Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 286, 2002 г.

А. В. Шутов

РОСТ 1-ПЕРИОДИЧЕСКИХ ГРАФОВ

§0. Введение

Послойная окантовочная модель роста кристаллов в двумерном варианте содержит разбиения Til пространства R^n. Выбирается затравочный многоугольник M, который окружается соседними с ним многоугольниками, с общей границей длины, большей некоторого фиксированного $\epsilon > 0$. Первый слой окружается соседними с ним многоугольниками второго слоя и так далее. Возникает послойный рост координационных окружностей. При этом поведение n-ой окружности определяет форму кристалла.

Математическое исследование задачи о росте разбиений было начато В. Г. Журавлевым в работе [1]. Было показано, что задача о росте разбиений является частным случаем задачи о росте графов. Для плоских периодических графов была доказана теорема о самоподобном росте. При этом выяснилось, что формы роста периодических графов – выпуклые центрально-симметричные многоугольники. Был найден алгоритм их построения. Кроме того, была получена асимптотическая формула для числа вершин в n-ой координационной окружности. В работе [1] были поставлены вопросы:

1) Какие непериодические графы имеют самоподобный рост?

2) Какие непериодические графы имеют многугольный рост?

При исследовании роста непериодических графов было обнаружено, что во многих случаях достаточно ограничиться одним классом графов – квадратной решеткой Z^2, в некоторых клетках которой проведены диагонали. Простейшими примерами таких графов являются случайные графы, в каждой клетке которых диагональ присутствует с некоторой фиксированной вероятностью p. Компьютерный эксперимент показал, что случайные графы имеют самоподобный рост, при этом форма роста состоит из отрезков прямых и дуг эллипсов. Таким образом, был получен частичный ответ на первый вопрос В. Г. Журавлева.

Настоящая работа представляет собой ответ на второй вопрос. Для этого вводится новый класс графов: 1-периодические графы. Пусть $\overrightarrow{l}$ – некоторый вектор, $L = \{k\overrightarrow{l} : k \in Z\}$ – 1-мерная решетка, порожденная вектором $\overrightarrow{l}$. Граф G, вложенный в плоскость R^2, назовем 1-периодическим, если сдвиги на векторы решетки индуцируют его автоморфизмы. Очевидно, что все периодические графы являются 1-периодическими и что обратное утверждение неверно.

В работе исследуется рост 1-периодических графов с множеством вершин на целочисленной решетке Z^2. При этом соседние по вертикали или горизонтали вершины соединены ребром. Кроме того, в некоторых клетках полученного графа проведены диагонали. Для клеток фундаментальной области вероятность появления диагонали фиксирована и равна h. Наличие или отсутствие диагоналей в остальных клетках определяется по периодичности.

Для вышеописанного класса графов вводятся понятия n-ой координационной окружности и формы роста. Для векторов периодичности $\overrightarrow{l} = \{1,1\}$, $\overrightarrow{l} = \{0,1\}$ и $\overrightarrow{l} = \{1,-1\}$ формы роста найдены явно. Это выпуклые центрально-симметричные многоугольники. Для остальных графов найден эффективный способ получения нижних границ для n-ой координационной окружности. Кроме того, на основании компьютерных экспериментов сделано предположение о многоугольном росте почти всех графов введенного класса. Также сформулированы некоторые гипотезы о многоугольниках роста, в частности, получена эмпирическая формула для числа сторон.

Автор хотел бы выразить благодарность В. Г. Журавлеву за многократные полезные обсуждения задачи о росте графов и А. В. Маалееву за написание программ для проведения компьютерных экспериментов.

§1. 1-периодические графы

Рассматриваются графы G, вершины которых совпадают с точками целочисленной решетки Z^2. Любые две соседние по вертикали или горизонтали вершины графа G соединены ребром. Вершины (i,j) и $(i+1, j+1)$ могут быть соединены или не соединены ребром – это зависит от графа G. Граф G назовем 1-периодическим, если существует 1-мерная решетка L, порожденная вектором периодичности $\overrightarrow{l}$ (то есть $L = \{k\overrightarrow{l} : k \in Z\}$), сдвиги на векторы которой индуцируют автоморфизмы графа G. Решетка L определяет фундаментальную область графа $G : F = R^2/L$.

Пусть $\xi = (\xi_{ij})$ – счетномерная случайная величина. Ее компоненты ξ_{ij} нумеруются целыми точками фундаментальной области F относительно решетки периодов L и являются независимыми бернуллевскими случайными величинами с распределением

$$P(\xi_{ij} = 1) = p, \quad P(\xi_{ij} = 0) = q, \quad p + q = 1. \tag{1}$$

Пусть Ω – пространство событий случайной величины ξ. На Ω введем бернуллиевскую меру P – произведение вероятностных мер (1) На цилиндрах вероятность P принимает значения

$$\begin{aligned} &P(\xi : \xi_{i_1j_1} = \omega_{i_1j_1}, \dots, \xi_{i_nj_n} = \omega_{i_nj_n}) = \\ &\qquad = p^{\omega_{i_1j_1}+\dots+\omega_{i_nj_n}} q^{n-\omega_{i_1j_1}-\dots-\omega_{i_nj_n}}, \end{aligned} \tag{2}$$

где все ω_{ij} равны 0 или 1.

Рассмотрим множество G_L 1-периодических графов с решеткой периодов L. Графы из G_L нумеруются точками $\omega = \omega_{ij}$ пространства Ω с помощью отображения

$$\Omega \ni \omega \xrightarrow{G} G(\omega) \in G_L. \tag{3}$$

В графе G вершины (i, j) и $(i+1, j+1)$ из фундаментальной области F соединены диагональю тогда и только тогда, когда $\omega_{ij} = 1$. Задание части графа G, расположенной в фундаментальной области, очевидным образом задает весь граф.

Рассмотренное отображение позволяет перенести меру P на множество 1-периодических графов $G_L = G_L(\xi)$ и задает изоморфизм вероятностных пространств

$$(G_L, P) \simeq (\Omega, P). \tag{4}$$

§2. Постановка задачи о форме роста

Пусть G – случайный граф из $G_L(\xi)$. Геодезической графа G назовем цепь $x' \longrightarrow \dots \longrightarrow x$ с наименьшим числом ребер, соединяющую вершины x' и x. Число ребер в геодезической задает метрику $d_G(x', x)$ на множестве вершин графа G. Определим n-ую координационную окружность с центром в точке $O = (0, 0)$:

$$eq_G(n) = \{x \in Z^2 : d_G(O, x) = n\}. \tag{5}$$

Естественно, что $eq_G(n)$ зависит от графа G.

Пусть решетка периодов L фиксирована. Кривая $\gamma = \gamma_L$ называется формой роста для множества графов G_L, если для почти всех графов $G \in G_L$

$$\frac{eq_G(n)}{n} \longrightarrow \gamma \quad \text{при} \quad n \longrightarrow \infty, \tag{6}$$

то есть

$$\rho(\frac{1}{n} eq_G(n), \gamma) \longrightarrow 0 \quad \text{при} \quad n \longrightarrow \infty \quad \text{с вероятностью} \quad 1. \tag{7}$$

Здесь ρ – расстояние между множествами по Хаусдорфу:

$$\rho(A, B) = \max\Big\{ \sup_{x \in A} \inf_{y \in B} |\overrightarrow{x} - \overrightarrow{y}|, \sup_{x \in B} \inf_{y \in A} |\overrightarrow{x} - \overrightarrow{y}| \Big\}. \tag{8}$$

Приведем основные следствия существования формы роста.

1) Пусть $eq_G(a, n) = \{x \in Z^2 : d_G(a, x) = n\}$. Тогда

$$\frac{1}{n}(eq_G(a, n) - a) \longrightarrow \gamma \quad \text{с вероятностью} \quad 1. \tag{9}$$

2) Пусть $eq_G(a_1, \dots, a_k, n) = \{x \in Z^2 : \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{n} d_G(a_i, x) = n\}$, $a = \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{n} a_i$. Тогда

$$\frac{1}{n}(eq_G(a_1, \dots, a_k, n) - a) \longrightarrow \gamma \quad \text{с вероятностью} \quad 1. \tag{10}$$

3) Почти все графы $G \in G_L$ растут самоподобным образом, то есть

$$eq_G(n) \subset (n \cdot \gamma)_{c_n}, \quad \text{где} \quad \frac{c_n}{n} \longrightarrow 0 \quad \text{при} \quad n \longrightarrow \infty. \tag{11}$$

4) Пусть $|eq_G(n)|$ – число вершин в $eq_G(n)$,

$$\langle eq_G(n) \rangle = \frac{1}{2\Delta n} \sum_{n - \Delta n < m \leqslant n + \Delta n} |eq_G n|. \tag{12}$$

Тогда при подходящем выборе Δn

$$\frac{1}{n} \langle eq_G(n) \rangle \longrightarrow 2S(\gamma), \tag{13}$$

где $S(\gamma)$ – площадь области, ограниченной кривой γ.

Графы $G \in G_L$ отличаются изолированностью роста по координатным четвертям. Во второй и четвертой координатных четвертях ни одна геодезическая графа, выходящая из начала координат, не проходит через диагонали. Поэтому во второй и четвертой четвертях граф G растет так же, как и периодическая квадратная решетка Z^2, то есть самоподобным образом. Соответствующие участки кривой γ – отрезки $(-1,0)-(0,1)$ и $(0,-1)-(1,0)$. Если граф G растет самоподобным образом в первой четверти, то в третьей четверти он также растет самоподобным образом, причем соответствующие части кривой γ будут симметричны относительно начала координат. Поэтому можно перейти от графов с множеством вершин Z^2 к графам с множеством вершин Z^2_+ из первой четверти. Соответствующую часть γ будем обозначать γ_+.

Пусть $p = 0$. Тогда любой граф $G \in G_{L,p}$ – периодический. Он является квадратной решеткой Z^2_+ без диагоналей. В этом случае кривая γ_+ существует. Это отрезок $(1,0)-(0,1)$.

Пусть $p = 1$. Тогда все графы $G \in G_{L.p}$ вновь одинаковы. Это квадратные решетки Z^2_+ с диагоналями. В этом случае γ_+ существует и состоит из отрезков $(1,0)-(1,1)$ и $(1,1)-(0,1)$.

Введем следующие обозначения: $\overrightarrow{e_1} = \{1,0\}$, $\overrightarrow{e_2} = \{0,1\}$, $\overrightarrow{e_3} = \{1,1\}$. Кроме того, будем писать $a \subseteq \gamma_+$, если точка a находится внутри области, ограниченной кривой γ_+ и осями координат.

Пусть $0 < p_1 < p_2 < 1$. Пусть γ_{L,p_1} и γ_{L,p_2} существуют. Тогда $\gamma_{L,p_1} \subseteq \gamma_{L,p_2}$.

Рассмотрим вопрос о существовании $\gamma_{L,p}$ для некоторых решеток L. При этом ограничимся рассмотрением первой четверти. Решетку L будем задавать ее порождающим вектором $\overrightarrow{l} = \{l_1, l_2\}$.

§3. Случай $\overrightarrow{l} = \{1,1\}$

Пусть $\overrightarrow{l} = \{1,1\}$ и $0 < p < 1$. Тогда кривая γ_+ существует и состоит из двух отрезков $\alpha : (1,0)-(1,1)$ и $\beta : (1,1)-(0,1)$. Докажем это.

Так как $p > 0$, то существует вершина (i,j), из которой выходит диагональ. Без ограничения общности можно считать, что $(i,j) = (0,0)$. Доказательство существования γ_+ разбивается на 2 части.

Нижняя граница. *Для доказательства нижних границ достаточно построить аппроксимационные цепи, ведущие в вершины, расположенные в некоторой окрестности $n \cdot \gamma_+$, длина которых* мало отличается от n. Пусть $a \in n \cdot \alpha$ и a имеет координаты (n, y). Тогда аппроксимационная цепь в вершину a имеет вид:

$$O \xrightarrow{\overrightarrow{e_3}} \cdots \xrightarrow{\overrightarrow{e_3}} a' \xrightarrow{\overrightarrow{e_1}} \cdots \xrightarrow{\overrightarrow{e_1}} a. \tag{14}$$

При этом вектор $\overrightarrow{e_3}$ встречается в цепи y раз, а вектор $\overrightarrow{e_2}$ – $n-y$ раз. Длина этой цепи равна n. Цепи, ведущие в вершины из $n \cdot \beta$, строятся аналогично. Из наличия аппроксимационных цепей следует неравенство:

$$d_G(O, a) \leqslant n \forall a \in n \cdot \gamma_+. \tag{15}$$

Верхняя граница. Рассмотрим граф $G_1 = G_{L,1}$. Он представляет собой квадратную решетку с диагоналями. Каждая геодезическая графа $G \in G_{L,p}$ является цепью графа G_1. Поэтому $d_G(x, y) \geqslant d_{G_1}(x, y)$. Пусть $a \in n \cdot \gamma_+$. Тогда $d_{G_1}(O, a) = n$. Поэтому

$$d_G(O, a) \geqslant n \forall a \in n \cdot \gamma_+. \tag{16}$$

Из (15) и (16) следует, что

$$d_G(O, a) = n \forall a \in n \cdot \gamma_+. \tag{17}$$

Отсюда следует, что

$$\frac{1}{n} eq(n) \longrightarrow \gamma. \tag{18}$$

§4. Случай $\overrightarrow{l} = \{0, 1\}$

В этом случае γ_+ существует и состоит из двух отрезков α : $(1, 0) - (1, p)$ и $\beta : (1, p) - (0, 1)$. Доказательство вновь разбивается на два этапа.

Нижняя граница. Для построения аппроксимационной цепи в вершину (n, np), будем пользоваться следующей стратегией. Начинаем движение в точке O и двигаемся по следующему правилу:если из текущей вершины выходит диагональ, то сдвигаемся на вектор $\overrightarrow{e_3}$, в противном случае сдвигаемся на вектор $\overrightarrow{e_1}$. Тогда число диагоналей, через которые проходит аппроксимационная цепь длины n, с вероятностью 1 будет больше, чем $np - \sqrt{2pqn \log \log n}$ и, следовательно, точка $(1, p) \subseteq \gamma_+$.

Для построения аппроксимационной цепи в вершину (n, y), $y < p$, будем руководствоваться вышеописанной стратегией до тех пор, пока число векторов $\overrightarrow{e_3}$ не станет равным y. Далее будем двигаться вдоль вектора $\overrightarrow{e_1}$. Существование такой цепи обеспечивает нижнюю границу для отрезка α.

Построим аппроксимационную цепь в вершину a с абсциссой $n - dx$. Она будет иметь вид

$$O \xrightarrow{\overrightarrow{e_2}} \ldots \xrightarrow{\overrightarrow{e_2}} (0, dx) \longrightarrow \overset{c}{\ldots} \longrightarrow a, \tag{19}$$

где c – цепь, не содержащая векторов $\overrightarrow{e_2}$, построенная в соответствии с вышеописанной стратегией. Вершина a будет иметь координаты $(n - dx, dx + p(n - dx))$ и поэтому будет лежать на отрезке $n \cdot \beta$. Ясно, что в любую вершину из некоторой окрестности этого отрезка можно построить аппроксимационную цепь указанного вида, которая дает нижнюю границу.

Верхняя граница. Верхняя граница для сектора, заданного отрезком α, получается точно так же, как и в предыдущем пункте. Остановимся на доказательстве верхней границы для сектора, заданного отрезком β.

Пусть Γ – геодезическая из вершины O в вершину $(n - dx, y)$. Заметим, что если $a_1 \xrightarrow{\overrightarrow{e_1}} a_2 \xrightarrow{\overrightarrow{e_2}} a_3$ – участок геодезической, то его можно заменить на $a_1 \xrightarrow{\overrightarrow{e_2}} a_2' \xrightarrow{\overrightarrow{e_1}} a_3$ без потери геодезичности. Аналогично, участок $a_1 \xrightarrow{\overrightarrow{e_3}} a_2 \xrightarrow{\overrightarrow{e_2}} a_3$ можно заменить на $a_1 \xrightarrow{\overrightarrow{e_2}} a_2' \xrightarrow{\overrightarrow{e_3}} a_3$. В результате конечного числа таких замен в геодезической Γ, мы получим новую геодезическую Γ' вида

$$O \xrightarrow{\overrightarrow{e_2}} \ldots \xrightarrow{\overrightarrow{e_2}} (0, dx) \longrightarrow \overset{\Gamma_1}{\ldots} \longrightarrow (n - dx, y). \tag{20}$$

При этом цепь Γ_1 не содержит векторов $\xrightarrow{\overrightarrow{e_2}}$. Оценим число векторов $\xrightarrow{\overrightarrow{e_3}}$ в геодезической Γ_1. Для этого введем оператор проектирования геодезической на фундаментальную область $\pi : (x, y) \longrightarrow (x, 0)$. Очевидно, если в вершине a имеется диагональ, то в вершине $\pi(a)$ она также имеется. Поэтому число диагоналей в Γ_1 не превосходит числа вершин в $\pi(\Gamma_1)$, из которых выходят диагонали. Поэтому с вероятностью 1 $y \leqslant p|\pi(\Gamma_1)| + \sqrt{2pq|\pi(\Gamma_1)| \log\log|\pi(\Gamma_1)|}$. Таким образом, справедливо неравенство

$$y \leqslant dx + p(n - dx) + \sqrt{2pq(n - dx)\log\log(n - dx)}, \tag{21}$$

которое и доказывает верхнюю границу.

Аналогично можно разобрать случай $\overrightarrow{l} = \{1, 0\}$. При этом γ_+ будет состоять из отрезков $(0,1)-(p,1)$ и $(p,1)-(1,0)$.

§5. Случай $\overrightarrow{l} = \{1, -1\}$

В этом случае γ_+ существует и состоит из трех отрезков: $(1,0)-(1,p)$, $(1,p)-(p,1)$ и $(p,1)-(0,1)$. Доказательство разобьем на два этапа.

Сначала докажем, что все вершины из $eq(n)$ лежат на прямых $y = n$, $x = n$, $x + y = k_n + n$, $x + y = k_n + n - 1$. Доказательство проведем индукцией по числу слоев n. Для $n = 1$ утверждение проверяется непосредственно. Пусть утверждение верно для $n = n_0$. Докажем его для $n = n_0 + 1$. Возможны 6 случаев:

1) В вершинах на прямой $x+y = k_{n_0}+n_0-1$ имеются диагонали, в вершинах на прямой $x+y = k_{n_0}+n_0$ их нет. Тогда все вершины из $eq(n_0+1)$ лежат на прямых $x = n_0+1$, $y = n_0+1$, $x+y = k_{n_0}+n_0+1$.

2) В вершинах на прямой $x+y = k_{n_0}+n_0-1$ имеются диагонали, в вершинах на прямой $x+y = k_{n_0}+n_0$ также имеются диагонали. Тогда все вершины из $eq(n_0 + 1)$ лежат на прямых $x = n_0 + 1$, $y = n_0 + 1$, $x + y = k_{n_0} + n_0 + 1$, $x + y = k_{n_0} + n_0 + 2$.

3) В вершинах на прямой $x+y = k_{n_0}+n_0-1$ нет диагоналей, в вершинах на прямой $x+y = k_{n_0}+n_0$ также нет диагоналей. Тогда все вершины из $eq(n_0+1)$ лежат на прямых $x = n_0+1$, $y = n_0+1$, $x + y = k_{n_0} + n_0 + 1$.

4) В вершинах на прямой $x+y = k_{n_0}+n_0-1$ нет диагоналей, в вершинах на прямой $x + y = k_{n_0} + n_0$ имеются диагонали. Тогда все вершины из $eq(n_0+1)$ лежат на прямых $x = n_0+1$, $y = n_0+1$, $x + y = k_{n_0} + n_0 + 2$.

5) В вершинах на прямой $x + y = k_{n_0} + n_0$ имеются диагонали, на прямой $x + y = k_{n_0} + n_0 - 1$ нет вершин. Тогда все вершины из $eq(n_0+1)$ лежат на прямых $x = n_0+1$, $y = n_0+1$, $x+y = k_{n_0}+n_0+1$, $x + y = k_{n_0} + n_0 + 2$.

6) В вершинах на прямой $x + y = k_{n_0} + n_0$ нет диагоналей, на прямой $x + y = k_{n_0} + n_0 - 1$ нет вершин. Тогда все вершины из $eq(n_0+1)$ лежат на прямых $x = n_0+1$, $y = n_0+1$, $x+y = k_{n_0}+n_0+1$.

Утверждение доказано.

Поскольку граф симметричен относительно прямой $y = x$, $eq(n)$ также симметрична относительно этой прямой. Поэтому для доказательства утверждения о форме роста остается найти k_n.

Пусть $(n, k_n) \in eq(n)$ и $(n.k_n+1) \notin eq(n)$. Тогда геодезическая в вершину (n, k_n) не содержит векторов $\overrightarrow{e_3}$ и поэтому получается в соответствии со стратегией параграфа 4. Поэтому с вероятностью 1

$$k_n = pn + O(\sqrt{n \log \log n}) \tag{22}$$

и $\frac{1}{n}(n, k_n) \longrightarrow (1, p)$.

§6. Задача роста в полосе

Задача роста графа с вектором периодичности $\{1, -1\}$ тесно связана с задачей роста случайного графа в полосе Π, ограниченной прямыми $y = x$ и $y = x + 1$. Сформулируем эту задачу. Пусть $G_{\Pi,p}$ – граф с вершинами из Z^2, находящимися на прямых $y = x$ и $y = x + 1$. Вершины, соседние по вертикали и горизонтали, всегда соединены ребром. Вершины, соседние по диагонали, соединены ребром с вероятностью p. Пусть $(a_n, a_n) \in eq(n)$. Чему равен $\lim\limits_{n \longrightarrow \infty} \frac{a_n}{n}$?

Пусть $G' \in G_{L,p}$ – граф с вектором периодичности $\{1, -1\}$. Полоса Π является фундаментальной областью графа G'. Поэтому каждый граф $G \in G_{\Pi,p}$ единственным образом продолжается до графа $G' \in G_{L,p}$. При этом каждая геодезическая графа G является цепью графа G'. Пусть $(a_n, a_n) \in eq_{G'}(n)$. Докажем, что существует геодезическая графа G' в вершину (a_n, a_n), лежащая в полосе Π. Она, очевидно, будет геодезической графа G.

Пусть $k(\Gamma)$ – число звеньев геодезической Γ, ведущей в вершину (a_n, a_n), лежащих вне полосы Π. Пусть Γ_0 – геодезическая с минимальным $k(\Gamma)$.

Предположим, что $k(\Gamma_0) > 0$. Каждый участок Γ_0, лежащий ниже прямой $y = x$, отобразим симметрично относительно этой прямой. Аналогично поступим со всеми участками Γ_0, лежащими выше прямой $y = x+1$. Так как граф G' симметричен относительно прямых $y = x$ и $y = x+1$, то в результате этих преобразований цепь Γ_0 перейдет в цепь Γ_1 той же длины, то есть в геодезическую. При этом $k(\Gamma_1) < k(\Gamma_0)$. Полученное противоречие говорит о том, что $k(\Gamma_0) = 0$.

Таким образом, задача роста $G_{\Pi,p}$ является частным случаем задачи роста $G_{L,p}$. При этом $\frac{1}{n}(a_n, a_n) \longrightarrow A$, где A – точка пересечения $\gamma_{L,p}$ с прямой $y = x$. Поэтому с вероятностью 1

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} \frac{1}{n} a_n = \frac{1+p}{2}. \qquad (23)$$

§7. Некоторые общие результаты и предположения

1) Таким образом, доказана следующая

Теорема. *Пусть G_L, p – множество 1-периодических графов, заданных вектором периодичности $\overrightarrow{l}$ и вероятностью p.*

(а) *Если $\overrightarrow{l} = \{1, 1\}$, то форма роста – многоугольник с вершинами $(1, 0)$, $(1, 1)$, $(0, 1)$, $(-1, 0)$, $(-1, -1)$, $(0, -1)$.*

(б) *Если $\overrightarrow{l} = \{1, 0\}$, то форма роста – многоугольник с вершинами $(1, 0)$, $(1, p)$, $(0, 1)$, $(-1, 0)$, $(-1, -p)$, $(0, -1)$.*

(в) *Если $\overrightarrow{l} = \{1, -1\}$, то форма роста – многоугольник с вершинами $(1, 0)$, $(1, p)$, $(p, 1)$, $(0, 1)$, $(-1, 0)$, $(-1, -p)$, $(-p, -1)$, $(0, -1)$.*

2) Как было показано, для получения нижних границ в задаче о форме роста нужно уметь строить аппроксимационные цепи. При построении цепей необходимо придерживаться некоторого алгоритма или стратегии. Простейшим видом стратегий являются одношаговые стратегии. Одношаговая стратегия задается упорядоченным набором из $n + 1$ векторов: $\{x_1, y_1\}, \ldots, \{x_n, y_n\}$, $\{x_{n+1}, y_{n+1}\}$.

Движение происходит по следующему алгоритму. Пусть a – начальная вершина. Если в вершине $a + \{x_1, y_1\}$ имеется диагональ, то строим цепь вида $x_1 \overrightarrow{e_1} + y_1 \overrightarrow{e_2} + \overrightarrow{e_3}$. В противном случае проверяем вершину $a + \{x_2, y_2\}$. Если в ней имеется диагональ, то строим цепь вида $x_2 \overrightarrow{e_1} + y_2 \overrightarrow{e_2} + \overrightarrow{e_3}$. В противном случае проверяем вершину $a + \{x_3, y_3\}$ и так далее. Если в вершине $a + \{x_n, y_n\}$ имеется диагональ, то строим цепь вида $x_n \overrightarrow{e_1} + y_n \overrightarrow{e_2} + \overrightarrow{e_3}$, в противном случае строим цепь вида $x_{n+1} \overrightarrow{e_1} + y_{n+1} \overrightarrow{e_2}$. Для построения следующего участка цепи описанный шаг алгоритма повторяется.

Пусть случайная величина X_k принимает значение i, если при k-ом выполнении алгоритма диагональ была обнаружена в вершине $a + \{x_i, y_i\}$. Тогда или вероятности событий $X_k = i$ не зависят от k, или же случайные величины X_k задают марковский случайный процесс с дискретным временем. В любом случае пусть существуют предельные вероятности $p_i = \lim\limits_{k \longrightarrow \infty} p(X_k = i)$. Пусть

$$v_1 = \sum_{i=1}^{n} (x_i + 1) p q^{i-1} + x_{n+1} q^n, \tag{24}$$

$$v_2 = \sum_{i=1}^{n} (y_i + 1) p q^{i-1} + y_{n+1} q^n, \tag{25}$$

$$s = \sum_{i=1}^{n} (x_i + y_i + 1) p q^{i-1} + (x_{n+1} + y_{n+1}) q^n. \tag{26}$$

Тогда

$$\left(\frac{v_1}{s}, \frac{v_2}{s} \right) \subseteq \gamma. \tag{27}$$

Пусть, например, $\overrightarrow{l} = \{0, l_2\}$. Рассмотрим стратегию $\{0,0\}, \ldots,$ $\{0, l_2 - 1\}$, $\{1, 0\}$. Тогда вершина

$$A_{l_2} \left(\frac{p}{1 - q^{l_2}(1 + l_2 p - p)}, \frac{1 - q^{l_2}(1 + l_2 p)}{1 - q^{l_2}(1 + l_2 p - p)} \right) \subseteq \gamma. \tag{28}$$

Численный эксперимент показывает, что A_{l_2} является вершиной многоугольника γ. При этом

$$A_{l_2} \longrightarrow (p, 1) \quad \text{при} \quad l_2 \longrightarrow \infty. \tag{29}$$

3) Во всех рассмотренных примерах графы обладали свойством самоподобного роста. Однако, можно показать, что условия 1-периодичности недостаточно для существования формы роста. Возьмем последовательность $\{n_k\}$ такую, что не существует предела $\lim\limits_{n \longrightarrow \infty} \frac{n_k}{n}$. Построим 1-периодический граф G_0 с периодом $\overrightarrow{l} = \{0, 1\}$ такой, что в вершине $(0, n)$ имеется диагональ в том и только том случае, когда $n \in \{n_k\}$. Тогда для графа G_0 не существует формы роста.

4) Тем не менее, компьютерные эксперименты позволили высказать следующие предположения.

а) Для почти всех графов $G \in G_{L,p}(\xi)$ существует не зависящая от ξ форма роста $\gamma = \gamma_{L,p}$ (то есть для самоподобного роста достаточно 1-периодичности и существования математического ожидания числа диагоналей в графе).

b) При $0 < p \leqslant 1$ форма роста $\gamma_{L,p}$ непрерывно зависит от p (непрерывность понимается в смысле метрики Хаусдорфа). При $p = 0$ возможен фазовый переход.

c) Пусть $\overrightarrow{l} = \{l_1, l_2\}$ – вектор периодичности. Тогда γ – выпуклый многоугольник с n сторонами, где

$$\begin{aligned} n &= 2|l_1 - l_2| + 6, \quad \text{если} \quad l_1 l_2 > 0, \\ n &= 2|l_1 - l_2| + 4, \quad \text{если} \quad l_1 l_2 \leqslant 0. \end{aligned} \tag{30}$$

Строгие доказательства высказанных предположений в настоящее время неизвестны.

Литература

1. В. Г. Журавлев, *Самоподобный рост периодических разбиений,* Алгебра и анализ **13**, вып. 2, (2001), 1–26.

Владимирский государственный
педагогический университет

Поступило 25 марта 2002 г.