Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 288, 2002 г.

К ЮБИЛЕЮ ОЛЬГИ АЛЕКСАНДРОВНЫ ЛАДЫЖЕНСКОЙ

Нет смысла сегодня определять термин "ленинградская (петербургская) школа математической физики" — имена ученых, составивших славу этой школы, хорошо знакомы специалистам во всем мире. И все же даже в этом блестящем списке имя Ольги Александровны Ладыженской стоит несколько особняком, поскольку ее научная деятельность сыграла выдающуюся, в большой мере определяющую, роль в формировании этой школы. Не секрет, что не только прямые ученики и последователи, но и многие другие математики как у нас в стране, так и за рубежом, в той или иной степени испытали на себе ее влияние. Не будет преувеличением сказать, что во второй половине XX-го столетия Ольга Александровна была своего рода "законодателем моды" в теории дифференциальных уравнений с частными производными. Невозможно в рамках небольшой заметки коснуться всех тем и направлений научных поисков Ольги Александровны, и мы упомянем лишь некоторые из них.

О. А. Ладыженская родилась в 1922-ом году в городе Кологрив Костромской области. Ее отец, ставший первым учителем Ольги Александровны и прививший ей интерес к точным наукам, как и многие другие представители прежней интеллигенции, был репрессирован и погиб в 1937 году. В 1939-ом ей, дочери "врага народа", окончившей среднюю школу с золотой медалью, отказано в приеме в Ленинградский Государственный университет. Единственное учебное заведение, куда ее принимают — педагогический институт имени Покровского в Ленинграде, в котором она учится до 1941-го года. Первые годы войны Ольга Александровна преподает в своем родном городе, однако желание учиться и счастливая случайность приводят к тому, что в 1943-ем году ее зачисляют на второй курс механико-математического факультета Московского Государственного университета, который она заканчивает с в 1947-ом году, получая рекомендацию для поступления в аспирантуру. В этом же году она выходит замуж и переезжает в Ленинград, где поступает в аспирантуру при математико-механическом факультете Ленинградского университета. Руководителем Ольги Александровны в аспирантуре был С. Л. Соболев.

Очень большое влияние на научную и личную судьбу Ольги Александровны оказал В. И. Смирнов. Вместе с ним она организовала городской семинар, который был ориентирован на самые новые направления в математической физике и в теории многомерных краевых задач. Вдвоем Владимир Иванович и Ольга Александровна долгие годы вели этот семинар. Теперь его возглавляет Ольга Александровна, и по ее инициативе семинар назван семинаром имени В. И. Смирнова.

В творчестве Ольги Александровны, как и в творчестве любого масштабного ученого, можно выделить (разумеется, достаточно условно) несколько периодов. К первому периоду относятся работы, написанные до 1953 года, когда она защищает докторскую диссертацию. В том же 1953-ем году выходит в свет и первая монографии Ольги Александровны. Проблематика, которая увлекала Ольгу Александровну в этот период "уходит корнями" в работу двух семинаров — Г. И. Петровского и И. М. Гельфанда, которые она посещала во время обучения в МГУ. На втором из упомянутых семинаров в те годы в качестве "задачи номер один" для уравнений в частных производных обсуждалась задача эффективного описания области определения замыкания в $L_2(\Omega)$ операторов эллиптического типа. В 1951-ом году Ольга Александровна в работе [1] доказала свое знаменитое "второе основное неравенство" для эллиптических операторов $\mathcal{L}$ второго порядка с гладкими коэффициентами, т.е. оценку

$$\|u\|_{W_2^2(\Omega)} \leqslant C_\Omega(\|\mathcal{L}u\|_{L^2(\Omega)} + \|u\|_{L^2(\Omega)}),$$

для произвольных функций $u \in W_2^2(\Omega)$, удовлетворяющую любому из однородных классических краевых условий на границе области. Это неравенство обеспечило полное и максимально общее решение упомянутой проблемы. В дальнейшем Ольга Александровна и ее ученики обобщили этот результат на многие другие операторы, в частности, на операторы более высокого порядка. Другим достижением Ольги Александровны в этот период является обоснование сходимости метода Фурье для гиперболических уравнений. Этот цикл работ послужил основой первой монографии Ольги Александровны "Смешанная задача для гиперболического уравнения", вышедшей в издательстве "Гостехиздат" в 1953-ем году (см. [2]). Все эти результаты были высоко оценены специалистами и сразу же поставили Ольгу Александровну в один ряд с ведущими учеными того времени. Тем не менее нельзя сказать, что восхождение Ольги Александровны по служебной лестнице было простым. Сначала она вынуждена покинуть математический факультет ЛГУ и перейти на возглавляемую В. И. Смирновым кафедру математической физики физического факультета. (Эта кафедра на долгие годы становится для нее "родной". Ольга Александровна и по сей день остается профессором физфака). Затем Ольга Александровна наталкивается на административное противодействие защите ее докторской диссертации. Диссертация была полностью завершена к 1951-ому году, но фактическая защита становится возможной лишь после смерти Сталина в 1953-ем, да и то в Москве (у Г. И. Петровского). К разряду курьезов относится и то, что даже после защиты докторской Ольга Александровна продолжает оставаться в ЛГУ в должности ассистента — присуждение звания профессора (которое должно было быть одобрено в Москве) задерживается в канцеляриях до 1956-го года. Трижды на протяжении конца 50-ых — начала 60-ых годов Ольга Александровна получает приглашения провести год в знаменитом Institute of Advanced Studies в Принстоне (США), но всякий раз власти отказывают ей в поездке... Это и многое другое не сказалось на активности молодого ученого, и несмотря на все трудности Ольга Александровна продолжала работать с прежней интенсивностью.

Новый этап в научной биографии Ольги Александровны начинается в 1954 году, когда она становится сначала научным сотрудником, а с 1961-го года заведующей лабораторией математической физики Ленинградского Отделения Математического института им. В. А. Стеклова АН СССР. На протяжении многих лет Ольга Александровна сочетает успешную научную работу в ЛОМИ с преподаванием на физфаке. В этот период у Ольги Александровны появляются в ЛГУ первые ученики — О. В. Гусева, В. А. Солонников, Н. Н. Уральцева, Л. Д. Фаддеев, К. К. Головкин, А. П. Осколков, А. В. Иванов, В. Я. Ривкинд, затем Л. В. Капитанский, В. Шубов и другие.

Тематика исследований Ольги Александровны в эти годы существенно расширяется. Она много общается с ведущими физиками-теоретиками тех лет и открывает для себя целый ряд новых задач. Список научных публикаций Ольги Александровны даже сейчас поражает широтой ее интересов в то время. Здесь и проблемы абстрактной теории операторов [3], и общая теория краевых задач [4], и задачи теории дифракции [5], сходимость конечно-разностных методов [6], проблемы спектральной теории дифференциальных операторов [7], теория квазилинейных уравнений [8], проблемы вариационного исчисления [9] и многое другое. К этому же периоду относятся и первые публикации Ольги Александровны по гидродинамике (см. [10]) — тематике, которая начиная с 1954-го года на протяжении вот уже почти 50-ти лет неизменно занимала в ее исследованиях одно из центральных мест. Неудивительно, что многие крупные достижения в этой области связаны с ее именем. Так, в 1958-ом году Ольга Александровна в работе [11] устанавливает вариант мультипликативных неравенств

$$\|u\|^4_{L^4(\Omega)} \leqslant C\|u\|^2_{L^2(\Omega)}\|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)}, \quad \forall u \in \overset{\circ}{W}{}^1_2(\Omega), \quad \Omega \subset \mathbb{R}^2,$$

ныне известных как “неравенства Ладыженской”. Эти неравенства позволили ей доказать глобальную однозначную разрешимость системы Навье-Стокса в двумерном случае, см [11], [12]. В трехмерном случае аналогичный результат на конечном промежутке времени, величина которого зависит от некоторых норм данных задачи, а также на бесконечном промежутке времени, если нормы данных достаточно малы, был установлен в 1957-ом году в совместной работе с А. А. Киселевым [13].

В работе [14] она доказала глобальную разрешимость основной краевой задачи для стационарной системы Навье–Стокса в произвольных ограниченных областях, а также задачи обтекания. Ей был проведен и всесторонний анализ соответствующих линеаризованных задач, как стационарных, так и нестационарных, в их числе и спектральной задачи для оператора Стокса. Все эти исследования в 1961-ом году оформились в знаменитую монографию О. А. Ладыженской “Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости” [15] — переведенную на многие языки. Эта была первая в истории гидродинамики книга, представившая последовательное и математически строгое изложение предмета. По сей день она является непревзойденным введением в эту область.

В статье [13] была высказана уверенность, что класс решений, найденный Хопфом в его работе 1951-го года [16], недопустимо широк в том смысле, что в трехмерном случае в нем неверна теорема единственности (в связи с этим Ольга Александровна назвала эти решения "слабыми"). Позже она подтвердит это мнение, доказав следующие два факта: 1) для справедливости теоремы единственности достаточно потребовать от поля скоростей v принадлежности к одному из пространств

$$L^{q,r}(Q_T) \equiv L^r(0,T;L^q(\Omega)), \quad \frac{1}{r}+\frac{3}{2q} \leqslant \frac{1}{2}, \quad \begin{array}{c} r\in[2,\infty),\ q\in[3,\infty], \\ \text{или } r=\infty,\ q>3, \end{array}$$

(предельный случай $r=\infty$, $q=3$ был рассмотрен много позже другими математиками) и 2) теорема единственности теряется в классах $L^{q,r}(Q_T)$ с q и r, не удовлетворяющими условиям пункта 1). Правда, неединственность была доказана не для краевого условия прилипания. Эти результаты, а также результаты Ладыженской по конечно-разностным схемам и некоторая информация по предложенным ею модификациям уравнений Навье–Стокса, вошли во второе русское издание монографии [15], вышедшее в 1970-ом году (см. [17]).

Другой проблемой, ставшей одной из основных тем исследований О. А. Ладыженской начиная с середины 50-ых годов, является теория регулярности решений квазилинейных уравнений эллиптического и параболического типов. Большинство результатов в этом направлении были получены ею в соавторстве с ее ученицей Н. Н. Уральцевой. Отправными точками их исследований были работа Ольги Александровны 1956-го года [18] по оценке градиентов решений эллиптических и параболических квазилинейных уравнений и знаменитая работа Е. Де Джоджи [19], который в 1957 году установил, что решения линейного равномерно эллиптического уравнения

$$(a_{ij}(x)u_{x_j})_{x_i}=0$$

с измеримыми коэффициентами будут непрерывны по Гельдеру. (Аналогичный результат был независимо получен Дж. Нэшем [20] в 1958-ом). О. А. Ладыженская и Н. Н. Уральцева существенно усовершенствовали технику Де Джорджи, распространив ее на неоднородные линейные и квазилинейные как эллиптические, так и параболические уравнения. Помимо этого был развит аппарат для доказательства априорных оценок решений эллиптических уравнений с сильными нелинейностями. Эти исследования позволили установить неулучшаемые результаты по регулярности решений квазилинейных уравнений, удовлетворяющих т.н. естественным условиям роста. Тем самым фактически было дано полное и окончательное решение 19-ой и 20-ой проблем Гильберта для скалярных задач. В 1964-ом году этим исследованиям подвела итог монография [21], второе издание которой вышло в 1973-ем. Аналогичные результаты для квазилинейных параболических уравнений вошли в 1967-ом в монографию [22], написанную Ольгой Александровной в соавторстве с В. А. Солонниковым и Н. Н. Уральцевой. Цикл работ Ольги Александровны и Нины Николаевны, посвященный нелинейным параболическим уравнениям, в 1969-ом году был удостоен Государственной премии СССР.

В дальнейшем Ольга Александровна обращается к исследованию неравномерно эллиптических и параболических квазилинейных уравнений. Так, в работе [23] (написанной в соавторстве с Н. Н. Уральцевой) установлены локальные оценки максимума модуля градиента решений уравнений типа средней кривизны.

Еще одним крупнейшим достижением О. А. Ладыженской является ее вклад в развитие теории аттракторов бесконечномерных динамических систем. В пионерской работе 1972-го года [24] она доказала существование глобального B- аттрактора для системы Навье-Стокса в двумерном случае. Этот результат привлек внимание не только математиков, но и физиков-теоретиков. Отметим также работу [25], в которой дается простой и очень изящный способ оценки хаусдорфовой размерности аттрактора для диссипативных систем, порожденных уравнениями в частных производных различных типов. Многие из исследований Ольги Александровны в данном направлении вошли в ее монографию [26], изданную в 1991-ом году в Кембридже. Эта книга была отмечена в 1992-ом году премией имени С. Ковалевской Российской Академии Наук.

В 90-ые годы Ольга Александровна продолжает успешно работать в различных областях математической физики. В это время она возобновляет свои исследования “модифицированной системы Навье-Стокса" (см. [29], [30]) — моделей гидродинамического типа, которые она предложила на Всемирном Математическом конгрессе в 1965-ом году для описания движения вязкой жидкости при больших градиентах скоростей. Эти модели хороши тем, что для них удается доказать глобальную однозначную разрешимость (см. работы [27], [28]), хотя они, по-видимому, не исключают возникновения у решений особенностей. Кроме того, в эти годы О. А. Лажыденская активно работает над задачами теории вполне нелинейных уравнений ([31]—[33]) и многими другими проблемами.

Научные достижения Ольги Александровны признаны во всем мире. О. А. Ладыженская — действительный член Российской академии наук с 1990 года (член-корреспондент — с 1981 года). Интересно, что "официальное" признание на Западе пришло к ней в каком-то смысле раньше, чем в нашей стране — и это несмотря на то, что до 1988 она фактически не выезжала за рубеж. Так, она является иностранным членом немецкой академии Deutsche Academia der Naturforschung Leopoldina с 1985 года и итальянской академии Academia Nazionale dei Lincei с 1989 года. В 2001-ом году она избрана иностранным членом Американской Академии Наук и Искусств в Беркли, а в 2002-ом году — почетным доктором Боннского университета.

А. А. Архипова, М. С. Бирман, В. С. Буслаев,
В. Г. Осмоловский, С. И. Репин, Г. А. Серегин,
Н. Н. Уральцева, Т. Н. Шилкин

Литература

1. О. А. Ладыженская, *О замыкании эллиптического оператора.* — ДАН **79 (5)** (1951), 723–725.
2. О. А. Ладыженская, *Смешанная задача для гиперболического уравнения.* М.: Гостехтеориздат, 1953.
3. О. А. Ладыженская, *О решении нестационарных операторных уравнений различных типов..* — ДАН **102 (2)** (1955), 207–210.
4. О. А. Ладыженская, *О разрешимости основных краевых задач для уравнений параболического и гиперболического типов.* — ДАН **97 (3)** (1954), 395–398.
5. О. А. Ладыженская, *О решении общей задачи дифракции.* — ДАН **96 (3)** (1954), 433–436.
6. О. А. Ладыженская, *Метод конечных разностей в теории уравнений с частными производными.* — УМН **12 (5)** (1957), 123–148.

7. О. А. Ладыженская и Л. Д. Фаддеев, *К теории возмущений непрерывного спектра.* — ДАН **120 (6)** (1958), 1187–1190.
8. О. А. Ладыженская, *Первая краевая задача для квазилинейных параболических уравнений.* — ДАН **107 (5)** (1956), 636–639.
9. О. А. Ладыженская, *О дифференциальных свойствах обобщенных решений некоторых многомерных вариационных задач.* — ДАН **120 (5)** (1958), 956–959.
10. А. А. Киселев и О. А. Ладыженская, *О решении линеаризованных уравнений плоского нестационарного течения вязкой несжимаемой жидкости.* — ДАН **95 (6)** (1954), 1161–1164.
11. О. А. Ладыженская, *Решение "в целом" краевой задачи для уравнений Навье-Стокса в случае двух пространственных переменных.* — ДАН **123 (3)** (1958), 427–429.
12. O. A. Ladyzhenskaya, *Solution "in the large" of the non-stationary boundary value problem for the Navier-Stokes system with two space variables.* — Comm. Pure Appl. Math. **12 (3)** (1959), 427–433.
13. А. А. Киселев и О. А. Ладыженская О существовании и единственности решения нестационарной задачи для вязкой несжимаемой жидкости, — Известия АН СССР, Сер. матем. **21 (5)** (1957), 665–680.
14. О. А. Ладыженская, *Исследование уравнений Навье-Стокса в случае стационарного движения несжимаемой жидкости.* — Успехи мат. наук **15** (1959), 75–97.
15. О. А. Ладыженская, *Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости..* М.: Физматгиз, 1961.
16. E. Hopf, *Über die Anfangswertaufgabe für die hydrodynamischen Grundgleichungen.* — Math. Nachrichten **4** (1950–51), 213–231.
17. О. А. Ладыженская, *Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости..* М.: Наука, 1970.
18. О. А. Ладыженская, *Первая краевая задача для квазилинейных параболических уравнений.* — Доклады АН СССР **107 (5)** (1956), 636–639.
19. E. De Giorgi, *Sulla differenziabilita e l'analitica delle estremali degli integrali multipli regolari.* — Memorie delle Acc. Sci. Torino, Ser. 3 **3 (1)** (1957), 25–43.
20. J. Nash, *Continuity of solutions of parabolic and elliptic equations.* — Amer. Journ. Math. **80 (4)** (1958), 931–954.
21. О. А. Ладыженская и Н. Н. Уральцева, *Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа.* М., Наука, 1964.
22. О. А. Ладыженская, В. А. Солонников и Н. Н. Уральцева, *Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа.* М., Наука, 1967.
23. O. A. Ladyzhenskaya and N. N. Uraltseva, *Local estimates for gradients of solutions of nonuniformly elliptic and parabolic equations.* — Comm. Pure Appl. Math. **23** (1970), 677–703.
24. О. А. Ладыженская, *О динамической системе, порождаемой уравнениями Навье–Стокса.* — Зап. научн. семинаров ЛОМИ **27** (1972), 91–115.
25. О. А. Ладыженская, *О конечномерности ограниченных инвариантных множеств для системы Навье-Стокса и других диссипативных систем.* — Зап. научн. семин. ЛОМИ **115** (1982), 137–155.

26. O. A. Ladyzhenskaya, *Attractors for semi-groups and evolution equations*. Cambridge a.o.: Cambridge Univ. Press,, 1991.
27. О. А. Ладыженская, *О новых уравнениях для описания движений вязких несжимаемых жидкостей и разрешимости в целом для них краевых задач.* — Труды МИАН **102** (1967), 85–104.
28. О. А. Ладыженская, *О модификациях уравнений Навье-Стокса для больших градиентов скоростей.* — Зап. научн. семин. ЛОМИ **7** (1968), 125-154.
29. О. А. Ладыженская и Г. А. Серегин, *О гладкости решений систем, описывающих течение обобщенных ньютоновских жидкостей, и об оценке размерностей их аттракторов.* — Известия РАН, Сер. математическая **62** **(1)** (1998), 59–122.
30. O. A. Ladyzhenskaya and G. A. Seregin., *On disjointness of solutions to the MNS equations.* — Translations of AMS **189** (1999), 159–179.
31. Н. М. Ивочкина и О. А. Ладыженская, *Оценка производных второго порядка на границе для гиперповерхностей, изменяющихся под действием их главных кривизн.* — Алгебра и Анализ **9** (1997), 30–50.
32. Н. М. Ивочкина и О. А. Ладыженская, *Оценка производных первого порядка для решений некоторых классов нелинейных параболических уравнений..* — Алгебра и Анализ **9** (1997), 109–131.
33. N. M. Ivochkina and O. A. Ladyzhenskaya, *On classical solvability of the first initial-boundary value problem for equations generated by curvatures,.* — TMNA, Journal of the Juliusz Schauder Center **11** (1998), 375–395.