(b, \alpha) = \alpha^2 J(b, 1/\alpha) \leqslant \alpha^2 J(-1, 1/\alpha) = J(i, \alpha).$$

В случае $\alpha = 1$ требуемый результат следует из соображений непрерывности.

Литература

1. Г. В. Кузьмина, *Методы геометрической теории функций.* I, II, Алгебра и анализ **9**, вып. 3 (1997), 41–103; вып. 5 (1997), 1–50.
2. В. Н. Дубинин, *Симметризация в теории функций комплексного переменного,* Успехи мат. наук **49**, вып. 1 (1994), 3–77.
3. Г. В. Кузьмина, *К задаче о произведении конформных радиусов неналегающих областей,* Зап. научн. семин. ЛОМИ **100** (1980), 131–145.
4. С. И. Федоров, *О максимуме одного конформного инварианта в задаче о неналегающих областях,* Зап. научн. семин. ЛОМИ **112** (1981), 172–183.
5. Е. Г. Емельянов, *Конформно-инвариантные функционалы на римановой сфере,* Зап. научн. семин. ПОМИ **276** (2001), 134–154.

С.-Петербургский университет
экономики и финансов

Поступило 16 сентября 2002 г.