Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 286, 2002 г.

О. М. Фоменко

О ДЗЕТА-ФУНКЦИИ ЭПШТЕЙНА

§1. Введение; результаты

Пусть $Q(x_1, \dots, x_k)$ – положительная квадратичная форма от $k \geqslant 2$ переменных с целыми коэффициентами; $s = \sigma + it$. Для $\sigma > \frac{1}{2}k$ дзета-функция Эпштейна определена рядом

$$\zeta(s; Q) = \sum_{x_1, \dots, x_k = -\infty}^{\infty} Q(x_1, \dots, x_k)^{-s},$$

где суммирование идет по всем целым точкам $(x_1, \dots, x_k) \neq (0, \dots, 0)$. Дзета-функция $\zeta(s; Q)$ имеет аналитическое продолжение на всю s-плоскость с единственной особенностью – простым полюсом в точке $s = k/2$. Для нее справедливо функциональное уравнение риманова типа $\ll s \to \frac{k}{2} - s \gg$. Полоса $0 \leqslant \sigma \leqslant k/2$ является для $\zeta(s; Q)$ критической. В [1] исследовался рост $\zeta(s; Q)$ на прямой $s = \frac{k}{2} - \frac{1}{2} + it$, $|t| \to \infty$. Как показано в [1], в случае $k \geqslant 4$ эта задача сводится к задаче о росте L-рядов Дирихле $L(s, \chi)$ на центральной прямой $s = \frac{1}{2} + it$. В результате получаем оценку

$$\zeta\Big(\frac{k}{2} - \frac{1}{2} + it; Q\Big) \ll T^{\alpha + \varepsilon},$$

где здесь и ниже $T = |t| + C$, $C > 0$ – некоторое постоянное число, $\varepsilon > 0$ – сколь угодно малое постоянное число, $\alpha = 9/56$ для четного $k \geqslant 4$, $\alpha = 1/6$ для нечетного $k \geqslant 5$. Показатель $9/56$, связанный с известной оценкой Бомбьери и Иванца [2] в классической гипотезе Линделёфа, можно несколько уменьшить (см. уточнение оценки Бомбьери и Иванца в работах Хаксли и других авторов). В случае положительной бинарной квадратичной формы Q с целыми коэффициентами ситуация сходная, а именно,

---

Работа выполнена частично при финансовой поддержке РФФИ (грант No. 02-01-00087)

справедливо неравенство

$$\zeta\Big(\frac{1}{2}+it;Q\Big) \ll \Big|G\Big(\frac{1}{2}+it\Big)\Big| + \sum_f \Big|L\Big(\frac{1}{2}+it,f\Big)\Big|.$$

Здесь

$$G(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{R(n)}{n^s},$$

где $R(n)$ – число представлений n родом формы Q, $\{L(s,f)\}$ – конечный набор L-функций собственных форм Гекке f веса 1. Можно показать, что $G(s)$ выражается в виде конечной линейной комбинации произведений вида

$$\varphi(s)L(s,\chi_1)L(s,\chi_2),$$

где $\varphi(s)$ – несущественный множитель. Такой подход приводит к передоказательству (для случая форм с целыми коэффициентами) наилучшей на настоящий момент оценки Титчмарша [3] порядка роста дзета-функции Эпштейна положительной бинарной квадратичной формы Q с вещественными коэффициентами на критической прямой:

$$\zeta\Big(\frac{1}{2}+it;Q\Big) \ll T^{\frac{1}{3}+\varepsilon}.$$

Отметим, что в работе [3] Титчмарш впервые применил двумерный аналог метода ван дер Корпута.

Для тернарной квадратичной формы Q с целыми коэффициентами аналогичная связь $\zeta(s;Q)$ с какими-либо каноническими L-функциями неизвестна. В [1] для $Q(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_2^2+x_3^2$ была получена оценка

$$\zeta(1+it;Q) \ll T^{5/12}\log^3 T. \qquad (1)$$

Её доказательство легко следует из известного неравенства ван дер Корпута (теорема 5.11 книги [4], см. также ниже лемму 5).

В настоящей работе мы применим к задаче (1) метод оценки эспоненциальных сумм, использованный в проблеме шара (см. [5–7]). При этом в работе [7] подход [5, 6] был значительно упрощен.

Цель настоящей работы – существенно улучшить оценку (1).

Теорема. *Пусть $Q(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_2^2+x_3^2$. Тогда*

$$\zeta(1+it;Q) \ll T^{1/4+\varepsilon}.$$

§2. Экспоненциальные суммы по целым точкам в сферах

Пусть $r_3(n)$ – число представлений n суммой трех квадратов целых чисел. Нам потребуются нетривиальные оценки для экспоненциальных сумм типа $(R > 1)$

$$V_N(R) = \sum_{n \asymp N} r_3(n) e(R \log n),$$

где $e(z) = e^{2\pi i z}$, $n \asymp N$ означает $c_1 N < n < c_2 N$ с некоторыми положительными константами c_1, c_2 (которые не обязательно одни и те же в каждом конкретном случае).

Лемма 1. *Для* $1 < N \ll R^2$ *имеет место следующее неравенство*

$$V_N(R) \ll N^{5/4+\varepsilon} + N^{\varepsilon} \cdot \min\Big\{R^{3/8} N^{3/4} + R^{1/8} N,\ R^{7/24} N^{7/8} + R^{5/24} N\Big\}.$$

Доказательство. Сначала выведем, что

$$\begin{aligned} V_N(R) &\ll \Big| \sum_{a,b,c} \Big(R \log(a^2 + b^2 + c^2)\Big)\Big| \ll \\ &\ll N^{\varepsilon} \sum_{n \asymp N} \Big| \sum_{c \ll \sqrt{N}} e(\theta c) e\Big(R \log(n + c^2)\Big)\Big| \end{aligned} \tag{2}$$

для некоторого $\theta \in \mathbb{R}$.

Для доказательства (2) мы выберем наименьшую переменную, скажем c, и используем следующую лемму 2 ([8, лемма 7.3]).

Лемма 2. *Пусть* $M \leqslant N < N_1 \leqslant M_1$. *Пусть*

$$K(\theta) = \min\Big\{M_1 - M + 1,\ (\pi|\theta|)^{-1}, (\pi\theta)^{-2}\Big\}.$$

Тогда

$$\Big| \sum_{N < n \leqslant N_1} a_n \Big| \leqslant \int_{-\infty}^{\infty} K(\theta) \Big| \sum_{M < m \leqslant M_1} a_m e(m\theta) \Big| \, d\theta.$$

Кроме того, L_1*-норма функции* $K(\theta)$ *удовлетворяет неравенству*

$$\int_{-\infty}^{\infty} K(\theta) \, d\theta \ll \log(M_1 - M + 2).$$

Эту лемму применяем к сумме по c, а из переменных a, b образуем новую переменную $n = a^2 + b^2$.

Отметим, что доказательство (2) можно получить непосредственными рассуждениями (без применения леммы 2).

Далее разбиваем интервал внутреннего суммирования на отрезки длины $N^{1/2-\varepsilon}$ и применяем неравенство Коши, тогда

$$V_N^2(R) \ll N^{1+\varepsilon} \sum_{c_1,c_2} \left| \sum_{n \asymp N} e\Big(R\big(\log(n + c_1^2) - \log(n + c_2^2)\big)\Big) \right|,$$

где c_1, c_2 берутся с ограничениями c_1, $c_2 < N^{1/2}$ и $|c_1 - c_2| < N^{1/2-\varepsilon}$. Следовательно, при подходящем $D < N^{1-\varepsilon}$ мы получаем

$$V_N^2(R) \ll N^{5/2+\varepsilon} + N^{1+\varepsilon} \sum_{y \asymp D} \left| \sum_{x \asymp N} e(f(x,y)) \right|,$$

где

$$f(x,y) = R\big(\log x - \log(x+y)\big).$$

Нам потребуется теорема Кузьмина–Ландау [8, теорема 2.1], которую мы приведем в следующей лемме.

Лемма 3. *Пусть* $I = (a,b]$, *где* a, b *– целые числа,*

$$\|x\| = \min_{n \in \mathbb{Z}} |x - n|;$$

f *непрерывно дифференцируема,* f' *монотонна и* $\|f'\| \geqslant \lambda > 0$ *на* I. *Тогда*

$$\sum_{n \in I} e(f(n)) \ll \lambda^{-1}.$$

Если $DR \ll N^2$, то, по лемме 3, внутренняя сумма удовлетворяет неравенству

$$\sum_{x \asymp N} e(f(x,y)) \ll N^2 D^{-1} R^{-1},$$

поэтому

$$N^{1+\varepsilon} \sum_{y \asymp D} \left| \sum_{x \asymp N} e(f(x,y)) \right| \ll N^{3+\varepsilon} R^{-1}.$$

Следовательно, в пределах

$$\sqrt{DR} \ll N \ll R^2$$

справедлива оценка

$$V_N^2(R) \ll N^{5/2+\varepsilon}. \tag{3}$$

Остается исследовать случай

$$N \ll \sqrt{DR}.$$

Нам потребуется следующая известная лемма ([8, лемма 3.6]; B-процесс одномерного метода ван дер Корпута). Напомним, что $f \approx g$ означает выполнение обоих неравенств $f \ll g$ и $g \ll f$.

Лемма 4. *Пусть f – вещественная функция на $[a,b]$, которая имеет непрерывные производные до четвертого порядка включительно, и пусть $f'' < 0$ на этом интервале. Пусть далее $[a,b] \subseteq [N,2N]$ и $\alpha = f'(b)$, $\beta = f'(a)$. Пусть существует некоторое $F > 0$ такое, что $f^{(2)}(x) \approx FN^{-2}$, $f^{(3)}(x) \ll FN^{-3}$ и $f^{(4)}(x) \ll FN^{-4}$ для $x \in [a,b]$. Пусть x_ν определено соотношением $f'(x_\nu) = \nu$ и пусть $\phi(\nu) = -f(x_\nu) + \nu x_\nu$. Тогда*

$$\sum_{n\in(a,b]} e(f(n)) = \sum_{\alpha\leqslant\nu\leqslant\beta} \frac{e(-\phi(\nu)-1/8)}{|f''(x_\nu)|^{1/2}} + O\Big(\log(FN^{-1}+2)+F^{-1/2}N\Big).$$

Если $N \ll \sqrt{DR}$, мы применим лемму 4 с $F = RDN^{-1}$. В результате получаем неравенство

$$\begin{aligned} V_N^2(R) \ll{}& N^{5/2+\varepsilon} + R^{-1/2}D^{1/2}N^{5/2+\varepsilon} + \\ &+ R^{-1/2}D^{-1/2}N^{5/2+\varepsilon} \sum_{y\asymp D} \Bigg|\sum_{x\asymp U} e(g(x,y))\Bigg|, \end{aligned} \tag{4}$$

где $U = RDN^{-2}$,

$$g(x,y) = f(\alpha(x,y),y) - x\alpha(x,y) \tag{5}$$

и $\alpha(x,y)$ есть неявная функция, определенная соотношением

$$f_x\big(\alpha(x,y),y\big) = x. \tag{6}$$

Средний член в (4) возникает из остаточного члена в лемме 4.

Далее используем неравенство Коши и деление на диадические интервалы. Можно показать, что существует $1 \leqslant T < U$ такое, что

$$V_N^4(R) \ll N^{5+\varepsilon} + R^{-1}DN^{5+\varepsilon} + R^{-1}N^{5+\varepsilon}V_{UTD}, \tag{7}$$

где

$$V_{UTD} \ll \sum_{x \asymp U} \sum_{z \asymp T} \left| \sum_{y \asymp D} e(G(x,y,z)) \right|$$

с

$$G(x,y,z) = g(x+z,y) - g(x,y).$$

Далее нам потребуются хорошо известные неравенства ван дер Корпута ([8, теорема 2.2; 4, теорема 5.11]) которые мы приведем в следующей лемме.

Лемма 5. 1) *Пусть $f(x)$ – вещественная функция на интервале $I=(a,b]$ с непрерывными производными до второго порядка включительно и $b-a \geqslant 1$. Пусть на этом интервале $0 < \lambda_2 \leqslant f''(x) \leqslant h\lambda_2$ (или $0 < \lambda_2 \leqslant -f''(x) \leqslant h\lambda_2$). Тогда*

$$\sum_{n \in I} e(f(n)) \ll h(b-a)\lambda_2^{1/2} + \lambda_2^{-1/2}.$$

2) *Пусть $f(x)$ – вещественная функция на интервале $I=(a,b]$ с непрерывными производными до третьего порядка включительно и $b-a \geqslant 1$. Пусть на этом интервале $0 < \lambda_3 \leqslant f'''(x) \leqslant h\lambda_3$ (или $0 < \lambda_3 \leqslant -f'''(x) \leqslant h\lambda_3$). Тогда*

$$\sum_{n \in I} e(f(n)) \ll h^{1/2}(b-a)\lambda_3^{1/6} + (b-a)^{1/2}\lambda_3^{-1/6}.$$

Применяя неравенства леммы 5, получаем

$$V_{UTD} \ll UT \min\left\{ D\lambda_2^{1/2} + \lambda_2^{-1/2}, D\lambda_3^{1/6} + D^{1/2}\lambda_3^{-1/6} \right\}, \tag{8}$$

где $\lambda_2 \asymp |G_{yy}|$ и $\lambda_3 \asymp |G_{yyy}|$. По теореме о среднем значении

$$\lambda_2 \asymp T|g_{xyy}| \quad \text{и} \quad \lambda_3 \asymp T|g_{xyyy}|.$$

С другой стороны, по (5) и (6), имеем $g_x = -\alpha$, следовательно,

$$\lambda_2 \asymp T|\alpha_{yy}| \quad \text{и} \quad \lambda_3 \asymp T|\alpha_{yyy}|.$$

Остается оценить частные производные α_{yy} и α_{yyy}. По определению функции f и (6), имеем

$$\alpha^{-1} - (\alpha+y)^{-1} = xR^{-1}.$$

Дифференцируя по y, получаем

$$-\frac{1}{\alpha^2}\alpha_y + \frac{1}{(\alpha+y)^2}(\alpha_y+1) = 0,$$

откуда

$$\frac{1}{\alpha_y} = \left(1+\frac{y}{\alpha}\right)^2 - 1 = (1+h)^2 - 1 = h(2+h), \tag{9}$$

где

$$h = \frac{y}{\alpha} \asymp \frac{D}{N} \ll N^{-\varepsilon},$$

поскольку

$$y \asymp D, \quad \alpha \asymp N, \quad D < N^{1-\varepsilon}.$$

Следовательно,

$$\alpha_y \asymp ND^{-1}.$$

Дифференцируя формулу (9), получаем

$$-\frac{\alpha_{yy}}{\alpha_y^2} = 2\left(1+\frac{y}{\alpha}\right)\left(\frac{\alpha - y\alpha_y}{\alpha^2}\right), \tag{10}$$

откуда

$$-\alpha_{yy} = 2\alpha_y^2(1+h)\frac{1}{\alpha}(1-h\alpha_y) = 2\alpha_y^2\frac{1}{\alpha}(1+h)\frac{h+1}{h+2} \asymp \alpha_y^2 \cdot \frac{1}{\alpha}.$$

Следовательно,

$$|\alpha_{yy}| \asymp ND^{-2}.$$

Дифференцируя формулу (10), после некоторых вычислений получаем

$$-\frac{\alpha_{yyy}}{\alpha_y^2} + 2\frac{\alpha_{yy}^2}{\alpha_y^3} = 2\frac{1}{\alpha^2}\left(\frac{h+1}{h+2}\right)^2\left\{\frac{h^2-2h-6}{h(h+2)}\right\},$$

откуда следует

$$\alpha_{yyy} = 2\frac{\alpha_y^2}{\alpha^2 h}\left(\frac{h+1}{h+2}\right)^2\left(\frac{3h^2+10h+10}{h+2}\right) \asymp \frac{\alpha_y^2}{\alpha^2 h} \asymp ND^{-3}.$$

Из полученны выше оценок для частных производных мы заключаем теперь, что

$$\lambda_2 \asymp TND^{-2}, \qquad \lambda_3 \asymp TND^{-3}.$$

Подставляем полученное в (7) и (8). Учитывая соотношения

$$U = RDN^{-2}, \quad T < U, \qquad N^2R^{-1} \ll D < N,$$

имеем (после некоторых вычислений)

$$V_N^4(R) \ll N^{5+\varepsilon} + N^{\varepsilon} \cdot \min\Big\{R^{3/2}N^3 + R^{1/2}N^4,\, R^{7/6}N^{7/2} + R^{5/6}N^4\Big\}.$$

Соединяя эту оценку с (3), получаем доказательство леммы 1.

§3. Доказательство теоремы

Имеем

$$\zeta(s;Q) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r_3(n)}{n^s} \quad \left(\sigma > \frac{3}{2}\right).$$

Исходя из результатов работы [9], получаем приближенное функциональное уравнение для $\zeta(s;Q)$.

Лемма 6. *Для* $\frac{1}{4} \leqslant \sigma \leqslant H$*, где* H *– любая константа,* $|t| > C > 0$ *и* x*,* y *взяты с условиями*

$$x \asymp y \asymp |t|, \quad xy = |t|^2,$$

имеем

$$\zeta(s;Q) = \sum_{n \leqslant x/\pi} \frac{r_3(n)}{n^s} + \pi^{2s-3/2} \frac{\Gamma\left(\frac{3}{2} - s\right)}{\Gamma(s)} \cdot$$
$$\cdot \sum_{n \leqslant y/\pi} \frac{r_3(n)}{n^{3/2-s}} + O\big(x^{1-\sigma} \log x\big).$$

Из этой леммы следует соотношение

$$\zeta(1+it;Q) = \sum_{n \leqslant \frac{|t|}{\pi}} \frac{r_3(n)}{n^{1+it}} + \pi^{1/2+2it} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2} - it\right)}{\Gamma(1+it)} \sum_{n \leqslant \frac{|t|}{\pi}} \frac{r_3(n)}{n^{1/2-it}} +$$
$$+ O(\log|t|) = S_1 + \pi^{1/2+2it} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2} - it\right)}{\Gamma(1+it)} \cdot S_2 + O(\log|t|).$$

Рассмотрим сумму S_1 с $t < 0$; сумма S_1 с $t > 0$ и сумма S_2 (с $t \geqslant 0$) изучаются аналогично.

Разобьем сумму S_1 на две:

$$S_1 = \sum_{1 \leqslant n \leqslant \sqrt{|t|}} \frac{r_3(n)}{n^{1+it}} + \sum_{\sqrt{|t|} < n \leqslant \frac{|t|}{\pi}} \frac{r_3(n)}{n^{1+it}} = S_1^{(I)} + S_1^{(II)}.$$

$S_1^{(I)}$ оцениваем тривиально:

$$S_1^{(I)} \ll |t|^{1/4+\varepsilon} \quad (|t| > C > 0).$$

$S_1^{(II)}$ оцениваем с помошью леммы 1; полагая $-t = R$, имеем

$$S_1^{(II)} \ll R^{\varepsilon} \sup_{\sqrt{R} \ll N \ll R} \Big(N^{-1} |V_N(R)| \Big).$$

В промежутке $\sqrt{R} \ll N \ll R$ справедливо неравенство

$$N^{-1} V_N(R) \ll$$
$$\ll N^{1/4+\varepsilon} + N^{\varepsilon} \min \Big(R^{3/8} N^{-1/4} + R^{1/8},\, R^{7/24} N^{-1/8} + R^{5/24} \Big),$$

откуда

$$\sup_{\sqrt{R} \ll N \ll R} \Big(N^{-1} |V_N(R)| \Big) \ll R^{1/4+\varepsilon} + R^{1/4-1/48+\varepsilon}.$$

Итак, при $|t| > C > 0$ имеем

$$\zeta(1+it; Q) \ll |t|^{1/4+\varepsilon}.$$

Литература

1. О. М. Фоменко, *Порядок дзета-функции Эпштейна в критической полосе,* Зап. научн. семин. ПОМИ **263** (2000), 205–225.
2. E. Bombieri and H. Iwaniec, *On the order of* $\zeta(\frac{1}{2} + it)$, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci (4) **13** (1986), 449–472.
3. E. C. Titchmarsh, *On Epstein's zeta-function,* Proc. London Math. Soc. (2) **36** (1934), 485–500.
4. E. C. Titchmarsh, *The theory of the Riemann zeta-function.* Second edition, Oxford, (1986).
5. И. М. Виноградов, *К вопросу о числе целых точек в шаре,* Изв. АН СССР. Сер. мат. **27** (1963), 957–968.
6. Chen Jing-Run, *Improvement on the asymptotic formulas for the number of lattice points in a region of the three dimensions. II,* Sci. Sinica **12**, No. 6 (1963), 751–764.
7. F. Chamizo and H. Iwaniec, *On the sphere problem,* Revista Mathem. Iberoamericana **11**, No. 2 (1995), 417–429.

8. S. W. Graham and G. Kolesnik, *Van der Corput's method for exponential sums,* London Math. Soc. Lecture Notes **126**, Cambridge, 1991.
9. K. Chandrasekharan and R. Narasimhan, *The approximate functional equation for a class of zeta-functions,* Math. Ann. **152**, No. 1 (1963), 30–64.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН
E-mail:fomenko@pdmi.ras.ru

Поступило 6 мая 2002 г.