Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 286, 2002 г.

Е. Г. Емельянов

ЭКСТРЕМАЛЬНЫЕ РАЗБИЕНИЯ РИМАНОВОЙ ПОВЕРХНОСТИ И КВАЗИКОНФОРМНЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ СПЕЦИАЛЬНОГО ВИДА. II

Под задачей об экстремальном разбиении римановой поверхности $\mathfrak{R}$ понимается вопрос о максимуме функционала $\mathcal{M} = \mathcal{M}(\mathbb{D})$, определенного на допустимом семействе $\mathcal{D} = \{\mathbb{D}\}$ систем областей на поверхности $\mathfrak{R}$ с отмеченными точками и представляющего собой линейную комбинацию функций от областей рассматриваемого семейства. Для приложений важен характер зависимости максимума $\mathcal{M}^*$ функционала $\mathcal{M}(\mathbb{D})$ в семействе $\mathcal{D}$ от параметров, определяющих задачу об экстремальном разбиении. В случае, когда семейство $\mathcal{D}$ состоит только из двусвязных областей, в [1] получены условия, при которых величина $\mathcal{M}^*$ является плюригармонической функцией от отмеченных точек на $\mathfrak{R}$. В настоящей работе этот результат распространяется на более общий случай. Исследуется также зависимость максимума $\mathcal{M}^*$ функционала в задаче об экстремальном разбиении поверхности $\mathfrak{R}$ в семействе $\mathcal{D}$ от других параметров.

§0. Необходимые определения и факты

Задача об экстремальном разбиении римановой поверхности в общем случае определена в [2]. Ограничимся краткими определениями этой задачи в рассматриваемых ниже случаях.

Пусть $\mathfrak{R}$ – компактная риманова поверхность рода $g \geqslant 0$. Пусть на $\mathfrak{R}$ заданы множества различных точек

$$\mathbf{A} = \{a_j\}_{j=1}^n, \quad \mathbf{B}^{(0)} = \{b_i^{(0)}\}_{i=1}^m, \quad N = n + m,$$

и пусть

$$\mathbf{P} = \mathbf{A} \cup \mathbf{B}^{(0)}, \quad \mathfrak{R}' = \mathfrak{R} \setminus \mathbf{P}.$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант No. 00-01-00118.

Пусть $\mathcal{D}$ – семейство систем $\mathbb{D}$ неналегающих областей на $\mathfrak{R}' \cup B$ двух типов: $\mathbb{D} = \mathbb{D}^{(1)} \cup \mathbb{D}^{(2)}$, где

$$\mathbb{D}^{(1)} = \{D_j^{(1)}\}_{j=1}^{n_1}, \quad \mathbb{D}^{(2)} = \{D_j^{(2)}\}_{j=1}^{m},$$

$D_j^{(1)}$ – двусвязная область, $D_j^{(2)}$ – односвязная область, $b_j^{(0)} \in D_j^{(2)}$. Предполагается, что семейство $\mathcal{D}$ ассоциировано с заданным семейством $\mathcal{H}$ систем

$$\mathcal{H}^{(1)} = \{H_j^{(1)}\}_{j=1}^{n_1}, \quad \mathcal{H}^{(2)} = \{H_j^{(2)}\}_{j=1}^{m}$$

гомотопических классов жордановых кривых на $\mathfrak{R}'$ соответствующих двух типов (см. [2]). Пусть $\boldsymbol{\alpha} = \{\alpha_j\}_{j=1}^{n_1+m}$ – заданная система положительных чисел.

Задача 1. Найти максимум функционала

$$\mathcal{M}(\mathbb{D}) = \sum_{j=1}^{n_1} \alpha_j^2 M(D_j^{(1)}) + \sum_{j=1}^{m} \alpha_{n_1+j}^2 M(D_j^{(2)}, b_j^{(0)}) \tag{1}$$

в семействе $\mathcal{D}$.

Здесь $M(D_j^{(1)})$ – модуль области $D_j^{(1)}$ относительно класса кривых в $S_j^{(1)}$, разделяющих ее граничные компоненты, $M(D_j^{(2)}, b_j^{(0)})$ – приведенный модуль области $D_j^{(2)}$ относительно точки $b_j^{(0)} \in D_j^{(2)}$.

Известно [2], что существует единственная экстремальная система областей $\mathbb{D}^*$ (экстремальное разбиение поверхности $\mathfrak{R}$), реализующая максимальное значение функционала (1),

$$\mathbb{D}^* = \{D_j^{(1)*}\}_{j=1}^{n_1} \cup \{D_j^{(2)*}\}_{j=1}^{m},$$

причем, возможно, $D_j^{(1)*} = \varnothing$ для некоторых $j \in \{1, \dots, n_1\}$. Области системы $\mathbb{D}^*$ являются соответственно кольцевыми и круговыми областями ассоциированного с данной задачей квадратичного дифференциала $Q dz^2$ на $\mathfrak{R}$, имеющего полюсы второго порядка в каждой точке $b_j^{(0)}$, полюсы первого порядка в точках a_j (возможно, не во всех этих точках) и регулярного на $\mathfrak{R}'$. Будем считать фиксированными локальные координаты z_j в окрестности каждой точки $p_j \in \mathbf{P}$, $z_j(p_j) = z_j^0$. Тогда в окрестности точки $(z_1^0, \dots, z_N^0)$ определена функция $\mathcal{M}^*(z_1, \dots, z_N)$, выражающая зависимость экстремального значения функционала $\mathcal{M}$ задачи 1 от отмеченных точек

Известно, что может существовать не более $3g-3+N$ непересекающихся двусвязных областей на $\mathfrak{R}$ (см. [3]), число которых совпадает с комплексной размерностью пространства Тейхмюллера $T_{g,N}$ римановых поверхностей рода g с N отмеченными точками. Отсюда следует, что в задаче 1 всегда $n_1 \leqslant 3g-3+N$. Случай $n_1 = 3g-3+N$ оказывается наиболее интересным. В [4, 1] с помощью определенных в [4] квазиконформных отображений специального вида исследовалась функция $\mathcal{M}^*(z_1,\dots,z_N)$ при $m=0$. В §1 настоящей работы результат в [1] распространяется на случай $m \neq 0$.

§1. Зависимость максимума функционала (1) от отмеченных точек

1.1. Теорема 1. *Пусть $\mathfrak{R}$ – компактная риманова поверхность рода $g \geqslant 0$, $\mathbf{P} = \mathbf{A} \cup \mathbf{B}^{(0)} = \{p_j\}_{j=1}^{N}$ – отмеченные точки на $\mathfrak{R}$, z_i – локальная координата в окрестности точки p_j, $z_j(p_j) = z_j^{(0)}$, $j = 1,\dots,N$. Пусть на поверхности $\mathfrak{R}$ рассматривается задача* 1 *и выполняются следующие условия:*

1) $n_1 = 3g-3+N$;

2) каждая точка $a_j \in A$ служит простым полюсом ассоциированного квадратичного дифференциала Qdz^2.

Тогда максимум $\mathcal{M}^*(z_1,\dots,z_N)$ функционала (1) в семействе $\mathcal{D}$ – плюригармоническая функция в окрестности точки $(z_1^0,\dots,z_N^0)$.

Доказательство. Комплексному вектору $\mathbf{K} = (k_1,\dots,k_{n_1})$ сопоставим дифференциал Бельтрами $\mu_{\mathbf{K}}$ на $\mathfrak{R}$, определенный условиями:

$$\mu_{\mathbf{K}}(u) = \begin{cases} k_j \dfrac{|Q|}{Q}(u) & \text{при} \quad u \in D_j^{(1)*}, \\ 0 & \text{при} \quad u \in \mathfrak{R} \setminus \bigcup\limits_j D_j^{(1)*}. \end{cases}$$

Известно, что существует квазиконформный гомеоморфизм римановых поверхностей $f_{\mathbf{K}} : \mathfrak{R} \to \mathfrak{R}_{\mathbf{K}}$, определяемый дифференциалом Бельтрами $\mu_{\mathbf{K}}$ с точностью до конформного автоморфизма поверхности $\mathfrak{R}_{\mathbf{K}}$. Повторяя доказательство теоремы 1 в [4], получаем, что при выполнении условия 2) $f_{\mathbf{K}}$-образы областей системы $\mathbb{D}^*$ образуют экстремальную систему областей задачи 1 на поверхности $\mathfrak{R}_{\mathbf{K}}$ с отмеченными точками $f_{\mathbf{K}}(p_j)$, $p_j \in \mathbf{P}$. Так как отображение $f_{\mathbf{K}}$, по построению, конформно в каждой области $D_j^{(2)*}$, то

$$M\Big(f_{\mathbf{K}}(D_j^{(1)*})\Big) = \operatorname{Re}\frac{1-k_j}{1+k_j}M\big((D_j^{(1)*}\big),$$
$$M\Big(f_{\mathbf{K}}(D_j^{(1)*}), f_{\mathbf{K}}(b_j^0)\Big) = M\big(D_j^{(1)*}, b_j^0\big) = +\frac{1}{2\pi}\operatorname{Re}\log f'_{\mathbf{K}}(b_j^0). \tag{2}$$

Обозначая экстремальное значение функционала (1) для поверхности $\mathfrak{R}_{\mathbf{K}}$ через $\mathcal{M}^*(\mathbf{K})$, видим, что $\mathcal{M}^*(\mathbf{K})$ является плюригармонической функцией в окрестности начала. Далее удобно рассмотреть три случая.

Случай $g=0$. Тогда $\mathfrak{R}=\overline{\mathbb{C}}$. Пусть $z_1^0, z_2^0, \dots, z_N^0$ – координаты отмеченных точек. Можем считать, что $z_{N-2}^0=0$, $z_{N-1}^0=1$, $z_N^0=\infty$. В силу условия 1), $n_1 = N-3$. Будем считать, что отображение $f_{\mathbf{K}}$ нормировано условиями

$$f_{\mathbf{K}}(0)=0, \quad f_{\mathbf{K}}(1)=1, \quad f_{\mathbf{K}}(\infty)=\infty.$$

Положим $z_j = f_{\mathbf{K}}(z_j^0)$. Отображение

$$(k_1, \dots, k_{N-3}) \to (z_1, \dots, z_{N-3})$$

голоморфно в окрестности начала и взаимно-однозначно, откуда следует плюригармоническая зависимость функции $\mathcal{M}^*(z_1, \dots, z_{N-3})$ в окрестности параметров $z_1^0, \dots, z_{N-3}^0$.

Случай $g=1$. Пусть Γ_0 – группа сдвигов плоскости $\mathbb{C}$ с образующими $z \to z+1$, $z \to z+\tau$, $\operatorname{Im}\tau > 0$, $\pi : \mathbb{C} \to \mathbb{C}\setminus\Gamma_0 = \mathfrak{R}$ – комплексно-аналитическая проекция плоскости $\mathbb{C}$ на $\mathfrak{R}$. Квазиконформное отображение $f_{\mathbf{K}} : \mathfrak{R} \to \mathfrak{R}_{\mathbf{K}}$ индуцирует отображение $\widehat{f}_{\mathbf{K}} : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, которое также будем считать нормированным стандартным образом:

$$\widehat{f}_{\mathbf{K}}(0)=0, \quad \widehat{f}_{\mathbf{K}}(1)=1, \quad \widehat{f}_{\mathbf{K}}(\infty)=\infty. \tag{3}$$

Тогда

$$\widehat{f}_{\mathbf{K}}(z+1) = \widehat{f}_{\mathbf{K}}(z)+1, \quad \widehat{f}_{\mathbf{K}}(z+\tau) = \widehat{f}_{\mathbf{K}}(z)+\tau_{\mathbf{K}}, \tag{4}$$

$\mathfrak{R}_{\mathbf{K}} = \mathbb{C}\setminus\Gamma_{\mathbf{K}}$, где $\Gamma_{\mathbf{K}}$ – группа сдвигов плоскости $\mathbb{C}$ с образующими $z \to z+1$, $z \to z+\tau_{\mathbf{K}}$. Пусть ω – фундаментальная область группы Γ_0, $z_1^0, z_2^0, \dots, z_N^0 \in \omega$, $\pi(z_j^0) = p_j$. Можем считать, что

$z_N^0 = 0$. В силу условия 1), $n_1 = N$. Положим $z_j = \widehat{f}_{\mathbf{K}}(z_j^0)$ и отметим, что $\tau_{\mathbf{K}} = \widehat{f}_{\mathbf{K}}(\tau)$. Отображение

$$(k_1, \dots, k_N) \to (z_1, \dots, z_{N-1}, \tau_{\mathbf{K}})$$

голоморфно в окрестности начала и взаимно-однозначно, откуда при фиксированном τ следует, что $\mathcal{M}^*(z_1, \dots, z_N)$ – плюригармоническая функция в окрестности начала.

Случай $g > 1$. Пусть Γ_0 – дискретная группа дробно-линейных преобразований верхней полуплоскости H, $x : H \to H \setminus \Gamma_0 = \mathfrak{R}$ – комплексно-аналитическая проекция. Квазиконформное отображение $f_{\mathbf{K}} : \mathfrak{R} \to \mathfrak{R}_{\mathbf{K}}$ индуцирует отображение $\widetilde{f}_{\mathbf{K}} : H \to H$. Пусть

$$\widehat{\mu}_{\mathbf{K}}(z) = \big(\widetilde{f}_{\mathbf{K}}\big)'_{\overline{z}} / \big(\widetilde{f}_{\mathbf{K}}\big)'_z \quad \text{при} \quad z \in H.$$

Положив $\widehat{\mu}_{\mathbf{K}}(z) = 0$ в нижней полуплоскости, обозначим через $\widehat{f}_{\mathbf{K}}$ голоморфное решение уравнения Бельтрами на $\mathbb{C}$ с коэффициентом $\widehat{\mu}_{\mathbf{K}}$, нормированное условиями (3). Пусть $\Omega_{\mathbf{K}} = \widehat{f}_{\mathbf{K}}(H)$. Тогда $\mathfrak{R}_{\mathbf{K}} = \Omega_{\mathbf{K}} \setminus \Gamma_{\mathbf{K}}$, где $\Gamma_{\mathbf{K}} = \widehat{f}_{\mathbf{K}} \circ \Gamma_0 \circ \widehat{f}_{\mathbf{K}}^{-1}$ – фуксоидная группа дробно-линейных преобразований. Пусть ω – фундаментальная область группы Γ_0, $z_1^0, \dots, z_N^0 \in \omega$ $\pi(z_j^0) = p_j$. Положим $z_j = \widehat{f}_{\mathbf{K}}(z_j^0)$. Тогда z_j голоморфно зависит от $\mathbf{K}$. Выберем комплексный базис $\{m_1, \dots, m_s\}$, $s = 3g-3$, дифференциалов Бельтрами на $\mathfrak{R}$ и пусть μ_j – дифференциал Бельтрами, определенный условиями

$$\mu_j(u) = \begin{cases} \dfrac{|Q|}{Q}(u) & \text{при} \quad u \in D_j^{(1)*}, \\ 0 & \text{при} \quad u \overline{\in} \mathfrak{R} \setminus \bigcup\limits_j D_j^{(1)*}. \end{cases}$$

$$\mu_j = \sum_{i-1}^{s} C_{ji} m_i, \quad \text{где} \quad C_{ij} \text{– постоянные числа.}$$

Тогда имеем

$$\mu_{\mathbf{K}} = \sum_{i=1}^{s} t_i m_i, \quad t_i = \sum_{j=1}^{N+s} k_j C_{ji}$$

Числа $(t_1, \dots, t_s, z_1, \dots, z_N)$ являются комплексными координатами в пространстве $T_{g,N}$ в окрестности поверхности $(\mathfrak{R}, p_1, \dots, p_N)$ ("специальные координаты" Берса [5]). Отображение

$$\big(k_1, \dots, k_{N+s}\big) \to \big(t_1, \dots, t_s, z_1, \dots, z_N\big)$$

голоморфно и взаимно-однозначно в окрестности начала. Если $t_1 = t_2 = \ldots = t_s = 0$, то $\mathfrak{R}_{\mathbf{K}} = \mathfrak{R}$, а $k_1, \ldots, k_{N+s}$ голоморфно выражается через $z_1, \ldots, z_N$, что и доказывает плюригармоничность функции $\mathcal{M}^*(z_1, \ldots, z_N)$ в окрестности точки $(z_1^0, \ldots, z_N^0)$.

§2. Квазиконформные отображения специального вида в задачах об экстремальном разбиении при наличии полосообразных областей

2.1. Приведем кратко требующиеся определения [6]. Пусть на компактной римановой поверхности $\mathfrak{R}$ рода $g \geqslant 0$ заданы множества различных точек

$$\mathbf{A} = \{a_j\}_{j=1}^{n}, \quad \mathbf{B} = \{b_j\}_{j=1}^{m}, \quad \mathbf{P} = \mathbf{A} \cup \mathbf{B}, \tag{6}$$

$\mathfrak{R}' = \mathfrak{R} \setminus \mathbf{P}$. Пусть

$$\boldsymbol{\beta} = \{\beta_j\}_{j=1}^{m}, \quad \mathbf{h} = \{h_i\}_{i=1}^{n_2} \tag{7}$$

– заданные наборы чисел, $-\pi/2 < \beta_j < \pi/2$, $h_i > 0$. Через $\mathcal{D}$ обозначаем семейство систем $\mathbb{D} = \{D_i\}_{i=1}^{n_2}$ неналегающих односвязных областей на $\mathfrak{R}'$, обладающих следующими свойствами:

каждая область D_i – двуугольник с вершинами в точках b_l, $b_r \in \mathbf{B}$, $l = l(i)$, $r = r(i)$;

граничные дуги области D_i ведут себя в окрестностях вершин b_l, b_r подобно логарифмическим спиралям наклонов β_l и β_r, соответственно.

Пусть также выбрана система $\mathring{\mathbb{D}} = \{\mathring{D}_i\}_{i=1}^{n_2}$ в качестве исходной. Тогда можно поставить следующую задачу об экстремальном разбиении.

Задача 2. Найти максимум функционала

$$\mathcal{M}(\mathbb{D}, \mathbf{h}, \boldsymbol{\beta}) = -\sum_{i=1}^{n_2} h_i^2 M\big(D_i, b_{l(i)}, b_{r(i)}; \mathring{D}_i\big) \tag{8}$$

в семействе $\mathcal{D}$.

Здесь $\big(D_i, b_{l(i)}, b_{r(i)}; \mathring{D}_i\big)$ – приведенный модуль двуугольника D_i относительно области $\mathring{D}_i$, определенный в [6]. В [6] показано, что существует единственная экстремальная система областей $\mathbb{D}^* = \{D_i^*\}_{i=1}^{n_2}$, реализующая максимальное значение $\mathcal{M}^*$ функционала (6). Области D_i^* являются полосообразными областями ассициированного квадратичного дифференциала $Q(z)dz^2$ на $\mathfrak{R}$, имеющего полосы второго порядка в каждой точке $b_j \in \mathbf{B}$, полосы первого порядка в точках $a_j \in \mathbf{A}$ и регулярного на $\mathfrak{R}'$. При этом разложение этого дифференциала в окрестности точки b_j имеет вид

$$Q(z) = \frac{\alpha_j^2}{4\pi^2} e^{-2i\beta_j} \frac{1}{(z-b_j)^2} + \dots,$$

где

$$\alpha_i \cos\beta_j = \sum_{i \in E(j)} h_i,$$

и через $E(j)$ обозначено множество тех индексов $i \in \{1, 2, \dots, n_2\}$, для которых точка b_j служит носителем по крайней мере одной из вершин двуугольника D_i. Если точка b_j является носителем обеих вершин области D_i, то индекс i считается дважды.

2.2. С целью дальнейшего изучения зависимости величины $\mathcal{M}^*$ от $\boldsymbol{\beta}$ и $\mathbf{h}$ мы рассмотрим распространение задачи 2 при помощи квазиконформных отображений специального типа. Как и в §1, комплексному вектору $\mathbf{K} = (k_1, \dots, k_{n_2})$, $|k_i| < 1$, сопоставим дифференциал Бельтрами $\mu_{\mathbf{K}} \frac{d\bar{z}}{dz}$ на $\mathfrak{R}$:

$$\mu_{\mathbf{K}}(z) = k_i \frac{|Q|}{Q}(z) \quad \text{при} \quad z \in D_i^*, \quad i = \overline{1, n_2},$$

$$\mu_{\mathbf{K}}(z) = 0 \quad \text{для} \quad z \in \mathfrak{R} \setminus \bigcup_i D_i^*$$

и пусть $f_{\mathbf{K}} : \mathfrak{R} \to \mathfrak{R}_{\mathbf{K}}$ – соответствующее квазиконформное отображение. Положим также для $s = \overline{1, n_2}$

$$\frac{1-k_s}{1+k_s} = \frac{1}{\mathbf{K}_s} = \lambda_s + i\mu_s, \quad \lambda_s > 0. \tag{9}$$

Теорема 2. *Пусть $\mathbb{D}^*$ – экстремальная система областей задачи 2 на конечной римановой поверхности $\mathfrak{R}$ рода $g \geqslant 0$ для системы точек (6) и набора параметров (7). Пусть $\mathbf{K} = (k_1, \dots, k_{n_2})$ – комплексный вектор, $|k_i| < 1$ и $f_{\mathbf{K}} : \mathfrak{R} \to \mathfrak{R}_{\mathbf{K}}$ – квазиконформное отображение, введенное в п. 2.1. Положим $\mathbf{P}_{\mathbf{K}} = \{f_{\mathbf{K}}(p_j) : p_j \in \mathbf{P}\}$, $\mathbb{D}_{\mathbf{K}} = \{f_{\mathbf{K}}(D_i) : D_i \in \mathbb{D}\}$, где $\mathbb{D} \in \mathcal{D}$ – допустимая система областей, $\mathbf{h}_{\mathbf{K}} = \{\widetilde{h}_i\}_{i=1}^{n_2}$, $\boldsymbol{\beta}_{\mathbf{K}} = \{\widetilde{\beta}_j\}_{j=1}^{m}$, где $\widetilde{h}_i$ и $\widetilde{\beta}_j$ определяются равенствами*

$$\operatorname{tg}\beta_j \sum_{i \in E(j)} h_i - \sum_{i \in E(j)} \mu_i h_i = \operatorname{tg}\widetilde{\beta}_j \sum_{i \in E(j)} \lambda_i h_i, \quad \widetilde{h}_i = \lambda_i h_i, \tag{10}$$

λ_i и μ_i определены в (9).

Тогда система областей $\mathbb{D}^*_{\mathbf{K}} = \left\{ f_{\mathbf{K}}(D^*_i) : D^*_i \in \mathbb{D}^* \right\}$ является экстремальной системой задачи 2 на поверхности $\mathfrak{R}_{\mathbf{K}}$ для системы точек $\mathbf{P}_{\mathbf{K}}$ и наборов параметров $\mathbf{h}_{\mathbf{K}}$, $\boldsymbol{\beta}_{\mathbf{K}}$.

Доказательство. Пусть D^*_s, D^*_σ – две области системы $\mathbb{D}^*$, имеющие общую граничную точку p. Мы можем считать, что квадратичный дифференциал Qdz^2 регулярен и отличен от нуля в этой точке. Для $z \in D^*_s$ положим

$$u = I(z) = \int\limits_p^z \sqrt{Q(\zeta)}\, d\zeta,$$

где выбрана некоторая ветвь корня. Функция I отображает область D^*_s на горизонтальную полосу Π_s высоты h_s. Для $u \in \Pi_s$, $u = x + iy$, положим

$$v = z(u) = \frac{u + k_s \overline{u}}{1 + k_s} = x + \frac{iy}{\mathbf{K}_s} = x - \mu_s y + i\lambda_s y$$

и определим для $w \in f_{\mathbf{K}}(D^*_s)$ отображение $v = \widetilde{I}(w)$ условием

$$a \circ I(z) = \widetilde{I} \circ f_{\mathbf{K}}(z). \tag{11}$$

Легко видеть, что $\widetilde{I}$ – конформный гомеоморфизм области $f_{\mathbf{K}}(D^*_s)$ на горизонтальную полосу $\widetilde{\Pi}_s = a_s(\Pi_s)$ высоты $\widetilde{h}_s = \lambda_s\, h_s$. Пусть $I(z)$ обозначает аналитическое продолжение функции I из области D^*_s в D^*_σ через дугу общей границы этих областей, содержащую точку p и не содержащую нулей и полюсов дифференциала Qdz^2. Область D^*_σ отображается посредством такого продолжения на горизонтальную полосу Π_σ высоты h_σ, имеющую с полосой Π_s общую сторону, содержащую точку $u_1 = I(p)$. Положим для $u \in \Pi_\sigma$

$$a(u) = a(u_1) + \frac{\Delta u + k_\sigma \overline{\Delta u}}{1 + k_\sigma},$$

$$\text{где} \quad \Delta u = u - u_1 = \Delta x + i\Delta y.$$

Имеем для $u = x + iy \in \Pi_\sigma$:

$$a(u) = x - (\mu_s h_s + \mu_\sigma \Delta y) + i(\lambda_s h_s + \lambda_\sigma \Delta y). \tag{12}$$

Посредством (11) мы получаем аналитическое продолжение функции $\widetilde{I}(w)$ из области $f_{\mathbf{K}}(D_s^*)$ в $f_{\mathbf{K}}(D_\sigma^*)$. Продолжение этого процесса показывает, что $\widetilde{I}(w)$ – аналитическая функция на поверхности $\mathfrak{R}_{\mathbf{K}}$, из которой удалены точки множества $\mathbf{P}_{\mathbf{K}}$, а также $f_{\mathbf{K}}$-образы нулей дифференциала Qdz^2. Из (11) следует равенство

$$\frac{1}{(1+k_i)^2}Q(z) = \widetilde{I}'^2(w)\big(f_{\mathbf{K}}\big)'^2_z, \quad \text{где} \quad w = f_{\mathbf{K}}(z), \qquad z \in D_i^*,$$

откуда видно, что $\widetilde{I}'^2(w)$ – однозначная функция на указанной проколотой поверхности $\mathfrak{R}_{\mathbf{K}}$. Пусть теперь $z(t) \subset D_s^*$ – дуга на $\mathfrak{R}'$ такая, что

$$Q(z(t)){z_t'}^2 = e^{i\theta},$$

т.е. геодезическая в Q-метрике на $\mathfrak{R}$, $w(t) = f_{\mathbf{K}}(z(t))$. Тогда, в силу (13), имеем

$$w_t' = \big(f_{\mathbf{K}}\big)'_z\, z_t + \big(f_{\mathbf{K}}\big)'_{\overline{z}}\, \overline{z}_t{}' = \big(f_{\mathbf{K}}\big)'_z\, z_t'\left(1 + k_s\frac{|Q|}{Q}(z)\frac{\overline{z}_t{}'}{z_t'}\right) =$$

$$= \big(f_{\mathbf{K}}\big)'_z\, z_t'\big(1 + k_s e^{-i\theta}\big).$$

Отсюда, используя (11), получаем

$$\widetilde{I}'^2(w)\, {w_t'}^2 = e^{i\theta}\left(\frac{1 + k_s\, e^{-i\theta}}{1 + k_s}\right)^2. \tag{14}$$

В частности, при $\theta = 0$ получаем $\widetilde{I}'^2(w)\, {w_t'}^2 = 1$. Это значит, что при отображении $f_{\mathbf{K}}$ траектории дифференциала Qdz^2 переходят изометрически в траектории дифференциала $\widetilde{I}'^2(w)dw^2$. (При этом ортогональные траектории дифференциала Qfz^2 переходят в кусочно-аналитические кривые, составленные из отрезков геодезических в метрике $\big|\widetilde{I}'(w)\big|\,|dw|$.) Анализ поведения функции $\widetilde{I}'^2(w)$ в окрестностях точек $f_{\mathbf{K}}(a_j)$, $a_j \in \mathbf{A}$, и в окрестностях точек $f_{\mathbf{K}}(c_i)$, где c_i – нуль дифференциала Qdz^2, основанный на использовании гомеоморфности отображения $f_{\mathbf{K}}$ и свойства (14), показывает, что дифференциал $\widetilde{I}'^2(w)dw^2$ имеет в точках $f_{\mathbf{K}}(a_j)$ простые полюсы, а в точках $f_{\mathbf{K}}(c_i)$ – нули того же порядка, что и дифференциал Qdz^2 в точках c_i.

Образом замкнутой геодезической γ в Q-метрике, стягивающейся на поверхности $\mathfrak{R}'$ к проколу в точке $z = b_j \in \mathbf{B}$, является замкнутая кривая $\gamma_{\mathbf{K}}$ на $\mathfrak{R}_{\mathbf{K}}$, стягивающаяся на поверхности $\mathfrak{R}'_{\mathbf{K}}$ к проколу в точке $w = f_{\mathbf{K}}(b_j)$. В силу (14), эта кривая является геодезической в метрике $\left|\widetilde{I}'(w)\right| |dw|$. Отсюда следует, что каждая точка $f_{\mathbf{K}}(b_j)$ служит полюсом второго порядка указанного дифференциала, а каждая область $f_{\mathbf{K}}(D_i^*)$ – его полосообразной областью.

Пусть внутри кривой γ, кроме двойного полюса в точке $z = b$, не существует других полюсов и нулей дифференциала $Q(z)dz^2$. Функция $u = I(z)$ отображает внутренность кривой γ, разрезанную вдоль одной из критических траекторий Γ указанного дифференциала с предельной концевой точкой $z = b_j$, на горизонтальную полуполосу Π высоты $H = \sum\limits_{i\in E(j)} h_j$. При этом абсциссы точек u_-, u_+ на верхней и нижней границах полуполосы Π, соответствующих при обратном отображении $z = I^{-1}(u)$ общей точке $z \in \Gamma$, отличаются на величину $H \operatorname{tg} \beta_j + o(|z - b_j|)$.

Внутренность кривой $f_{\mathbf{K}}(\gamma)$ с разрезом вдоль кривой $f_{\mathbf{K}}(\Gamma)$ отображается посредством функции $\widetilde{I}(w)$ на полуполосу $\Pi_{\mathbf{K}}$, $\Pi_{\mathbf{K}} = a(\Pi)$. По определению отображения $v = a(u)$, высота полуполосы $\Pi_{\mathbf{K}}$ равна $\sum\limits_{i\in E(j)} \lambda_j h_j$, а изменение разности абсцисс точек $v_- = a(u_-)$ и $v_+ = a(u_+)$ по сравнению с разностью абсцисс точек u_- и u_+ составляет $-\sum\limits_{i\in E(j)} \mu_j h_j$ (12). Отсюда получаем равенства (10).

Литература

1. Е. Г. Емельянов, *Задачи об экстремальном разбиении в пространстве римановых поверхностей,* Зап. научн. семин. ПОМИ **263** (2000), 84–105.
2. Г. В. Кузьмина, *Модули семейств кривых и квадратичные дифференциалы,* Тр. Матем. ин-та СССР **139** (1980), 1–240.
3. E. P. Gardiner, *Teichmüller Theory and Quadratic Differentials.* J. Wiley and Sons, New York (1987).
4. Е. Г. Емельянов, *Экстремальные разбиения римановой поверхности и квазиконформные отображения специального вида,* Зап. научн. семин. ПОМИ **254** (1998), 108–116.
5. L. Bers, *Quasiconformal mappings and Teichmüller's theorem,* Analytic functions, Princeton, 1960, 89–120. Русский перевод: Л. Берс, Квазиконформные отображения и теорема Тейхмюллера, в кн.: Л. Альфорс, Л.

Берс, Пространства римановых поверхностей и квазиконформные отображения, М., 1961.

6. Е. Г. Емельянов, Г. В. Кузьмина, *Теоремы об экстремальном разбиении в семействах систем областей различных типов,* Зап. научн. семин. ПОМИ **237** (1997), 74–104.

С.-Петербургский университет
экономики и финансов

Поступило 24 декабря 2001 г.
в дополненном виде
21 марта 2002 г.