Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 286, 2002 г.

Н. В. Проскурин

О КУБИЧЕСКОЙ СИМПЛЕКТИЧЕСКОЙ ТЕТА–ФУНКЦИИ

Введение

Кубическая тета-функция Куботы–Паттерсона $\Theta_{\text{K-P}}$ определена [4, 7, 9] как вычет ряда Эйзенштейна на гиперболическом пространстве $\mathbf{H} \simeq \mathrm{SL}(2,\mathbf{C})/\mathrm{SU}(2)$, соответствующего главной конгруэнц подгруппе Γ_* $\bmod 3$ в $\mathrm{SL}(2,\mathcal{O})$, где $\mathcal{O}$ — кольцо целых чисел поля $\mathbf{Q}(\sqrt{-3})$. Это означает, что $\Theta_{\text{K-P}}$ является кубической метаплектической формой относительно группы Γ_*. Вместе с тем, как показал Паттерсон [7], $\Theta_{\text{K-P}}$ инвариантна относительно группы $\mathrm{SL}(2,\mathbf{Z})$. Более того [10], $\Theta_{\text{K-P}}$ инвариантна также относительно действия матрицы $\iota = \mathrm{diag}(i, i^{-1})$, $i = \sqrt{-1}$. Таким образом оказывается, что $\Theta_{\text{K-P}}$ есть кубическая метаплектическая форма относительно группы B_*, которая является подгруппой в $\mathrm{SL}(2,\mathbf{C})$, порожденной Γ_*, $\mathrm{SL}(2,\mathbf{Z})$ и ι. В этой связи заметим, что подгруппа в $\mathrm{SL}(2,\mathbf{C})$, обозначим ее $\mathrm{Bianchi}(\mathcal{O})$, порожденная $\mathrm{SL}(2,\mathcal{O})$ и ι, является максимальной дискретной подгруппой, известной как группа Бианки. Группа B_* является ее подгруппой индекса 27.

Наша цель в этой статье доказать, что кубическая симплектическая тета-функция $\Theta_\natural$ обладает подобными свойствами. $\Theta_\natural$ является кубической метаплектической формой на $\mathbf{X} \simeq \mathrm{Sp}(4,\mathbf{C})/\mathrm{Sp}(4)$. Она была найдена в [8] и рассмотрена более детально в [9]. Обозначим через Γ главную конгруэнц подгруппу $\bmod 3$ в $\mathrm{Sp}(4,\mathcal{O})$. По определению, $\Theta_\natural$ есть вычет в максимальном полюсе ряда Эйзенштейна $\mathrm{E}(\cdot, s; \Theta_{\text{K-P}})$, соответствующего группе Γ, кубической тета-функции Куботы–Паттерсона $\Theta_{\text{K-P}}$ и зигелевой максимальном параболической подгруппе в $\mathrm{Sp}(4,\mathbf{C})$. Таким образом, $\Theta_\natural$ является кубической метаплектической формой относительно группы Γ. Мы покажем, что $\Theta_\natural$

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант 02-01-00087) и SFB-478.

инвариантна относительно группы $\mathrm{Sp}(4,\mathbf{Z})$ и относительно $\iota' = \mathrm{diag}(i, i^{-1}, i^{-1}, i)$.

Как обычно, $\mathbf{Z}$, $\mathbf{Q}$, $\mathbf{R}$, $\mathbf{C}$ обозначают кольцо целых рациональных, поле рациональных, поле вещественных и поле комплексных чисел; $\mathbf{C}^*$ и $\mathbf{R}_+^*$ обозначают мультипликативную группу поля комплексных чисел и мультипликативную группу положительных вещественных чисел. Для $z \in \mathbf{C}$ через $\Re(z)$, $\Im(z)$, $|z|$ и $\overline{z}$ обозначаются вещественная часть, мнимая часть, абсолютная величина z и число, комплексно сопряженное z. Для матрицы R через ${}^tR$ обозначается транспонированная матрица. Через E_n и $\mathrm{diag}(c_1, \dots, c_n)$ обозначаются единичная матрица $n \times n$ и диагональная матрица с c_l на пересечении l-ой строки с l-ым столбцом.

Мы будем иметь дело с автоморфными формами на вещественных аналитических многообразиях $\mathbf{H} = \mathbf{C} \times \mathbf{R}_+^*$ и $\mathbf{X} = \mathbf{C}^4 \times \mathbf{R}_+^{*2}$. Для $w = (z, v) \in \mathbf{H}$ положим $Z(w) = z$ и $V(w) = v$. Для $w = (z_1, z_2, z_3, z_4, u, v) \in \mathbf{X}$ положим $U(w) = u$, $V(w) = v$, $Z_j(w) = z_j$, $Q(w) = (z_1, u)$, $\tilde{Q}(w) = (z_3, v)$; $Q(w)$ и $\tilde{Q}(w)$ – точки из $\mathbf{H}$.

Естественное действие $\mathrm{SL}(2,\mathbf{C})$ на $\mathrm{SL}(2,\mathbf{C})/\mathrm{SU}(2)$ переносится на $\mathbf{H}$ посредством изоморфизма Ивасавы

$$(z, v) \mapsto \begin{pmatrix} 1 & z \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v^{1/2} & 0 \\ 0 & v^{-1/2} \end{pmatrix} \mathrm{SU}(2),\ z \in \mathbf{C},\ v \in \mathbf{R}_+^*.$$

Мы будем обозначать через γw образ $w \in \mathbf{H}$ с $\gamma \in \mathrm{SL}(2,\mathbf{C})$. То же обозначение γw будет использоваться для образа $w \in \mathbf{X}$ под действием

$$\gamma \in \mathrm{Sp}(4,\mathbf{C}) = \left\{ \gamma \in \mathrm{SL}(4,\mathbf{C}) \;\middle|\; \gamma \sigma {}^t\gamma = \sigma \right\},$$
$$\text{где} \quad \sigma = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{1}$$

Чтобы определить это действие, положим $\mathrm{Sp}(4) = \mathrm{Sp}(4,\mathbf{C}) \cap \mathrm{SU}(4)$. Это максимальная компактная подгруппа симплектической группы $\mathrm{Sp}(4,\mathbf{C})$ и естественное действие $\mathrm{Sp}(4,\mathbf{C})$ на $\mathrm{Sp}(4,\mathbf{C})/\mathrm{Sp}(4)$ переносится на $\mathbf{X}$ посредством изоморфизма Ивасавы

$$(z_1, z_2, z_3, z_4, u, v) \mapsto$$
$$\begin{pmatrix} 1 & z_1 & z_2 - z_1 z_4 & z_4 \\ 0 & 1 & z_4 - z_1 z_3 & z_3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -z_1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} uv^{1/2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & v^{1/2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & u^{-1}v^{-1/2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & v^{-1/2} \end{pmatrix} \mathrm{Sp}(4).$$

За подробностями мы отсылаем к [9].

Пусть B, P, $\widetilde{P}$ – подгрупы $\mathrm{Sp}(4, \mathbf{C})$, состоящие из матриц вида

$$\begin{pmatrix} * & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & * & 0 \\ 0 & 0 & * & * \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & * & * \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} * & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & * & 0 \\ 0 & * & * & * \end{pmatrix},$$

соответственно. B является минимальной параболической подгруппой $\mathrm{Sp}(4, \mathbf{C})$. Группы P и $\widetilde{P}$ называются максимальными параболическими подгруппами Зигеля и Якоби, соответственно.

Гомоморфизмы Куботы и Басса – Милнора – Серра

Пусть $\mathcal{O}$ – кольцо целых чисел поля $\mathbf{Q}(\sqrt{-3})$, так что $\mathcal{O} = \mathbf{Z}[\omega]$, $\omega = \exp(2\pi i/3)$. Пусть Γ_* – главная конгруэнц подгруппа $\mathrm{mod}\,3$ в $\mathrm{SL}(2, \mathcal{O})$, и Γ – главная конгруэнц подгруппа $\mathrm{mod}\,3$ в $\mathrm{Sp}(4, \mathcal{O})$, так что диагональные элементы матриц из Γ_* и Γ сравнимы с $1 \bmod 3$, а недиагональные элементы сравнимы с $0 \bmod 3$. Легко найти, что матрицы

$$\begin{pmatrix} a & b & 0 & 0 \\ c & d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d & -c \\ 0 & 0 & -b & a \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & b \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & c & 0 & d \end{pmatrix} \tag{2}$$

с $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma_*$ порождают Γ, и что матрицы того же вида с $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}(2, \mathbf{Z})$ порождают $\mathrm{Sp}(4, \mathbf{Z})$. Для

$$\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma_* \quad \text{положим} \quad \kappa(\gamma) = \begin{cases} \left(\frac{c}{d}\right)^{-1}, & \text{если} \quad c \neq 0, \\ 1, & \text{если} \quad c = 0, \end{cases} \tag{3}$$

где $\left(\frac{\cdot}{\cdot}\right)$ — символ кубического вычета. Согласно Куботе [3], $\kappa\colon \Gamma_* \to \mathbf{C}^*$ является гомоморфизмом групп. Согласно Бассу, Милнору и Серру [1], существует единственный гомоморфизм $\psi\colon \Gamma \to \mathbf{C}^*$ такой, что

$$\psi\left(\begin{pmatrix} a & b & 0 & 0 \\ c & d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d & -c \\ 0 & 0 & -b & a \end{pmatrix}\right) = \kappa(\gamma), \quad \psi\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & b \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & c & 0 & d \end{pmatrix}\right) = \overline{\kappa(\gamma)}$$

$$\text{для} \quad \gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma_*.$$

Основные свойства ψ даны в [9]. В частности, имеем $\psi(\gamma) = 1$ для всех $\gamma \in \Gamma \cap B$.

Далее, пусть $\iota = \operatorname{diag}(i, i^{-1})$, $\iota' = \operatorname{diag}(i, i^{-1}, i^{-1}, i)$, и пусть

$\widetilde{\Gamma}_*$ – подгруппа $\mathrm{SL}(2, \mathcal{O})$, порожденная Γ_* и $\mathrm{SL}(2, \mathbf{Z})$;
B_* – подгруппа $\mathrm{SL}(2, \mathbf{C})$, порожденная $\widetilde{\Gamma}_*$ и ι;
$\widetilde{\Gamma}$ – подгруппа $\mathrm{Sp}(4, \mathcal{O})$, порожденная Γ и $\mathrm{Sp}(4, \mathbf{Z})$;
B – подгруппа $\mathrm{Sp}(4, \mathbf{C})$, порожденная $\widetilde{\Gamma}$ и ι'.

Подгруппа в $\mathrm{SL}(2, \mathbf{C})$, порожденная $\mathrm{SL}(2, \mathcal{O})$ и ι, известна как группа Бианки и будет обозначаться $\mathrm{Bianchi}(\mathcal{O})$. Известно, что группа Бианки $\mathrm{Bianchi}(\mathcal{O})$ является максимальной дискретной подгруппой в $\mathrm{SL}(2, \mathbf{C})$, тогда как $\mathrm{SL}(2, \mathcal{O})$ является подгруппой в $\mathrm{Bianchi}(\mathcal{O})$ индекса 2; см. Эльстрод, Грюневальд, Меннике [2, sect. 7.4].

Теорема 1. *Гомоморфизмы Куботы $\kappa\colon \Gamma_* \to \mathbf{C}^*$ и Басса–Милнора–Серра $\psi\colon \Gamma \to \mathbf{C}^*$ можно продолжить до гомоморфизмов $\kappa\colon \mathrm{B}_* \to \mathbf{C}^*$ и $\psi\colon \mathrm{B} \to \mathbf{C}^*$, положив $\kappa(\gamma) = 1$ для $\gamma \in \mathrm{SL}(2, \mathbf{Z})$, $\kappa(\iota) = 1$, и $\psi(\gamma) = 1$ для $\gamma \in \mathrm{Sp}(4, \mathbf{Z})$, $\psi(\iota') = 1$.*

Доказательство. Продолжение κ до гомоморфизма $\widetilde{\Gamma}_* \to \mathbf{C}^*$ было построено Паттерсоном в [7], см. также [9]. Для дальнейшего расширения заметим, что

$$\iota^2 = -E_2, \quad \text{и} \quad \iota\gamma\iota^{-1} = \begin{pmatrix} a & -b \\ -c & d \end{pmatrix} \quad \text{для} \quad \gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}. \tag{4}$$

Легко видеть, что $\iota\widetilde{\Gamma}_*\iota^{-1} = \widetilde{\Gamma}_*$ и что $\widetilde{\Gamma}_*$ – нормальная подгруппа индекса 2 в B_*. Поэтому, если $\gamma \in \mathrm{B}_*$ и $\gamma \notin \widetilde{\Gamma}_*$, то γ можно представить единственным образом как произведение $\iota\gamma'$ с $\gamma' \in \widetilde{\Gamma}_*$, и мы полагаем $\kappa(\gamma) = \kappa(\gamma')$. Из (4) и определения (3) следует, что $\kappa\colon \widetilde{\Gamma}_* \to \mathbf{C}^*$ удовлетворяет $\kappa(\iota\gamma\iota^{-1}) = \kappa(\gamma)$ для всех $\gamma \in \widetilde{\Gamma}_*$. Простое вычисление, которое мы опустим ради краткости, показывает, что $\kappa\colon \mathrm{B} \to \mathbf{C}^*$ есть гомоморфизм групп, продолжающий $\kappa\colon \widetilde{\Gamma}_* \to \mathbf{C}^*$ и удовлетворяющий условию $\kappa(\iota) = 1$, что и требовалось.

Продолжение ψ до $\widetilde{\Gamma} \to \mathbf{C}^*$ было построено автором в [8, 9]. Для дальнейшего продолжения заметим, что

$$\iota'^2 = -E_4, \quad \text{и} \quad \iota'\gamma\iota'^{-1} = \begin{pmatrix} a_1 & -a_2 & -b_1 & b_2 \\ -a_3 & a_4 & b_3 & -b_4 \\ -c_1 & c_2 & d_1 & -d_2 \\ c_3 & -c_4 & -d_3 & d_4 \end{pmatrix}$$

$$\text{для} \quad \gamma = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & b_1 & b_2 \\ a_3 & a_4 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_2 & d_1 & d_2 \\ c_3 & c_4 & d_3 & d_4 \end{pmatrix}. \tag{5}$$

Мы находим, как и выше, что $\iota'\widetilde{\Gamma}\iota'^{-1} = \widetilde{\Gamma}$, и что $\widetilde{\Gamma}$ — нормальная подгруппа индекса 2 в B. Следовательно, B есть дизъюнктное объединение $\widetilde{\Gamma}$ и $\iota'\widetilde{\Gamma}$. Представив $\gamma \in \iota'\widetilde{\Gamma}$ как произведение $\gamma = \iota'\gamma'$, мы полагаем $\psi(\gamma) = \psi(\gamma')$. Затем мы должны заметить, что $\psi(\iota'\gamma\iota'^{-1}) = \psi(\gamma)$ для всех $\gamma \in \widetilde{\Gamma}$. Ясно, что это утверждение достаточно проверить для γ из удобной системы образующих группы $\widetilde{\Gamma}$. В качестве таковой мы можем взять (2) и применить затем приведенные выше формулы для вычисления $\psi(\gamma)$ и $\psi(\iota'\gamma\iota'^{-1})$. Наконец, стандартные вычисления показывают, что $\psi\colon \mathrm{B} \to \mathbf{C}^*$ есть гомоморфизм групп, продолжающий гомоморфизм $\psi\colon \widetilde{\Gamma} \to \mathbf{C}^*$ и удовлетворяющий условию $\psi(\iota') = 1$, что и требовалось.

Кубическая тета-функция Куботы–Паттерсона

Для $w = (z, v) \in \mathbf{H}$ положим

$$\mathrm{E}_*(w, s) = \sum_{\gamma} \overline{\kappa(\gamma)}\, V(\gamma w)^s, \qquad s \in \mathbf{C},$$

где суммирование производится по множеству матриц γ, содержащему по одному представителю каждого класса в $\Delta_*\backslash\Gamma_*$. Здесь Δ_* – подгруппа всех верхних треугольных матриц в Γ_*. Ряд сходится для s с $\Re(s) > 2$ и представляет аналитическую функцию, которая может быть продолжена мероморфно на $\mathbf{C}$ и не имеет особенностей в полуплоскости $\Re(s) > 1$ кроме простого полюса в точке $s = 4/3$. Кубическая тета-функция Куботы–Паттерсона $\Theta_{\text{K-P}}$ определяется как вычет ряда Эйзенштейна

$$\Theta_{\text{K-P}}(w) = c \operatorname{Res}_{s=4/3} \mathrm{E}_*(w, s)$$

с некоторой константой c. Возьмем $c = 2\pi^{-2}3^3\zeta_{\mathbf{Q}(\sqrt{-3})}(2)$, где $\zeta_{\mathbf{Q}(\sqrt{-3})}$ – дзета-функция Деекинда $\mathbf{Q}(\sqrt{-3})$, с тем чтобы получить $\Theta_{\text{K-P}}(z, v) \sim v^{2/3}$ при $v \to \infty$. (В [7] и в [9] константа c выбрана иначе.) E_* и $\Theta_{\text{K-P}}$ являются кубическими метаплектическими формами на $\mathbf{H}$. Более общо, если Γ' – подгруппа конечного индекса в B_*, то мы скажем, что бесконечно дифференцируемая функция $f\colon \mathbf{H} \to \mathbf{C}$ является кубической метаплектической формой на $\mathbf{H}$ относительно Γ', если она удовлетворяет следующим условиям:

(a) $f(\gamma w) = \kappa(\gamma) f(w)$ для $\gamma \in \Gamma'$, $w \in \mathbf{H}$;
(b) f — собственная функция $\mathrm{D}_{\text{L-B}}$;
(c) $|f(z, v)|$ мажорируется полиномом от $|z|$, v, v^{-1}.

Здесь $\mathrm{D}_{\text{L-B}}$ – оператор Лапласа–Бельтрами на гиперболическом пространстве $\mathbf{H}$. Ряд Эйзенштейна $\mathrm{E}_*(\cdot, s)$, удовлетворяет этим условиям с $\Gamma' = \Gamma_*$. $\Theta_{\text{K-P}}$ тоже удовлетворяет этим условиям, и в этом случае известно [7], что в качестве Γ' можно взять не только Γ_*, но также и $\widetilde{\Gamma}_*$. Кубические метаплектические формы могут быть разложены в ряды Фурье. Нам будет нужно разложение Фурье только для $\Theta_{\text{K-P}}$:

$$\Theta_{\text{K-P}}(z, v) = v^{2/3} + (6\pi v)^{2/3} \sum_{\nu} \tilde{\tau}(\nu) Ai\big((6\pi|\nu|v)^{2/3}\big) e(\nu z),$$

здесь $\tilde{\tau}$ – модифицированная функция Паттерсона, суммирование проводится по $\nu \in (\sqrt{-3})^{-3}\mathcal{O}$, $\nu \neq 0$, Ai – функция Эйри и $e(z) = \exp\big(2\pi i(z + \overline{z})\big)$ для $z \in \mathbf{C}$. Напомним, что $Ai\colon \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ – целая функция, определенная для $z \in \mathbf{R}$ интегралом Эйри

$$Ai(z) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \cos\bigl(t^3/3 + zt\bigr)dt.$$

Модифицированная функция Паттерсона $\tilde{\tau}$ определена в [9]; $\tilde{\tau}(\nu) = \tau(\nu)/|\nu|^{1/3}$ с τ из [9]. Функция Паттерсона τ в [7] отличается множителем 27 от τ в [9].

Теорема 2. *Кубическая тета-функция Куботы–Паттерсона $\Theta_{\text{К-Р}}$ является кубической метаплектической формой относительно группы B_*. В частности, $\Theta_{\text{К-Р}}$ инвариантна относительно ι.*

Доказательство. Известно [7], что $\Theta_{\text{К-Р}}$ является кубической метаплектической формой относительно группы Γ_*. Напомним, что B_* порождена Γ_* и ι и что $\kappa(\iota) = 1$. Таким образом, достаточно доказать, что $\Theta_{\text{К-Р}}(\iota w) = \Theta_{\text{К-Р}}(w)$ для всех $w \in \mathbf{H}$. Функция Паттерсона $\tilde{\tau}$ четна (т.е. $\tilde{\tau}(-\nu) = \tilde{\tau}(\nu)$ для всех ν), см. [7], [9]. С этим замечанием, из разложения Фурье следует $\Theta_{\text{К-Р}}(-z,v) = \Theta_{\text{К-Р}}(z,v)$ для всех $(z,v) \in \mathbf{H}$. Остается заметить, что $\iota(z,v) = (-z,v)$.

Ряды Эйзенштейна

Пусть $f\colon \mathbf{H} \to \mathbf{C}$ — кубическая метаплектическая форма относительно группы Γ_*. Мы сопоставим форме f два ряда:

$$\mathrm{E}(w,s;f) = \sum_{\gamma\in\Delta_P\backslash\Gamma} \overline{\psi(\gamma)}U(\gamma w)^s V(\gamma w)^s f(Q(\gamma w)), \tag{6}$$

$$\tilde{\mathrm{E}}(w,s;f) = \sum_{\gamma\in\Delta_{\tilde{P}}\backslash\Gamma} \overline{\psi(\gamma)}U(\gamma w)^{2s} V(\gamma w)^s \overline{f(\tilde{Q}(\gamma w))}, \tag{7}$$

здесь $w \in \mathbf{X}$, $s \in \mathbf{C}$, $\Delta_P = P \cap \Gamma$, $\Delta_{\widetilde{P}} = \widetilde{P} \cap \Gamma$. Нам будет нужен еще один ряд,

$$\mathrm{E}_{\min}(w;s,t) = \sum_{\gamma\in\Delta\backslash\Gamma} \overline{\psi(\gamma)}U(\gamma w)^{2t+s} V(\gamma w)^{s+t}, \tag{8}$$

$w \in \mathbf{X}$, $s, t \in \mathbf{C}$, известный как старший ряд Эйзенштейна. Здесь $\Delta = B \cap \Gamma$. Слагаемые в (6–8) не зависят от произвола в выборе представителей γ в классах из $\Delta_P \backslash \Gamma$, $\Delta_{\tilde{P}} \backslash \Gamma$, $\Delta \backslash \Gamma$, детали см. в [9]. Из общей теории рядов Эйзенштейна [5,6] известно, что ряды в правых частях (6–8) сходятся абсолютно и локально равномерно в $\mathbf{X} \times \{ s \in \mathbf{C} \mid \Re(s) > \xi \}$ и, соответственно, в $\mathbf{X} \times \{ (s,t) \in \mathbf{C}^2 \mid \Re(s) > \xi,\ \Re(t) > \xi \}$ с некоторым $\xi \in \mathbf{R}$. Более того, функции $\mathrm{E}(w, \cdot; f)$, $\tilde{\mathrm{E}}(w, \cdot; f)$ и $\mathrm{E}_{\min}(w; \cdot, \cdot)$, представленные рядами (6–8), могут быть продолжены на $\mathbf{C}$ и, соответственно, на $\mathbf{C} \times \mathbf{C}$ с сингулярностями, не зависящими от w. С другой стороны, все функции $\mathrm{E}(\cdot, s; f)$, $\tilde{\mathrm{E}}(\cdot, s; f)$ и $\mathrm{E}_{\min}(\cdot; s, t)$[1] являются кубическими метаплектическими формами на $\mathbf{X}$ относительно группы Γ в смысле следующего определения.

Пусть Γ – подгруппа конечного индекса в B. Мы скажем, что бесконечно дифференцируемая функция $F \colon \mathbf{X} \to \mathbf{C}$ является кубической метаплектической формой на $\mathbf{X}$ относительно Γ, если она удовлетворяет следующим условиям:

(a) $F(\gamma w) = \psi(\gamma) f(w)$ для всех $\gamma \in \Gamma$, $w \in \mathbf{X}$;
(в) F – собственная функция всех инвариантных дифференциальных операторов на $\mathbf{X}$;
(c) $|F(z_1, \ldots, z_4, u, v)|$ мажорируется некоторым полиномом от $|z_1|, \ldots, |z_4|$, u, u^{-1}, v, v^{-1}.

Перегруппировав слагаемые в рядах, можно найти следующие соотношения:

$$\mathrm{E}(w, s; \mathrm{E}_*(\cdot, t)) = \mathrm{E}_{\min}(w; s-t, t), \tag{9}$$

$$\tilde{\mathrm{E}}(w, s; \mathrm{E}_*(\cdot, \bar{t})) = \mathrm{E}_{\min}(w; 2t, s-t). \tag{10}$$

Особенности старшего ряда Эйзенштейна лежат на гиперплоскостях в $\mathbf{C} \times \mathbf{C}$. В частности, можно показать, что функция

$$(S, T) \mapsto (S - 8/3)(T - 4/3)\mathrm{E}_{\min}(w; S, T) \tag{11}$$

голоморфна в некоторой окрестности точки (8/3,4/3).

[1] Мы предполагаем, что s и (s,t) – неособые точки.

Кубическая симплектическая тета-функция $\Theta_\natural$

Кубическая симплектическая тета-функция $\Theta_\natural$ определена в [8,9] как вычет ряда Эйзенштейна $\mathrm{E}(\cdot, s; \Theta_{\text{K-P}})$ в максимальном полюсе. Более точно, мы полагаем

$$\Theta_\natural(w) = c \operatorname*{Res}_{s=4} \mathrm{E}(\sigma w, s; \Theta_{\text{K-P}}) \tag{12}$$

где $\Theta_{\text{K-P}}$ есть кубическая тета-функция Куботы–Паттерсона и σ есть матрица (1). Выбор константы c несущественен в данный момент. Например, можно взять $c = 3^5 5\pi^{-4}\zeta_{\mathbf{Q}(\sqrt{-3})}(4)$, чтобы получить $\Theta_\natural(z_1, \ldots, z_4, u, v) \sim u^{8/3}v^2$ при $u, v \to \infty$. (Тогда $\Theta_\natural$ в (12) равна $(6\pi)^{2/3}\Theta_\natural$ с $\Theta_\natural$ из [9].) Несмотря на введенную в определение (12) матрицу σ, $\Theta_\natural$ есть кубическая метаплектическая форма относительно той же группы Γ, что и сам ряд Эйзенштейна. Из (9–12) следует, что

$$\begin{aligned} \Theta_\natural(w) &= c \operatorname*{Res}_{S=8/3} \operatorname*{Res}_{T=4/3} \mathrm{E}_{\min}(\sigma w, S, T) \\ &= 2c \operatorname*{Res}_{s=8/3} \tilde{\mathrm{E}}(\sigma w, s, \Theta_{\text{K-P}}) \end{aligned} \tag{13}$$

Теперь мы можем сформулировать и доказать основную теорему.

Теорема 3. *Кубическая симплектическая тета-функция* $\Theta_\natural$ *есть кубическая метаплектическая форма относительно группы* B. *В частности,* $\Theta_\natural$ *инвариантна относительно группы* $\mathrm{Sp}(4, \mathbf{Z})$ *и относительно матрицы* $\iota' = \mathrm{diag}(i, i^{-1}, i^{-1}, i)$.

Доказательство. Напомним, что группа B порождена Γ, $\mathrm{Sp}(4, \mathbf{Z})$ и ι', и что $\psi(\gamma) = 1$ для всех $\gamma \in \mathrm{Sp}(4, \mathbf{Z})$ и для $\gamma = \iota'$. Поскольку мы уже знаем, что $\Theta_\natural$ есть кубическая метаплектическая форма относительно Γ, нам остается доказать только, что $\Theta_\natural$ инвариантна относительно $\mathrm{Sp}(4, \mathbf{Z})$ и относительно ι', т.е. что $\Theta_\natural(\gamma w) = \Theta_\natural(w)$ для всех $\gamma \in \mathrm{Sp}(4, \mathbf{Z})$ и для $\gamma = \iota'$. Заметим, что $\sigma \in \mathrm{Sp}(4, \mathbf{Z})$, $\psi(\sigma) = 1$. Поскольку $\Theta_{\text{K-P}}$ инвариантна относительно $\mathrm{SL}(2, \mathbf{Z})$, из предложения 2.3.7 в [9] следует, что $\mathrm{E}(\sigma(\cdot), s; \Theta_{\text{K-P}})$ инвариантна относительно матриц $\sigma^{-1}\delta\sigma$ с

$$\delta = \begin{pmatrix} a & b & 0 & 0 \\ c & d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d & -c \\ 0 & 0 & -b & a \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}(2, \mathbf{Z}), \tag{14}$$

и $\tilde{\mathrm{E}}(\sigma(\cdot), s, \Theta_{\text{К-Р}})$ инвариантна относительно матриц $\sigma^{-1}\delta\sigma$ с

$$\delta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & b \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & c & 0 & d \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}(2, \mathbf{Z}). \tag{15}$$

Из (12,13) следует, что $\Theta_\natural$ инвариантна относительно матриц $\sigma^{-1}\delta\sigma$ с δ из (14) и из (15). С другой стороны, матрицы в (14,15) порождают $\mathrm{Sp}(4, \mathbf{Z})$ и $\sigma^{-1}\mathrm{Sp}(4, \mathbf{Z})\sigma = \mathrm{Sp}(4, \mathbf{Z})$. Следовательно, $\Theta_\natural$ инвариантна относительно $\mathrm{Sp}(4, \mathbf{Z})$. Остается доказать, что $\Theta_\natural$ инвариантна относительно ι'. Это следует из следующей леммы, примененной к $f = \Theta_{\text{К-Р}}$.

Лемма. *Пусть $f\colon \mathbf{H} \to \mathbf{C}$ — кубическая метаплектическая форма относительно Γ_*. Предположим далее, что f инвариантна относительно ι. Тогда $\mathrm{E}(\iota' w, s; f) = \mathrm{E}(w, s; f)$ для всех $w \in \mathbf{X}$, $s \in \mathbf{C}$.*

Доказательство. Непосредственно из определения ряда Эйзенштейна, предполагая $\Re(s)$ достаточно большой, находим

$$\mathrm{E}(\iota' w, s; f) = \sum_{\gamma \in \Omega} \overline{\psi(\gamma)} U(\gamma\iota' w)^s V(\gamma\iota' w)^s f(Q(\gamma\iota' w)), \tag{16}$$

где $\Omega \subset \Gamma$ содержит по одному представителю каждого класса из $\Delta_P \backslash \Gamma$. Очевидно (см. (5)), $\iota'\Gamma\iota'^{-1} = \Gamma$ и $\iota'\Delta_P\iota'^{-1} = \Delta_P$. Следовательно, если Ω содержит по одному представителю каждого класса из $\Delta_P\backslash\Gamma$, то и $\iota'\Omega\iota'^{-1}$ содержит по одному представителю каждого класса из $\Delta_P\backslash\Gamma$. Следовательно, можно заменить γ на $\iota'\gamma\iota'^{-1}$ в правой части (16) и получить

$$\mathrm{E}(\iota' w, s; f) = \sum_{\gamma \in \Omega} \overline{\psi(\iota'\gamma\iota'^{-1})}\, U(\iota'\gamma w)^s V(\iota'\gamma w)^s f(Q(\iota'\gamma w)), \tag{17}$$

где $\psi(\iota'\gamma\iota'^{-1}) = \psi(\gamma)$, $U(\iota'\gamma w) = U(\gamma w)$, $V(\iota'\gamma w) = V(\gamma w)$, и $f(Q(\iota'\gamma w)) = f(\iota Q(\gamma w)) = f(Q(\gamma w))$. Следовательно, правая часть в (17) равна $\mathrm{E}(w, s; f)$, что и требовалось. Принцип аналитического продолжения позволяет снять ограничение на $\Re(s)$.

Так как $\iota'\sigma\iota' = \sigma$, применяя лемму, находим

$$\mathrm{E}(\sigma\iota' w, s; \Theta_{\text{K-P}}) = \mathrm{E}(\iota'\sigma\iota' w, s; \Theta_{\text{K-P}}) = \mathrm{E}(\sigma w, s; \Theta_{\text{K-P}}).$$

Переходя к вычетам, получаем $\Theta_\natural(\iota' w) = \Theta_\natural(w)$, что и завершает доказательство теоремы.

Литература

1. H. Bass, J. Milnor, J.-P. Serre, *Solution of the congruence subgroup problem for* SL_n $(n \geqslant 3)$ *and* Sp_{2n} $(n \geqslant 2)$, Institut des Hautes Études Scientifiques, Publ. Math., No. 22 (1964), 5–60.
2. J. Elstrodt, F. Grunewald, J. Mennicke, *Groups Acting on Hyperbolic Space*, Springer-Verlag, 1998.
3. T. Kubota, *Ein arithmetischer Satz über eine Matrizengruppe*, J. reine angew. Math. **222** (1965), 55–57.
4. T. Kubota, *On automorphic functions and reciprocity law in a number theory*, Lect. in Math. Kyoto Univ., Vol. 2, 1969.
5. R. P. Langlands, *On the functional equations satisfied by Eisenstein series*, Lect. Notes Math. **544** (1976).
6. C. Moeglin, J.-L. Waldspurger, *Spectral Decomposition and Eisenstein Series*, Cambridge University Press, 1995.
7. S. J. Patterson, *A cubic analogue of the theta series* I, II, J. reine angew. Math. **296** (1977), 125–161, 217–220.
8. N. V. Proskurin, *On cubic symplectic metaplectic forms*, J. reine angew. Math. **388** (1988), 158-188.
9. N. V. Proskurin, *Cubic metaplectic forms and theta functions*, Lect. Notes Math. **1677** (1998).
10. N. V. Proskurin, *On certain finite group related to cubic theta function*, Max-Planck-Institut für Mathematik, Preprint series **114** (2000).

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН
E-mail:proskn@pdmi.ras.ru

Поступило 20 августа 2002 г.