Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 286, 2002 г.

О. М. Фоменко

СИММЕТРИЧЕСКИЕ КВАДРАТЫ L-ФУНКЦИЙ ГЕККЕ И КОЭФФИЦИЕНТЫ ФУРЬЕ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ ФОРМ

§1

1.1. В настоящем параграфе исследуется поведение симметрических квадратов L-функций Гекке в центральной точке критической полосы в аспекте по уровню. В этом пункте содержатся вводные замечания и формулировка результатов.

Пусть $S_k(\Gamma_0(N),\chi)$ – пространство голоморфных $\Gamma_0(N)$-параболических форм целого веса k и характера $\chi\,(\operatorname{mod} N)$; при четном k и тривиальном характере $\chi_0\,(\operatorname{mod} N)$ будем обозначать $S_k(\Gamma_0(N),\chi_0)=S_k(\Gamma_0(N))$.

Пусть $f(z)\in S_k(\Gamma_0(N),\chi)$,

$$f(z)=\sum_{n=1}^{\infty}a_f(n)e^{2\pi iz},\qquad z\in H=\{z=x+iy:y>0\};$$

$$a_f(n)n^{-\frac{k-1}{2}}=b_f(n);$$

$$L_f(s)=\sum_{n=1}^{\infty}a_f(n)n^{-s};$$

$$L_f\Big(s+\frac{k-1}{2}\Big)=\sum_{n=1}^{\infty}b_f(n)n^{-s}=\mathcal{H}_f(s).$$

Свойства $L_f(s)$, как функции от s, хорошо известны и мы не будем их перечислять.

В настоящей работе $k\geqslant 2$ – постоянное чётное число, $N=p$ – достаточно большое простое число, $\chi=\chi_0$. Пусть $\mathcal{F}$ – базис Гекке–Аткина–Ленера пространства $S_k(\Gamma_0(N))$, состоящий из собственных форм Гекке; если $a_f(1)\neq 0$, то $a_f(1)=1$. Пусть $\mathcal{F}_0$ – множество всех новых форм пространства $S_k(\Gamma_0(N))$. Как показал Делинь, $|b_f(n)|\leqslant d(n)$, $f\in\mathcal{F}_0$; здесь $d(n)$ – количество натуральных делителей n. Отметим, что, в силу сделанных предположений, $b_f(n)$ – вещественное число. На пространстве $S_k(\Gamma_0(N))$

вводится метрика Петерсона $\langle f,g\rangle$; пусть

$$\omega_f = \frac{\Gamma(k-1)a_f(1)}{(4\pi)^{k-1}\langle f,f\rangle}.$$

Обозначим через $\zeta^{(N)}(s)$ дзета-функцию Римана без локальных факторов для простых $p|N$.

Пусть $f(z) \in \mathcal{F}_0$ и $\mathcal{H}_2(s,f)$ – симметрический квадрат L-функции Гекке $\mathcal{H}_f(s)$ (см. [1]). Это означает, что по эйлеровскому произведению

$$\mathcal{H}_f(s) = \prod_p \bigl(1-\alpha_f(p)p^{-s}\bigr)^{-1}\bigl(1-\beta_f(p)p^{-s}\bigr)^{-1}$$

мы строим новое эйлеровское произведение

$$\mathcal{H}_2(s,f) = \prod_p \bigl(1-\alpha_f^2(p)p^{-s}\bigr)^{-1}\bigl(1-\alpha_f(p)\beta_f(p)p^{-s}\bigr)^{-1}\bigl(1-\beta_f^2(p)p^{-s}\bigr)^{-1}.$$

Легко показать, что

$$\mathcal{H}_2(s,f) = \zeta^{(N)}(2s)\sum_{n\geqslant 1} b_f(n^2)n^{-s}.$$

Функция

$$N^s\pi^{-3s/2}\Gamma\Bigl(\frac{s+1}{2}\Bigr)\Gamma\Bigl(\frac{s+k-1}{2}\Bigr)\Gamma\Bigl(\frac{s+k}{2}\Bigr)\mathcal{H}_2(s,f)$$

является целой и удовлетворяет функциональному уравнению риманова типа $\ll s \to 1-s \gg$. Симметрический квадрат тесно связан со сверткой Ранкина–Сельберга:

$$\zeta^{(N)}(s)\mathcal{H}_2(s,f) = \zeta^{(N)}(2s)\sum_{n=1}^{\infty} b_f(n)^2 n^{-s}.$$

Цель настоящего параграфа – доказательство следующей теоремы.

Теорема 1. *Пусть $\mathcal{F}_0$ – множество новых форм пространства $S_k(\Gamma_0(N))$, где $k \geqslant 2$ – постоянное чётное число, $N = p$ – простое число. Тогда справедливо следующее соотношение:*

$$\sum_{f\in\mathcal{F}_0}\omega_f\mathcal{H}_2\Bigl(\frac{1}{2},f\Bigr) = \log N + O(\log\log N). \tag{1}$$

Имеет место неравенство

$$\omega_f \ll \frac{\log N}{N} \quad (f \in \mathcal{F}_0), \tag{2}$$

где $\ll$-константа зависит лишь от k Неравенство (2) следует из отсутствия зигелевского нуля у симметрического квадрата $\mathcal{H}_2(s,f)$ (см. [2]), поскольку

$$\omega_f = \frac{2\pi^2}{(k-1)N\mathcal{H}_2(1,f)}.$$

В работе Иванца и Мишеля [3] доказано, что

$$\sum_{f\in\mathcal{F}_0} \left|\mathcal{H}_2\Big(\frac{1}{2},f\Big)\right|^2 \ll N^{1+\varepsilon}, \tag{3}$$

где $\ll$-константа зависит только от ε и k.

Соединяя (1), (2) и (3) с помощью неравенства Коши, получаем следующий результат.

Теорема 2. *В предположениях теоремы* 1 *имеем*

$$\sum_{f\in\mathcal{F}_0,\mathcal{H}_2(1/2,f)\neq 0} 1 \gg N^{1-\varepsilon},$$

где $\ll$-константа зависит только от ε и k.

1.2. В этом пункте мы доказывает теорему 1. Доказательство, ради простоты, будем вести для $k=2$. Известно, что в случае пространства $S_2(\Gamma_0(p))$ имеем $\mathcal{F}=\mathcal{F}_0$. Для простоты пишем

$$\sum_{f\in\mathcal{F}} = \sum_f .$$

Рассмотрим функциональное уравнение L-функции $\mathcal{H}_2(s,f)$:

$$\Delta_f\Big(\frac{1}{2}+t\Big) = \Delta_f\Big(\frac{1}{2}-t\Big),$$

где

$$\Delta_f\Big(\frac{1}{2}+t\Big) = \Big(\frac{N}{\pi^{3/2}}\Big)^t \Gamma\Big(\frac{3}{4}+\frac{t}{2}\Big)^2 \Gamma\Big(\frac{5}{4}+\frac{t}{2}\Big)\mathcal{H}_2\Big(\frac{1}{2}+t,f\Big).$$

Выразим $\mathcal{H}_2\Big(\frac{1}{2}, f\Big)$ в виде быстро сходящегося ряда. Имеем (подробности см. в [4])

$$\Gamma\Big(\frac{3}{4}\Big)^2\Gamma\Big(\frac{5}{4}\Big)\mathcal{H}_2\Big(\frac{1}{2}, f\Big) = \Big(1 - \frac{1}{N}\Big)\cdot 2\sum_{1\leqslant l,n<\infty}\frac{b_f(l^2)}{l^{1/2}n}G_0\Big(\frac{\pi^{3/2}ln^2}{N}\Big), \quad (4)$$

где

$$G_0(Y) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\mathrm{Re}\, t=3/4}\Gamma\Big(\frac{3}{4}+\frac{t}{2}\Big)^2\Gamma\Big(\frac{5}{4}+\frac{t}{2}\Big)Y^{-t}\frac{dt}{t}.$$

Оценим сначала $G_0(Y)$ при $Y > 1$ (ср. [5]). Несложные вычисления показывают, что

$$G_0(Y) \ll Y^{5/2}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\Big|\Gamma\big(Y^{1/3}+i\tau\big)\Big|^3\Big|Y^{-2Y^{1/3}-2i\tau}\Big|\frac{d\tau}{|Y^{1/3}+i\tau|}.$$

По формуле Стирлинга,

$$\Big|\Gamma\big(Y^{1/3}+i\tau\big)\Big|^3 \ll \big(Y^{1/3}+|\tau|\big)^{3/2}\cdot$$
$$\cdot\exp\Big(3Y^{1/3}\log\big(Y^{1/3}+|\tau|\big) - 3|\tau|\mathrm{arctg}\,\frac{|\tau|}{Y^{1/3}} - 3Y^{1/3}\Big).$$

Теперь имеем

$$G_0(Y) \ll Y^{5/2}Y^{-Y^{1/3}}e^{-3Y^{1/3}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\big(Y^{1/6}+|\tau|^{1/2}\big)\cdot$$
$$\cdot\exp\Big(3Y^{1/3}\log\Big(1+\frac{|\tau|}{Y^{1/3}}\Big) - 3|\tau|\mathrm{arctg}\,\frac{|\tau|}{Y^{1/3}}\Big)d\tau.$$

Разобьем интеграл на два в соответствии с $|\tau| < bY^{1/3}$ и $|\tau| > bY^{1/3}$, где b выбирается между $\mathrm{tg}\,1 \sim 1.557$ и $e-1 \sim 1.718$. Первый интеграл мажорируется величиной

$$Y^{3/6}e^{3Y^{1/3}\log(1+b)} \ll e^{3Y^{1/3}-cY^{1/3}}$$

для некоторого $c > 0$, ибо

$$\log(1+b) < 1.$$

Используя неравенство $\log(1+x) < x$, получаем, что второй интеграл мажорируется величиной

$$\int\limits_{|\tau|>bY^{1/3}} |\tau|^{1/2} e^{3|\tau|(1-\operatorname{arctg} b)} d\tau.$$

Так как $\operatorname{arctg} b > 1$, этот интеграл ограничен. Собирая полученные оценки, получаем при $Y > 1$

$$G_0(Y) \ll e^{-Y^{1/3}}. \tag{5}$$

Легко показать, что при $0 < Y < c$

$$G_0(Y) = \Gamma\Big(\frac{3}{4}\Big)^2 \Gamma\Big(\frac{5}{4}\Big) + \varphi_1(Y), \tag{6}$$

где

$$\varphi_1(Y) \ll Y^{3/2}\big(|\log Y| + 1\big).$$

Переходим к нахождению асимптотики суммы

$$\sum_f \omega_f \mathcal{H}_2\Big(\frac{1}{2}, f\Big).$$

Введем обозначение $\sum\limits_f \omega_f b_f(l^2) = \Omega(l^2)$. По (4), имеем

$$\Gamma\Big(\frac{3}{4}\Big)^2 \Gamma\Big(\frac{5}{4}\Big) \sum_f \omega_f \mathcal{H}_2\Big(\frac{1}{2}, f\Big) =$$

$$= \Big(1 - \frac{1}{N}\Big) \cdot 2 \sum_{1 \leqslant l,n < \infty} \frac{\Omega(l^2)}{l^{1/2} n} G_0\Big(\frac{\pi^{3/2} l n^2}{N}\Big) = \Big(1 - \frac{1}{N}\Big) \cdot 2 \sum\nolimits_0 .$$

Из хорошо известной формулы Петерсона, выражающей билинейную форму от коэффициентов Фурье параболических форм через сумму сумм Клостермана, следует, что

$$\Big|\frac{\Omega(l^2)}{l^{1/2}} - \delta_{l^2 1}\Big| \ll N^{-3/2} l^{1/2}. \tag{7}$$

Разобьем сумму $\sum_0$ на подсуммы:

$$\sum\nolimits_0 = \sum_{ln^2 \leqslant N} \frac{\Omega(l^2)}{l^{1/2} n} G_0\Big(\frac{\pi^{3/2} l n^2}{N}\Big) + \sum_{ln^2 > N} \frac{\Omega(l^2)}{l^{1/2} n} G_0\Big(\frac{\pi^{3/2} l n^2}{N}\Big) =$$

$$= \sum\nolimits_1 + \sum\nolimits_2 .$$

Рассмотрим сначала сумму $\sum_2$. Разобьем сумму $\sum_2$ следующим образом:

$$\sum\nolimits_2 = \sum_{\substack{l=1\\ n^2>N}} \dots + \sum_{\substack{l\geqslant 2\\ ln^2>N}} \dots = \sum\nolimits_{21} + \sum\nolimits_{22}.$$

Используя (5) и (7), имеем

$$\sum\nolimits_{21} = \sum_{n^2>N} \frac{\Omega(1)}{n} G_0\Big(\frac{\pi^{3/2}n^2}{N}\Big) \ll \sum_{n>\sqrt{N}} \frac{1}{n} e^{-(\pi^{3/2}n^2/N)^{1/3}} \ll 1.$$

Переходим к сумме $\sum_{22}$. Введем функцию (α – натуральное)

$$r^*(\alpha) = \sum_{\alpha=ln^2} \frac{1}{n^2}.$$

Очевидно, $r^*(\alpha) \ll 1$. По (5) и (7), имеем

$$\begin{aligned}\sum\nolimits_{22} &\ll \sum_{\substack{ln^2>N\\ l\geqslant 2}} \frac{N^{-3/2}l^{1/2}\cdot n}{n^2} e^{-(\pi^{3/2}ln^2/N)^{1/3}} \ll \\ &\ll \sum_{\alpha>N} N^{-3/2} r^*(\alpha)\sqrt{\alpha} e^{-(\pi^{3/2}\alpha/N)^{1/3}} \ll \\ &\ll \sum_{\alpha>N} N^{-1}\sqrt{\frac{\alpha}{N}} e^{-(\pi^{3/2}\alpha/N)^{1/3}} \ll 1.\end{aligned}$$

Рассмотрим теперь сумму $\sum_1$. Применяя (6), имеем

$$\begin{aligned}\sum\nolimits_1 &= \Gamma\Big(\frac{3}{4}\Big)^2\Gamma\Big(\frac{5}{4}\Big) \sum_{ln^2\leqslant N} \frac{\Omega(l^2)}{l^{1/2}n} + \sum_{ln^2\leqslant N} \frac{\Omega(l^2)}{l^{1/2}n}\varphi_1\Big(\frac{\pi^{3/2}ln^2}{N}\Big) = \\ &= \Gamma\Big(\frac{3}{4}\Big)^2\Gamma\Big(\frac{5}{4}\Big)\sum\nolimits_{11} + \sum\nolimits_{12}.\end{aligned}$$

Рассмотрим сумму $\sum_{11}$. Имеем

$$\sum\nolimits_{11} = \sum_{\substack{l=1\\ n^2\leqslant N}} \frac{\Omega(1)}{n} + \sum_{\substack{ln^2\leqslant N\\ l\geqslant 2}} \frac{\Omega(l^2)}{l^{1/2}n} = \sum\nolimits_{111} + \sum\nolimits_{112}.$$

Легко видеть, что

$$\sum\nolimits_{111}=\frac{1}{2}\log N+O(1).$$

Сумму $\sum_{112}$ разобьем на две:

$$\sum\nolimits_{112}=\sum_{\substack{l\geqslant 2\\ 2\leqslant ln^2\leqslant N/(\log^{10}N)}}\cdots+\sum_{\substack{l\geqslant 2\\ N/(\log^{10}N)<ln^2\leqslant N}}\cdots=\sum\nolimits_{1121}+\sum\nolimits_{1122}.$$

Рассмотрим сумму $\sum_{1121}$, к которой применим (7):

$$\sum\nolimits_{1121}\ll\sum_{\substack{l\geqslant 2\\ 2\leqslant ln^2\leqslant N/(\log^{10}N)}}N^{-3/2}l^{1/2}n^{-1}\ll$$

$$\ll N^{-3/2}\Big(l^{3/2}\Big|_2^{N/(\log^{10}N)}\Big)\sum_{n\leqslant\sqrt{N}}\frac{1}{n}\ll\frac{1}{\log^{14}N}.$$

С помощью оценки (7) рассматривается и сумма $\sum_{1122}$:

$$\sum\nolimits_{1122}\ll\sum_{\substack{l\geqslant 2\\ N/(\log^{10}N)<ln^2\leqslant N}}N^{-3/2}l^{1/2}n^{-1}\ll$$

$$\ll N^{-3/2}\sum_{l\leqslant N}l^{1/2}\sum_{\sqrt{(N/l)/(\log^{10}N)}<n\leqslant\sqrt{N/l}}\frac{1}{n}\ll\log\log N.$$

Переходим к сумме $\sum_{12}$:

$$\sum\nolimits_{12}=\sum_{ln^2\leqslant N}\frac{\Omega(l^2)}{l^{1/2}n}\varphi_1\Big(\frac{\pi^{3/2}ln^2}{N}\Big)=$$

$$=\sum_{\substack{l=1\\ n^2\leqslant N}}\cdots+\sum_{\substack{l\geqslant 2\\ 2\leqslant ln^2\leqslant N}}\cdots=\sum\nolimits_{121}+\sum\nolimits_{122}.$$

Как и выше,

$$\sum\nolimits_{121}=\sum_{1\leqslant n^2\leqslant N/(\log^{10}N)}\frac{\Omega(1)}{n}\varphi_1\Big(\frac{\pi^{3/2}n^2}{N}\Big)+$$

$$+\sum_{N/(\log^{10}N)<n^2\leqslant N}\frac{\Omega(1)}{n}\varphi_1\Big(\frac{\pi^{3/2}n^2}{N}\Big)=\sum\nolimits_{1211}+\sum\nolimits_{1212}.$$

Обратимся к сумме $\sum_{1211}$. По (6), на рассматриваемом интервале $\varphi_1\Big(\frac{\pi^{3/2}n^2}{N}\Big)\ll\Big(\frac{1}{\log^{10}N}\Big)^{3/2}\log\log N$; следовательно,

$$\sum\nolimits_{1211}\ll\frac{\log\log N}{\log^{14}N}.$$

В сумме $\sum_{1212}$ применяем оценку

$$\varphi_1\Big(\frac{\pi^{3/2}n^2}{N}\Big)\ll 1;$$

имеем

$$\sum\nolimits_{1212}\ll\log\log N.$$

Наконец, сумма $\sum_{122}$ оценивается так же, как сумма $\sum_{112}$. Имеем

$$\sum\nolimits_{122}\ll\log\log N.$$

Теорема 1 доказана.

§2

2.1. Мы сохраняем обозначения и предположения §1. Напомним, что ε, ε' означают сколь угодно малые постоянные положительные числа, не всегда одни и те же.

В настоящем параграфе рассматриваются свойства коэффициентов Фурье параболических форм с малыми номерами, т.е. с номерами $n\ll N^{1+\varepsilon}$.

В этом пункте приводятся равномерные аналоги известных результатов о коэффициентах Фурье новых форм $f\in S_k(\Gamma_0(N))$.

Теорема 3. *Пусть f – новая форма пространства $S_k(\Gamma_0(N))$, где $k\geqslant 2$ – постоянное чётное число, $N=p$ – простое число. Тогда*

$$\sum_{n\leqslant X}b_f(n)\ll X^{1/3+\varepsilon}N^{1/3};\tag{8}$$

$$\sum_{n\leqslant X}b_f(n)^2=cX+O\big(X^{3/5}N^{2/5+\varepsilon}\big),\tag{9}$$

где

$$c \asymp \frac{\langle f, f\rangle}{N}.$$

При постоянном уровне N эти результаты хорошо известны. Они принадлежат, соответственно, А. З. Вальфишу [6] и Ранкину [7] – Сельбергу [8]. Равномерный результат (8) в частном случае был доказан в [9]. Общий случай доказывается так же. Доказательство соотношения (9) основано на комбинации метода Ранкина–Сельберга и метода Ландау–Вальфиша и здесь не приводится. Отметим, что

$$\frac{1}{\log N} \ll c \ll \log^3 N.$$

Оценка снизу уже формулировалась в (2), оценка сверху доказывается с помощью соображений выпуклости. Из (9) следует граница действия асимптотики: при $X \gg N^{1+\varepsilon'}$

$$\sum_{n \leqslant X} b_f(n)^2 \sim cX.$$

Отметим, что в [3] приводится элементарно получаемая оценка сверху

$$\sum_{n \leqslant X} b_f(n)^2 \ll \frac{\langle f, f\rangle}{N} X + \langle f, f\rangle, \tag{10}$$

где $\ll$-константа зависит только от k. Соотношения (9) и (10) дают лишь тривиальные результаты при $X < N$. В этой области лучше работает оценка ($\ll$-константа – абсолютная)

$$\sum_{n \leqslant X} b_f(n)^2 \ll X \log^3 X,$$

получаемая на основании оценки Делиня $|b_f(n)| \leqslant d(n)$. Приведенные выше результаты позволяют при $X \gg N^{1+\varepsilon'}$ получить оценку снизу

$$\frac{X}{(\log N)^2 (\log X)^7} \ll \sum_{n \leqslant X} \bigl|b_f(n)\bigr|.$$

Следовательно, при $X \gg N^{1+\varepsilon'}$ имеет место равномерное распределение положительных и отрицательных коэффициентов Фурье собственных форм Гекке:

$$\begin{gathered}\sum_{n\leqslant X}{}^{+} b_f(n) = \frac{1}{2}\sum_{n\leqslant X}\bigl|b_f(n)\bigr| + O\Bigl(X^{1/3+\varepsilon}N^{1/3}\Bigr),\\ \sum_{n\leqslant X}{}^{-} b_f(n) = -\frac{1}{2}\sum_{n\leqslant X}\bigl|b_f(n)\bigr| + O\Bigl(X^{1/3+\varepsilon}N^{1/3}\Bigr),\end{gathered} \tag{11}$$

где $\sum^{+}$ (соответственно, $\sum^{-}$) означает суммирование по n с $b_f(n) > 0$ (соответственно, с $b_f(n) < 0$).

2.2. Цель данного пункта – получить нетривиальную оценку снизу для суммы квадратов коэффициентов Фурье собственной формы Гекке на более коротком интервале, чем следует из (9).

Теорема 4. *Пусть* $\gamma > \frac{2}{\pi\sqrt{3}}$. *Тогда в предположениях теоремы* 3 *имеем*

1. $$\frac{N}{\log N} \ll \sum_{n\leqslant \gamma N\log\log N} b_f(n)^2;$$
2. $$\frac{N}{(\log N)^{17}(\log\log N)} \ll \sum_{\substack{n\leqslant \gamma N\log\log N\\ b_f(n)\neq 0}} 1.$$

Второе утверждение легко следует из первого, которое и будем доказывать. Для простоты рассмотрим случай $k = 2$. Достаточно доказать справедливость следующих неравенств:

$$\frac{N}{\log N} \ll \langle f, f\rangle \ll \sum_{n\leqslant \gamma N\log\log N} b_f(n)^2 + O\Bigl(\frac{N(\log N)^3\log\log N}{(\log N)^{2\pi\sqrt{3}\,\gamma}}\Bigr). \tag{12}$$

Первое неравенство уже приводилось выше. Докажем второе неравенство. В работе [10] было показано, что

$$\langle f, f\rangle \ll \sum_{n=1}^{\infty} N^{-1} a_f(n)^2 \int\limits_{\sqrt{3}/2}^{\infty} e^{-4\pi n\frac{y}{N}}\,dy.$$

Обозначим бесконечную сумму через $\sum$. Имеем

$$\sum = \sum_{n\leqslant \gamma N\log\log N} \cdots + \sum_{n>\gamma N\log\log N} \cdots = \sum\nolimits_1 + \sum\nolimits_2.$$

Легко видеть, что

$$\sum\nolimits_1 \ll \sum_{n \leqslant \gamma N \log\log N} b_f(n)^2.$$

Далее имеем

$$\sum\nolimits_2 \asymp \sum_{n > \gamma N \log\log N} b_f(n)^2 \int\limits_{2\pi\sqrt{3}\,n/N}^{\infty} e^{-z}\,dz.$$

Применяя оценку Делиня и абелево суммирование, после некоторых вычислений имеем

$$\sum\nolimits_2 \ll N(\log N)^3 e^{-2\pi\sqrt{3}\,\gamma \log\log N} \cdot \log\log N.$$

Тем самым, соотношения (12) доказаны. В силу нашего предположения, выполняется неравенство $2\pi\sqrt{3}\,\gamma > 4$, откуда вытекает справедливость первого утверждения теоремы 4.

2.3. Получить нетривиальную оценку снизу для суммы квадратов коэффициентов Фурье собственных форм Гекке

$$\sum_{n \leqslant X} b_f(n)^2$$

при $X \leqslant N$ не представляется возможным, однако это делается в среднем. Сохраним предположения теоремы 3. Для простоты возьмем вес $k = 2$, $N = p$. Пусть $\{f\}$ – базис пространства $S_2(\Gamma_0(N))$, состоящий из новых форм. С помощью хорошо известной формулы Петерсона, упомянутой в п. 1.2, доказываем, что

$$\sum_f \omega_f b_f(n)^2 = \delta_{nn} + O\big(N^{-3/2} n^{3/2}\big).$$

Отсюда следует, что

$$\sum_{n \leqslant X} \sum_f \omega_f b_f(n)^2 = [X] + O\big(N^{-3/2} X^{5/2}\big). \tag{13}$$

Пусть $\psi(x)$ – положительная сколь угодно медленно монотонно возрастающая функция с условием $\psi(x) \to \infty$ $(x \to \infty)$. При $X < N/\psi(N)$ из (13) следует, что

$$\sum_{n \leqslant X} \sum_f \omega_f b_f(n)^2 \sim X. \tag{14}$$

Выше уже приводились неравенства

$$\frac{1}{N\log^3 N} \ll \omega_f \ll \frac{\log N}{N}. \tag{15}$$

Таким образом, из (14) и (15) следует

Теорема 5. *Рассмотрим пространство $S_2(\Gamma_0(N))$, где $N = p$ – простое число, и базис $\{f\}$ этого пространства, состоящий из новых форм. Тогда при $X < N/\psi(N)$ имеем*

$$\frac{N}{\log N}X \ll \sum_f \sum_{n\leqslant X} b_f(n)^2 \ll N(\log N)^3 X.$$

Поскольку $\dim S_2(\Gamma_0(N)) \sim N/12$, можно сказать, что при $X < N/\psi(N)$ в среднем по базису

$$\frac{X}{\log N} \ll \sum_{n\leqslant X} b_f(n)^2 \ll X\log^3 N.$$

Замечание. Теорема 5 легко обобщается на случай четного веса $k \geqslant 2$. Покажем, что существуют новые формы веса 2, для которых справедлива интересующая нас нетривиальная оценка снизу. Ограничимся простым примером.

Рассмотрим эллиптическую кривую $y^2 = x^3 + D$, $D \in \mathbb{Z}$, $D \neq 0$, с комплексным умножением, которую обозначим через E. Соответствующую параболическую форму обозначим через $E(z)$. Коэффициенты Фурье $b_E(n)$ выражаются в терминах характеров Гекке. В результате получаем, что

$$X(\log X)^{-1} \ll \sum_{n\leqslant X} b_E(n)^2.$$

Подробности см. в [11].

2.4. Рассмотрим пример интересной $\Gamma_0(N)$-параболической формы веса 2, где $N = p$ – простое число, для которой можно получить информацию о коэффициентах Фурье с малыми номерами. Пусть $\mathrm{Tr}\,(T_n) = \mathrm{Tr}\,(T_n \mid S_2(\Gamma_0(N)) = \sum_f b_f(n)$ (след оператора Гекке T_n в пространстве $S_2(\Gamma_0(N))$). Формула для $\mathrm{Tr}\,(T_n)$ была доказана Айхлером [12] и Сельбергом [13]. В случае веса 2 формула следа имеет сравнительно простой вид. Нам потребуется следующая лемма (см. [5]), полученная с помощью формула следа.

Лемма. *Рассмотрим пространство $S_2(\Gamma_0(N))$, где N – простое число. Пусть $\{a_n\}$ – любая последовательность чисел. Для любого $C > 1$ и любого $B < N^2/C$ имеем*

$$\sum_{n=B}^{CB} a_n \mathrm{Tr}\,(T_n) = \frac{N}{12}\sum_{n=B}^{CB}\frac{a_n}{\sqrt{n}}\delta_{\boxed{n}} + a_{\max} O\Big(B^{7/4}N^{-1/2} + B^{39/32+\varepsilon}N^{1/4}\Big),$$

где $a_{\max}$ означает наибольшее значение $|a_n|$ в рассматриваемом промежутке и O-константа зависит лишь от C и ε; $\delta_{\boxed{n}}$ означает 1, если n является квадратом, и 0 в противном случае.

Пусть $\nu_N = \dim S_2(\Gamma_0(N))$. Введем следующую параболическую форму (не являющуюся собственной формой Гекке)

$$T(z) = \frac{1}{\nu_N}\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{n}\mathrm{Tr}\,(T_n)e^{2\pi i n z};$$

для нее

$$b_T(n) = \frac{1}{\nu_N}\mathrm{Tr}\,(T_n).$$

Перечислим некоторые свойства этой формы:

$$b_T(1) = 1, \quad |b_T(n)| \leqslant d(n), \quad \sum_{n\leqslant X} b_T(n) \ll X^{1/3+\varepsilon}N^{1/3}. \tag{8$'$}$$

Справедлив аналог результата (9):

$$\sum_{n\leqslant X} b_T(n)^2 = cX + O\big(X^{3/5}N^{2/5+\varepsilon}\big),$$

где

$$c \asymp \frac{\langle T, T\rangle}{N},$$

но теперь

$$\frac{1}{N} \ll c \ll \log^3 N.$$

Имеем

$$\sum_{n\leqslant X} b_T(n)^2 \sim cX \quad \big(X \gg N^{7/2+\varepsilon'}\big). \tag{16}$$

Используя (8$'$) и (16), легко доказать при $X \gg N^{7/2+\varepsilon'}$ равномерное распределение типа (11) положительных и отрицательных коэффициентов Фурье $b_T(n)$.

Подробнее рассмотрим сумму

$$\sum_{n\leqslant X} b_T(n) = \sum_{n\leqslant X} \frac{\mathrm{Tr}\,(T_n)}{\nu_n}.$$

Разобьем ее на $\ll \log X$ сумм с интервалами суммирования $[B, CB]$ и применим к каждой из них лемму, в которой берем все $a_n = 1$. После некоторых вычислений имеем следующее уточнение оценки $(8')$:

$$\sum_{n\leqslant X} b_T(n) = \sum_{n\leqslant \sqrt{X}} \frac{1}{n} + O\big(X^{39/32+\varepsilon} N^{-3/4}\big), \quad \text{если} \quad 1 \leqslant X \leqslant N^{8/13-\varepsilon'};$$

$$\sum_{n\leqslant X} b_T(n) \ll X^{39/32+\varepsilon} N^{-3/4}, \qquad \text{если} \quad N^{8/13-\varepsilon'} \leqslant X \leqslant N^{104/85};$$

$$\sum_{n\leqslant X} b_T(n) \ll X^{1/3+\varepsilon} N^{1/3}, \qquad \text{если} \quad X > N^{104/85}.$$

Если рассмотреть сумму $\sum\limits_{n\leqslant X} |b_T(n)|$ и взять при применении леммы $a_n = -1$ для $b_T(n) < 0$ и $a_n = 1$ в остальных случаях, то при $1 \leqslant X \leqslant N^{8/13-\varepsilon'}$ будем иметь

$$\sum_{n\leqslant X} b_T(n) = \sum_{n\leqslant \sqrt{X}} \frac{1}{n} + 2 \sum_{\substack{n\leqslant \sqrt{X}\\ b_T(n^2)<0}} \frac{-1}{n} + O\big(X^{39/32+\varepsilon} N^{-3/4}\big).$$

Средний член выражения в правой части равенства, взятый по модулю, не может иметь более высокий порядок, чем остаток. Тем самым, на интервале $1 \leqslant X \leqslant N^{8/13-\varepsilon'}$ нет равномерного распределения положительных и отрицательных коэффициентов Фурье формы $T(z)$, поскольку на этом интервале

$$\sum_{n\leqslant X}{}^{+} b_T(n) = \sum_{n\leqslant \sqrt{X}} \frac{1}{n} + O\big(X^{39/32+\varepsilon} N^{-3/4},$$
$$\sum_{n\leqslant X}{}^{-} b_T(n) \ll X^{39/32+\varepsilon} N^{-3/4}\big).$$

Из последних соотношений вытекает, что при $1 \leqslant X \leqslant N^{8/13-\varepsilon'}$ имеем

$$\sum_{n \leqslant X} b_T(n)^2 \ll \log^2 X.$$

Это неравенство резко контрастирует с асимптотикой (16).

Литература

1. G. Shimura, *On the holomorphy of certain Dirichlet series,* Proc. London Math. Soc. **31**, No. 1 (1975), 79–98.
2. J. Hoffstein and P. Lockhart, *Coefficients of Maass forms and the Siegel zero (with an appendix by D. Goldfeld, J. Hoffstein, and D. Lieman, An effective zero free region),* Ann. of Math. **140** (1994), 161–181.
3. H. Iwaniec and P. Michel, *The second moment of the symmetric square L-functions,*. Ann. Acad. Scient. Fenn. Math. **26** (2001), 465–482.
4. О. М. Фоменко, *О поведении автоморфных L-функций в центре критической полосы,* Зап. научн. семин. ПОМИ **276** (2001), 300–311.
5. J. M. Vanderkam, *The rank of quotients of $J_0(N)$,* Duke Math. J. **97**, No. 3 (1999), 545–577.
6. A. Walficz, *Über die Koeffizientensummen einiger Modulformen,* Math. Ann **108**, No. 1 (1933), 75–90.
7. R. A. Rankin, *Contributions to the theory of Ramanujan's function $\tau(n)$ and similar arithmetical functions. II. The order of the Fourier coefficients of the integral modular forms,* Proc. Cambridge Phil. Soc. **35**, No. 3 (1939), 357–372.
8. A. Selberg, *Bemerkungen über eine Dirichletsche Reihe, die mit der Theorie der Modulformen nahe verbunden ist,* Arch. Math. Naturvid. **43** (1940), 47–50.
9. Е. П. Голубева, О. М. Фоменко, *Значения рядов Дирихле, ассоциированных с модулярными формами, в точках $s = 1/2$, 1,* Зап. научн. семин. ЛОМИ **134** (1984), 117–137.
10. О. М. Фоменко, *Оценки скалярных квадратов параболических форм и арифметические приложения,* Зап. научн. семин. ЛОМИ **168** (1988), 158–179. Исправления в Зап. научн. семин. ЛОМИ **204** (1993), 143–166.
11. W. Duke, J. B. Friedlander, and H. Iwaniec, *Bounds for automorphic L-functions. II,* Invent math. **115** (1994), 219–239. Erratum, Invent. math. **140** (2000), 227–242.
12. M. Eichler, *Quadratische Formen und Modulfunktionen,* Acta Arithm. **4**, No. 3 (1958), 217–239.
13. A. Selberg, *Harmonic analysis and discontinuous group in weakly symmetric Riemannian spaces with applications to Dirichlet series,* J. Indian Math. Soc. **20**, No. 1–3 (1956), 47–87.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН
E-mail:fomenko@pdmi.ras.ru

Поступило 6 мая 2002 г.