Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 286, 2002 г.

И. Ш. Славутский

ВЕЩЕСТВЕННОЕ КВАДРАТИЧНОЕ ПОЛЕ И ГИПОТЕЗА АНКЕНИ—АРТИНА—ЧОВЛЫ

Памяти Я. В. Успенского,
Б. А. Венкова и А. А. Киселева,
"связки" петербургских теоретикочисловиков

Рассматриваемая ниже гипотеза Анкени–Артина–Човлы (в дальнейшем ААЧ-гипотеза) может трактоваться как изучение частного случая более общей задачи рассмотрения арифметических свойств чисел Бернулли (и их обобщений). В обзоре автора [1] приведен ряд примеров, в которых фигурируют связи между числами Бернулли $B_i(1 \leqslant i \leqslant p-1$ для фиксированного простого нечетного числа $p)$ и различными вопросами теории чисел, алгебраической геометрии, функционального анализа, топологии. Однако, в целом, наши знания относительно индивидуальных чисел Бернулли весьма скудны. Если быть точными, мы можем упомянуть лишь два факта (полученных, кстати, одновременно в 1840 году):

1) теорема Штаудта–Клаузена для знаменателей чисел Бернулли ([2] или [3]) и

2) $B_{(p+1)/2} \not\equiv 0(\mathrm{mod}\, p)$, $p \equiv 3(\mathrm{mod}\, 4)$, следствие сравнения Коши [4]

$$h(-p) \equiv -2B_{(p+1)/2}(\bmod p), \quad p \equiv 3(\bmod 4). \tag{1}$$

Обсудим здесь лишь один специальный случай $i = (p-1)/2, p \equiv 1(\mathrm{mod}\, 4)$.

1^0. Как известно, с помощью аналитических методов, разработанных математиками XIX века, были получены классические формулы для числа классов абсолютно абелевых числовых полей. В общем случае (даже для вещественных квадратичных полей!) они содержали трансцендентные функции. Но число классов есть число натуральное, так что возникает несколько задач:

(i) получить формулы для числа классов арифметическим путем;

(ii) придать формулам арифметический характер; или хотя бы

(iii) предложить арифметический метод вычисления числа классов.

Здесь мы остановимся на простейшем случае – вещественном квадратичном поле, связанном с обсуждаемой ААЧ-гипотезой.

Как известно, для мнимого квадратичного поля $\mathbf{Q}(\sqrt{d})$ с фундаментальным дискриминантом $d<0$ первый существенный вклад в этом направлении принадлежит Б. А. Венкову ([5] или [6]). К 1931 году, используя лишь арифметические методы, он предложил доказательство формул для числа классов мнимых квадратичных полей в случае $d \not\equiv 1 (\mathrm{mod}\ 8)$ (на языке бинарных квадратичных форм). Заметим, что некоторое упрощение (и дополнение) этих результатов можно найти в работах Р. Девиса [7, 8]. Что касается вещественного квадратичного поля, то к 1945 году серией работ, принадлежащих Х. Тиге, Х. Хассе и Г. Бергстрему (см., например, [9]) был построен алгоритм для арифметического вычисления числа классов $h(d), d<0$, исходя из формул Дирихле. Задача рационализации формул Дирихле в этом случае оставалась нерешенной (детали см. в [10]).

В 1948 году А. А. Киселевым [11] опубликована хорошо известная в настоящее время заметка, содержащая сравнение

$$h(p)U_1 \equiv T_1 B_{(p-1)/2}(\bmod p), \quad p \equiv 1(\bmod 4). \tag{2}$$

Здесь $h(p)$ и $\varepsilon_1 = T_1 + U_1\sqrt{p}$ – соответственно число классов и главная единица вещественного квадратичного поля $\mathbf{Q}(\sqrt{p})$, а числа Бернулли B_n приведены в четной нумерации, так что $B_0 = 1$, $B_1 = -1/2$, $B_{2n+1} = 0$ для $n \in \mathbf{N}$.

Далее в 1948–1949 гг. Киселев [12, 13] публикует серию подобных сравнений $(\mathrm{mod}\ p)$, связывающих число классов $h(d)$ с числами (и полиномами) Бернулли в случаях:

1) $d<0, d=-np, n \in \mathbf{N}$ и $(n,p)=1$;
2) $d<0, p \nmid d$;
3) $d>0, d=np, n \in \mathbf{N}$ и $(n,p)=1$;
4) $d>0, p \nmid d$,

где d – фундаментальный дискриминант соответствующего квадратичного поля $\mathbf{Q}(\sqrt{d})$.

Заметим, что первый случай содержит некоторые частные результаты А. Гурвица [14], а именно $d=-3p$ и $d=-5p$.

В частности, если $h(d) < p$ и коэффициент $h(d)$ (в правой части этих сравнений) взаимно прост с p, мы получаем арифметический способ вычисления числа классов $h(d)$. Кстати, напомним, что к тому времени уже было известно, что $h(d) = O(\sqrt{d})$ для вещественного квадратичного поля. В действительности мы теперь имеем более точные результаты, например, $h(p) < \sqrt{p}/2$ для простого нечетного числа $p \equiv 1(\mathrm{mod}\ 4)$ (см. [15]). Поэтому, если $U_1 \not\equiv 0(\mathrm{mod}\ p)$ (что то же самое, $B_{(p-1)/2} \not\equiv 0(\mathrm{mod}\ p)$, как это следует из сравнения Киселева (2)), то для поля $\mathbf{Q}(\sqrt{p})$ мы получаем арифметический способ вычисления $h(p)$, однако лишь в случае, когда $U_1 \not\equiv 0(\mathrm{mod}\ p)$!

В то время Киселев затруднялся сказать что-либо относительно условия

$$U_1 \not\equiv 0(\ \mathrm{mod}\ p). \tag{3}$$

В 1951–1952 гг. Н. Анкени, Э. Артин и С. Човла публикуют две работы [16, 17], в которых с помощью p-адических методов авторы получают сравнение для числа классов квадратичного поля $\mathbf{Q}(\sqrt{d})$, но только в случае $d > 0$ и $p|d$. Как выяснилось впоследствии, эти работы оказались очень важны при построении широко известных в настоящее время конструкций p-адических L-функций Куботы–Леопольдта.

Отметим, что правая часть ААЧ-сравнений содержит функцию – целую часть числа. Эквивалентность этих результатов и сравнений Киселева, содержащих числа и многочлены Бернулли, может быть установлена с помощью обобщенного сравнения Вороного (см. [18] и [19]). Кстати, в случае $d = p \equiv 1(\mathrm{mod}\ 4)$ для доказательства эквивалентности этих результатов достаточно использовать один старый результат М. Лерха [20].

Отметим, что по поводу всех этих результатов Хассе [21] заметил, что они требуют систематизации, а решение этой задачи можно найти в недавно опубликованной работе автора [22]: система четырех сравнений естественным образом сведена к двум (по модулю $p^l, l \in \mathbf{N}$).

В цитированной работе [17] авторы указывают, что условие (3) было ими проверено для $p \equiv 5(\mathrm{mod}\ 8)$, $p < 2000$, и предположили, что оно выполняется для любого такого простого числа p. Заметим далее, что в 1959 году несколько более общее предположение было сформулировано в [18] (и независимо несколько позже в заметке [23]):

Если свободное от квадратов ядро фундаментального дискриминанта d вещественного квадратичного поля является простым нечетным числом p, т.е. $\mathrm{Kern}(d) = p$, *то для главной единицы* $\varepsilon_1 = T_1 + U_1\sqrt{p}$ *этого поля выполняется условие* $U_1 \not\equiv 0(\mathrm{mod}\, p)$.

Выше мы видели, что сравнение (2) соответствует сравнению (1) для числа классов мнимого квадратичного поля. Теперь мы рассмотрим частный случай другого сравнения Киселева:

$$h(4p)U_1 \equiv \frac{1}{4}(\frac{2}{p})T_1 E_{(p-3)/2}(\bmod p),\ p \equiv 3(\bmod 4),$$

где E_n – число Эйлера (см.[24] для $l = 1$). Как известно, здесь также $h(4p) < p$. Тогда, если $\left(\frac{p-3}{2}, p\right)$ не является иррегулярной парой для чисел Эйлера, то $U_1 \not\equiv 0(\mathrm{mod}\, p)$. Рассматриваемый же теперь случай соответствует мнимому квадратичному полю $\mathbf{Q}(\sqrt{-4p}), p \equiv 1(\mathrm{mod}\ 4)$, где, в частности, сравнение Киселева ([12] или [13], см.также более позднюю работу Карлица [25]), имеет вид

$$h(-4p) \equiv \frac{1}{2}E_{(p-1)/2}(\bmod p),\ p \equiv 1(\bmod 4).$$

Здесь $h(-4p) < p$ (см., например, [26]), так что $E_{(p-1)/2} \not\equiv 0(\mathrm{mod}\, p)$.

Отметим, что, как информировал Морделл [23], приведенная выше расширенная ААЧ-гипотеза была проверена для простых чисел $p < 18000$. Обратим также внимание на то, что если даже $\mathrm{Kern}(d) = 2p$, распространение гипотезы ошибочно. Например, $d = 8 \cdot 23$ и $U_1 = 23 \cdot 29$.

Заключим эту часть работы замечанием, что упомянутые выше результаты автора дают арифметическое представление формул Дирихле для числа классов вещественных квадратичных полей. Действительно, пусть $p > 3$ – простое нечетное число и χ – символ Кронекера (с соответствующим кондуктором). Доказано, что

$$h(d)U_l/p^{l-1} \equiv -T_l B_{m,\chi}/(2m)(\bmod p^l),\ m = (p-1)p^l/2,\ \chi \bmod n,$$

где $\varepsilon_1 = T_1 + U_1\sqrt{d}$ – главная единица поля $\mathbf{Q}(\sqrt{d}), d = np > 0$, $\varepsilon_l = T_l + U_l\sqrt{d} = \varepsilon_l^{p^{l-1}}, B_{n,\chi}$ – обобщенные числа Бернулли, принадлежащие характеру χ, а $l, n \in \mathbf{N}$ ([24], [27]). Если мы заметим, что $\mathrm{ord}_p U_1 = \mathrm{ord}_p(U_l/p^{l-1})$ и $p \nmid T_l$ ([26], лемма), то мы можем решить последнее сравнение с одной неизвестной величиной

$h(d)$. Действительно, достаточно только выбрать $l \geqslant \alpha + \beta$, где $\alpha = \operatorname{ord}_p U_1$ и $h(d) < \sqrt{d} < p^\beta$

Мы хотели бы закончить эту часть несколько более общим замечанием о связи компоненты U_1 основной единицы вещественного квадратичного поля $\mathbf{Q}(\sqrt{d}), d = np$, с обобщенными числами Бернулли. В выбранных обозначениях выполняется равенство

$$\operatorname{ord}_p U_1 = \operatorname{ord}_p(B_{m,\chi}/m)$$

для $1 \leqslant n < p$. Здесь $m = \frac{p-1}{2}p^{l-1}, p > 3, l \in \mathbf{N}$ и $\chi \bmod n$ – символ Кронекера. В действительности, отмеченное равенство верно для $1 \leqslant n < 4p$, как это следует из недавно доказанных результатов [15].

Замечание. Очевидно, что для простого дискриминанта $p = a^2+1$ или a^2+4 утверждение ААЧ-гипотезы верно. Но мы не знаем ответа на вопрос: существует ли бесконечно много простых чисел, например, формы a^2+1. См. также недавнюю заметку [28], принадлежащую Р. Хашимото.

2^0. Может оказаться, что утверждение $B_{(p-1)/2} \equiv 0(\bmod p)$, $p \equiv 1(\bmod 4)$ (или, что то же самое, $U_1 \equiv 0(\bmod p)$) встретится для достаточно большого простого числа p (см. [29], гл. 5). Это обстоятельство является, вероятно, одним из стимулов для появления работ, содержащих далеко продвинутые вычисления. Недавно появившаяся работа группы авторов [30] перечисляет основные этапы процесса проверки ААЧ-гипотезы для всех простых чисел $p < L, L \in \mathbf{N}$. При этом всегда подсчитывалось значение $U_1(\bmod p)$. В цитируемой публикации применялся алгоритм, использовавший два совмещенных компьютера и проверивший интервал $(10^9, 10^{11})$. Так что к настоящему моменту ААЧ-гипотеза проверена для $p < 10^{11}$.

3^0. ААЧ-гипотеза была сформулирована в виде (3) или

$$B_{(p-1)/2} \not\equiv 0(\bmod p), p \equiv 1(\bmod 4). \tag{4}$$

К настоящему моменту известно довольно много эквивалентных форм гипотезы. Ниже кратко перечислены некоторые из них.

I. Следствие формулы Бернулли и некоторые результаты, связанные с частными суммами гармонического ряда ([31], [32])

Например,

$$B_{(p-1)/2} \not\equiv 0(\bmod p) \Longleftrightarrow \sum_{i=1}^{p-1} i^{(p-1)/2} \not\equiv 0(\bmod p^2)$$

$$\Longleftrightarrow \sum_{i=1}^{p-1} i^{-(p-1)/2} \not\equiv 0(\bmod p^2).$$

Имеется и много других подобных результатов, в частности, см. работы Лерха [20] и Т. Аго, Т. Шойи [33].

II. Произведения квадратичных вычетов и невычетов $(\bmod p)$

Если $\mathbf{A} = \prod\limits_r r, 0 < r < p, \left(\frac{r}{p}\right) = 1$, и $\mathbf{B} = \prod\limits_n n, 0 < n < p, \left(\frac{n}{p}\right) = -1$, где $\left(\frac{\cdot}{p}\right)$ – символ Лежандра, то

$$B_{(p-1)/2} \not\equiv 0(\bmod p) \Longleftrightarrow (\mathbf{A}+\mathbf{B})/p \not\equiv 0(\bmod p),$$

см. [16] (доказательство приводится в работе Карлица [34]).

III. Представление натурального числа суммами нечетного количества целых квадратов

Тождество Морделла для представления натурального числа n суммами s квадратов содержит коэффициенты $\alpha_s(k), 2 \nmid s$. Здесь $s > 8$ и $k = 1, \ldots, e$, где $e \in \mathbf{N}$ и однозначно определено условием $8e < s \leqslant 8(e+1)$.

В случае $s = p, p \equiv 1(\bmod 4)$, для первого коэффициента $\alpha_p(1)$ справедливо

$$B_{(p-1)/2} \not\equiv 0(\bmod p) \Longleftrightarrow 8\alpha_p(1)/p \not\equiv 1(\bmod p).$$

Детали см. в заметке [35].

IV. p-адические L-функции, принадлежащие символу Лежандра

Рассмотрим вновь вещественное квадратичное поле $\mathbf{Q}(\sqrt{p})$ с фундаментальным дискриминантом $d = p, p \equiv 1(\bmod 4)$. Как известно,

$$2h(p)U_l/p^{l-1} \equiv -T_l B_m/m(\bmod p^l), m = \frac{p-1}{2}p^{l-1}, l \in \mathbf{N}, \qquad (5)$$

а $T_l+U_l\sqrt{d}=(T_1+U_1\sqrt{d})^{p^{l-1}}$ ([27]). Методами, развитыми в [36], был получен p-адический вариант формулы Дирихле для числа классов поля $\mathbf{Q}(\sqrt{p})$ в форме

$$2h(p)\frac{\log\varepsilon_1}{\sqrt{p}}=L_p(1,\omega^{(p-1)/2}), \qquad (6)$$

представляющий собой частный случай теперь хорошо известного общего результата Г. -В. Леопольдта (см., например, монографию [29]). Здесь ω – характер Тейхмюллера $\operatorname{mod} p$, значения которого принадлежат полю p-адических чисел $\mathbf{Q}_p$. Тогда характер $\chi=\omega^{(p-1)/2}=\left(\frac{p}{\cdot}\right)$ представляет собой символ Лежандра. Далее $\operatorname{ord}_p(U_l/p^{l-1})=\operatorname{ord}_p U_1$ и $U_l/(T_lp^{l-1})\to\frac{\log\varepsilon_1}{\sqrt{p}}$ при условии, что $l\to\infty$, так что из (5) и (6) следует

$$\left|L_p\left(1,\left(\frac{p}{\cdot}\right)\right)\right|_p=1\Longleftrightarrow U_1\not\equiv 0(\bmod p).$$

Но, к сожалению, наши знания о $L_p(s,\chi)$ недостаточны и лишь известно, что $L_p\left(1,\left(\frac{p}{\cdot}\right)\right)\neq 0$ (относительно деталей см. [36–38]).

V. Кольца вещественного квадратичного поля

Одно тривиальное замечание [27]: {ААЧ-гипотеза верна} $\Longleftrightarrow$ {главная единица вещественного квадратичного поля $\mathbf{Q}(\sqrt{p})$, $p\equiv 1(\operatorname{mod} 4)$, не совпадает с главной единицей кольца дискриминанта $d=p^3n^2, n\in\mathbf{N}$, рассматриваемого поля}.

VI. Неразветвленное расширение простого кругового поля (Н.Накагошу [39])

Пусть $p\equiv 1(\operatorname{mod} 4)$ – простое число, $\varepsilon_1=T_1+U_1\sqrt{p}$ – главная единица вещественного квадратичного поля $\mathbf{Q}(\sqrt{p})$. Если обозначить $k=\mathbf{Q}(\exp(2\pi i/p))$, то

$$U_1\equiv 0(\operatorname{mod} p)\Longleftrightarrow\{k(\sqrt[p]{\varepsilon_1})\ \text{– неразветвленное поле степени } p \text{ над } k\}.$$

Заметим, что доказательство автора не использует гипотезу Вандивера о втором множителе числа классов поля k, а ряд интересных замечаний сделан в предположении, что главная единица поля $\mathbf{Q}(\sqrt{p})$ удовлетворяет условию (3).

VII. Гиперболические отражения классического уравнения Пелля

Исходя из известной связи главной единицы $\varepsilon_1 = T_1 + U_1\sqrt{p}$ вещественного квадратичного поля $\mathbf{Q}(\sqrt{p}), p \equiv 1(\mathrm{mod}\, 4)$, и соответствующего уравнения Пелля (см., например, [9]), М. Шейнгорн [40, 41] соотносит арифметические свойства компоненты U_1 (в частности, выполняется или нет условие (3)) с геометрическими свойствами определенных отражений на соответствующую гиперболическую поверхность. Арифметическая часть работ автора использует результаты статей [16–18, 23].

4^0. В заключение мы приводим еще одно замечание, касающееся нулей p-адических L-функций ([42, 43]).

Рассмотрим p-адическую L-функцию, принадлежащую характеру $\chi = \omega^{-s}$. Тогда для $2 \leqslant s < p-5, p \equiv 1(\mathrm{mod}\, 4)$, верна импликация

$\{\beta \equiv s+1(\mathrm{mod}\, p)$ является нулем p-адической L-функции, принадлежащей характеру $\omega^{-s}\} \Rightarrow B_{(p-1)p-s} \equiv 0(\mathrm{mod}\, p^2)$.

Далее, используя сравнение Куммера

$$B_{(p-1)p-s} \equiv \frac{p(p-1)-s}{p-s-1} B_{p-1-s}(\mod p)$$

для $p \geqslant 13$ и $s = (p-1)/2$, мы заключаем

$$\{\beta \equiv (p+1)/2(\mathrm{mod}\, p) \quad \text{является нулем} \quad L_p(s, \omega^{-(p-1)/2})\}$$
$$\Rightarrow B_{(p-1)/2} \equiv 0(\mathrm{mod}\, p),$$

или

$$L_p\left(\beta, \left(\frac{p}{\cdot}\right)\right) = 0 \Rightarrow \text{ААЧ-гипотеза ошибочна.}$$

Здесь мы использовали то, что характер $\omega^{-(p-1)/2} = \omega^{(p-1)/2} = \left(\frac{p}{\cdot}\right)$ является символом Лежандра.

Литература

1. И. Ш. Славутский, *Очерк истории исследования арифметических свойств чисел Бернулли. Штаудт, Куммер, Вороной,* Историко-мат. исследования **32/33** (1991), 158–181.
2. K. G. C. von Staudt, *Beweis eines Lehrsatzes die Bernoulli'schen Zahlen betreffend,* J. Reine Angew. Math. **21** (1840), 373–374.
3. T. Clausen, *Lehrsatz aus einer Abhandlung über die Bernoullischen Zahlen,* Astron. Nachr. **17**, (1840), 351–352.

4. A. L. Cauchy, *Mémoire sur la théorie des nombres,* Mémoires Acad. Sci., Paris **17** (1840), 249–269, 235–455.
5. B. A. Venkov, *Über die Klassenzahl positiver binärer quadratischer Formen,* Math. Zeitschr. **33** (1931), 350–374.
6. B. A. Venkov, *Elementary Number Theory,* Wolters-Noordhoff Publ., Groningen, 1970.
7. R. W. Davis, *Class number formulae for imaginary quadratic fields. I,* J.für Reine Angew. Math. **286/287** (1976), 369-379.
8. R. W. Davis, *Class number formulae for imaginary quadratic fields. II,* J. Reine Angew. Math. **299/300** (1978), 245–255.
9. H. Hasse, *Vorlesungen über Zahlentheorie,* Springer, Berlin (1964).
10. А. А. Киселев, И. Ш. Славутский, *Преобразование формул Дирихле и арифметическое вычисление числа классов идеалов квадратичных полей,* Тр. 4-го Всесоюзн. Мат. съезда, 1961, Изд. "Наука" **2** (1964), 105–112.
11. А. А. Киселев, *Выражение числа классов идеалов вещественных квадратичных полей через числа Бернулли,* Докл. СССР **61** (1948), 777–779.
12. А. А. Киселев, *Выражение числа классов идеалов квадратичных полей через числа Бернулли,* Научн. сессия ЛГУ. Тезисы докл. по секц. мат. наук, 1948, 37–39.
13. А. А. Киселев, *О некоторых сравнениях для числа классов идеалов вещественных квадратичных полей,* Учен. зап. ЛГУ, Сер. мат. наук, No. 16 (1949), 20–31.
14. A. Hurwitz, *Über die Anzahl der Klassen binärer quadratischer Formen von negativer Determinante,* Acta Math. **19** (1895), 351–384.
15. M.-N. Le, *Upper bound for class numbers of real quadratic fields,* Acta Arithm. **68** (1994), 141–144.
16. N. C. Ankeny, E. Artin, S. Chowla, *The class numbers of real quadratic fields,* Proc. Nat. Acad. Sci. USA **37** (1951), 524–525.
17. N. C. Ankeny, E. Artin, S. Chowla, *The class numbers of real quadratic number fields,* Ann. Math. **56** (1952), 479–493.
18. А. А. Киселев, И. Ш. Славутский, *О числе классов идеалов квадратичного поля и его колец,* Докл. СССР **126** (1959), 1191–1194.
19. И. Ш. Славутский, *Обобщенное сравнение Вороного и число классов мнимого квадратичного поля. II,* Известия ВУЗ'ов. Математика, No. 4(53) (1966), 118–126.
20. M. Lerch, *Zur Theorie des Fermatschen Quotienten* $(a^{p-1}-1)/p = q(a)$, Math. Ann. **60** (1905), 471–490.
21. H. Hasse, *Review of paper [2],* Zbl.43.40.
22. I. Sh. Slavutskii, *On the generalized Bernoulli numbers that belong to unequal characters,* Rev. Mat. Iberoamericana **16**, No. 3 (2000), 459–475.
23. L. J. Mordell, *On a Pellian equation conjecture. II,* J. London Math. Soc. **36** (1961), 282–288.
24. И. Ш. Славутский, *О числе классов вещественного квадратичного поля,* Известия ВУЗ'ов. Математика No. 4(17) (1960), 173–177.
25. A. L. Carlltz, *The class numbers of an imaginary quadratic number fields,* Comm. Math. Helv. **27** (1953), 338–345.

26. И. Ш. Славутский, *Оценка сверху и арифметическое вычисление числа классов идеалов вещественных квадратичных полей,* Известия ВУЗ'ов. Математика No. 2(45) (1965), 161–165.
27. И. Ш. Славутский, *Некоторые сравнения для числа классов вещественного квадратичного поля с простым дискриминантом,* Учен. зап. Ленингр. Гос. Педагог. ин-та им. А. И. Герцена **218** (1961), 179–189.
28. R. Hashimoto, *Ankeny–Artin–Chowla conjecture and continued fraction expansion,* J. Number Theory **90**, No. 1 (2001), 143–154.
29. L. C. Washington, *Introduction to cyclotomic fields,* 2th ed., Springer, Berlin, 1997.
30. A. J. van der Poorten, H. J. J. te Riele, H. C. Williams, *Computer verification of the Ankeny–Artin–Chowla conjecture for all primes less than* 10^{11}, Math. Comp. **70**, No. 235 (2001), 1311–1318.
31. L. J. Mordell, *Recent work in number theory,* Scripta Math. **25** (1960), 93–103.
32. I. Sh. Slavutskii, *Leudesdorf's theorem and Bernoulli numbers,* Arch. Math. (Brno) **35** (1999), 299–303.
33. T. Agoh, T. Shoji, *Quadratic equations over finite fields and class numbers of real quadratic fields,* Monatsh. Math. **125**, No. 4 (1998), 279–292.
34. L. Carlitz, *Note on the class number of real quadratic fields,* Proc. Amer. Math. Soc. **4** (1953), 535–537.
35. И. Ш. Славутский, *Бесквадратные числа и квадратичное поле,* Colloq. Math. **32** (1975), 291–300.
36. И. Ш. Славутский, *О числе классов дивизоров вещественного квадратичного поля. II,* В кн: Современная алгебра. Межвузовский сб. научн. работ, Ленинград, 1980, 124–128.
37. A. Brumer, *Travaux récent d'Iwasawa et de Leopoldt,* Séminaire Bourbaki, 19e année (1966/67) **325** (1968), 1–14.
38. И. Ш. Славутский, *L-функции локального поля и вещественное квадратичное поле,* Известия ВУЗ'ов. Математика No. 2(81) (1969), 99–105.
39. N. Nakagoshi, *On the unramified extension of the prime cyclotomic number field and its quadratic extension,* Nagoya Math. J. **115** (1989), 151–164.
40. M. Sheingorn, *Hyperbolic reflections of Pell's equation,* J. Number Theory **33**, No. 3 (1989), 267–285.
41. M. Sheingorn, *The* $\sqrt{p}$ *Riemann surface,* Acta Arithm. **63**, No. 3 (1993), 255–266.
42. L. C. Washington, *p-adic L-functions and sums of powers,* J. Number Theory **69**, No. 1 (1998), 50–61.
43. I. Sh. Slavutskii, *Partial sums of the harmonic series, p-adic L-functions and Bernoulli numbers,* Tatra Mt. Math. Publ. **20** (2000), 11–17.

Center for Absorption in Science
Israel
Email: nick1@bezeqint.net

Поступило 23 ноября 2001 г.