Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 288, 2002 г.

Д. Е. Апушкинская, А. И. Назаров

ЭЛЛИПТИЧЕСКАЯ ЗАДАЧА ДИРИХЛЕ В ВЕСОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

**Дорогой Ольге Александровне
к юбилею от "научных внуков"**

В данной работе исследуется разрешимость задачи Дирихле для квазилинейных эллиптических недивергентных уравнений второго порядка, имеющих неограниченные особенности по независимым переменным. Теория разрешимости такой задачи в случае, когда мажоранты правой части уравнения принадлежат классическому пространству Лебега, была в основном разработана О. А. Ладыженской и Н. Н. Уральцевой (см. обзор результатов, а также обширную библиографию в [1]).

Основное отличие данной статьи от работ, упомянутых в [1], состоит в том, что мажоранты правой части уравнения предполагаются принадлежащими весовому пространству $\mathbb{L}_p$ с весом, равным некоторой степени расстояния от точки до границы области.

Работа разделена на три параграфа. В §1 дается постановка задачи и формулируется основной результат. Вывод априорных оценок приводится в §2. Наконец, в §3 доказываются теоремы существования для решений линейной и квазилинейной задач.

Введем обозначения, которые будут использоваться на протяжении всей статьи:
$x = (x_1, x') = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ – вектор в $\mathbb{R}^n$;
$|x|$, $|x'|$ – евклидовы нормы в соответствующих пространствах;
$\mathbb{R}^n_+ = \{x \in \mathbb{R}^n : x_1 > 0\}$;
$\Omega \subset \{x \in \mathbb{R}^n : 0 < x_1 < R\}$ – область в $\mathbb{R}^n$ с границей $\partial\Omega$;
$|\Omega|$ – мера Лебега области Ω;
$d(x)$ – расстояние от точки $x \in \Omega$ до $\partial\Omega$;
$B^n_\rho(x^0)$ – открытый шар в $\mathbb{R}^n$ с центром в точке x^0 и радиусом ρ;
$\Pi_\rho = \{x \in \mathbb{R}^n : 0 < x_1 < \rho, |x'| < \rho\}$;

Γ_ρ – часть $\partial\Pi_\rho$, расположенная в гиперплоскости $x_1 = 0$.

Примем соглашение о том, что индексы i и j изменяются от 1 до n. Применяется правило суммирования по повторяющимся индексам.

Обозначим через D_i оператор дифференцирования по переменной x_i. В частности, $Du = (D_i u)$ есть градиент функции u. $D^2u = D(Du)$ – матрица Гессе функции u.

Введем следующие пространства:
$C(\overline{\Omega})$ – пространство непрерывных функций с нормой $\|\cdot\|_\Omega$;
$C^2(\overline{\Omega})$ – пространство функций непрерывных в Ω вместе со всеми своими производными до второго порядка включительно;
$W_p^2(\Omega)$ $(1 \leqslant p \leqslant \infty)$– пространство Соболева с нормой

$$\|u\|_{W_p^2(\Omega)} = \|D^2u\|_{p,\Omega} + \|u\|_{p,\Omega},$$

где $\|\cdot\|_{p,\Omega}$ обозначает стандартную норму в $L_p(\Omega)$;
$L_{p,(\alpha)}(\Omega)$ – весовое пространство с нормой $\|\cdot\|_{p,(\alpha),\Omega}$, где

$$\|u\|_{p,(\alpha),\Omega} = \|\,(x_1)^\alpha\, u\|_{p,\Omega};$$

$\mathbb{L}_{p,(\alpha)}(\Omega)$ – весовое пространство с нормой $|\!|\!|\cdot|\!|\!|_{p,(\alpha),\Omega}$, где

$$|\!|\!|u|\!|\!|_{p,(\alpha),\Omega} = \|(d(x))^\alpha\, u\|_{p,\Omega}\,;$$

$\widetilde{V}^2_{p,(\alpha)}(\Omega)$ и $\widetilde{\mathbb{V}}^2_{p,(\alpha)}(\Omega)$ – множества функций с конечными полунормами $\|D^2u\|_{p,(\alpha),\Omega}$ и $|\!|\!|D^2u|\!|\!|_{p,(\alpha),\Omega}$ соответственно.

Заметим, что полунормы $\|D^2u\|_{p,(\alpha),\Omega}$ и $|\!|\!|D^2u|\!|\!|_{p,(\alpha),\Omega}$ превращаются в нормы, если $u|_{\partial\Omega} = 0$.

Положим

$$f_+ = \max\,\{f, 0\}, \qquad f_- = \max\,\{-f, 0\}, \qquad \operatorname*{osc}_\Omega f = \sup_\Omega f - \inf_\Omega f.$$

Показатель q может принимать значения $q > n$. Введем обозначение $\widehat{\alpha}(q) = 1 - \frac{n}{q}$.

Для обозначения констант используем буквы M, N, C с индексами или без них. Для указания величин, от которых они зависят, мы используем запись $N(\ldots)$.

§1. Постановка задачи

В области Ω рассмотрим уравнение

$$-a^{ij}(x, u, Du)D_iD_ju + a(x, u, Du) = 0 \tag{1}$$

с граничным условием Дирихле

$$u = 0 \quad \text{на} \quad \partial\Omega. \tag{2}$$

Будем считать, что (a^{ij}) – симметричная матрица, и функции a^{ij} имеют первые обобщенные производные по всем аргументам. Предположим также, что функции a^{ij} и a из уравнения (1) удовлетворяют следующим структурным ограничениям: для любых $x \in \Omega$, $z \in \mathbb{R}^1$, $p \in \mathbb{R}^n$

$$\nu|\xi|^2 \leqslant a^{ij}(x,z,p) \leqslant \nu^{-1}|\xi|^2 \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n, \tag{A0}$$

$$|a(x,z,p)| \leqslant \mu|p|^2 + b(x)|p| + \Phi(x), \tag{A1}$$

$$|p|\left|\frac{\partial a^{ij}(x,z,p)}{\partial p_k}\right| \leqslant \mu \quad \text{при} \quad |p| \geqslant 1, \tag{A2}$$

$$\left|\frac{\partial a^{ij}(x,z,p)}{\partial z}p_k + \frac{\partial a^{ij}(x,z,p)}{\partial x_k}\right| \leqslant \mu|p| + \Phi(x), \tag{A3}$$

$$b, \Phi \in \mathbb{L}_{q,(\alpha)}(\Omega), \tag{A4}$$

где ν и μ – некоторые положительные константы.

Теорема 1. *Пусть выполнены следующие условия:*
(i) $n < q < \infty$, $-1/q < \alpha < \widehat{\alpha}(q)$, $\partial\Omega \in \widetilde{\mathbb{V}}^2_{q,(\alpha)}$*;*
(ii) *для всех возможных решений* $u^{[\tau]} \in \widetilde{\mathbb{V}}^2_{q,(\alpha)}(\Omega)$, $\tau \in [0,1]$ *семейства задач*

$$\begin{aligned} &\tau\left(-a^{ij}(x,u,Du)D_iD_ju + a(x,u,Du)\right) - (1-\tau)\Delta u = 0 \quad \text{в} \quad \Omega, \\ &u|_{\partial\Omega} = 0, \end{aligned} \tag{3}$$

справедлива оценка

$$\|u^{[\tau]}\|_\Omega \leqslant M_0;$$

(iii) *при* $|z| \leqslant M_0$, *выполнены условия* (A0), (A1), (A2), (A3), (A4);
(iv) *функция* $a(\cdot,z,p)$ *непрерывна по* (z,p) *как элемент пространства* $\mathbb{L}_{q,(\alpha)}(\Omega)$.

Тогда задача (3) *имеет при любом* $\tau \in [0,1]$ *хотя бы одно решение* $\widehat{u}^{[\tau]} \in \widetilde{\mathbb{V}}^2_{q,(\alpha)}(\Omega)$. *В частности,* $\widehat{u}^{[1]}$ *– решение задачи* (1)–(2).

§2. Априорные оценки

Пусть $\mathcal{L}$ – линейный равномерно эллиптический оператор в Ω:

$$\mathcal{L}u \equiv -a^{ij}(x)D_iD_ju + b^i(x)D_iu,$$

с константой эллиптичности ν. Введем обозначение $\mathbf{b}(x) = \big(b^i(x)\big)$.

Шаг 1. ОЦЕНКИ МАКСИМУМА

Рассмотрим сначала случай, когда b_i – **ограниченные** функции.

Лемма 2. *Пусть неотрицательная функция $B \in C^2(\overline{\Omega})$ такова, что*

$$\mathcal{L}B \geqslant |b^1| \left(1 + \ln \frac{R}{x_1}\right) \quad \text{п.в. в} \quad \Omega.$$

Тогда для любой функции $u \in \widetilde{V}^2_{\infty,(1)}(\Omega)$, удовлетворяющей условию $u\big|_{\partial\Omega} \leqslant 0$, справедлива оценка

$$u \leqslant \frac{\|B\|_\Omega + e^{-1}R}{\nu} \|(\mathcal{L}u)_+\|_{\infty,(1),\Omega^u}, \tag{4}$$

где $\Omega^u = \{x \in \Omega : u(x) > 0\}$.

Доказательство. Введем функцию

$$v = \frac{\|(\mathcal{L}u)_+\|_{\infty,(1),\Omega^u}}{\nu} \left(x_1 \ln \frac{R}{x_1} + B\right).$$

Элементарное вычисление дает

$$\mathcal{L}v \geqslant \frac{\|(\mathcal{L}u)_+\|_{\infty,(1),\Omega^u}}{x_1} \geqslant \mathcal{L}u \qquad \text{в} \quad \Omega^u.$$

Далее, применяя к разности $u - v$ в Ω^u принцип максимума Александрова [2], получим $u \leqslant v$, что гарантирует (4). □

Лемма 3. *Пусть неотрицательная функция $B \in C^2(\overline{\Omega})$ такова, что*

$$\mathcal{L}B \geqslant |\mathbf{b}| \qquad \text{п.в. в} \quad \Omega.$$

Тогда для любой функции $u \in W^2_n(\Omega)$, удовлетворяющей условию $u\big|_{\partial\Omega} \leqslant 0$, справедлива оценка

$$u \leqslant N_1(n) \frac{\|B\|_\Omega + N_2(n,\nu)R}{\nu} \|(\mathcal{L}u)_+\|_{n,\Omega^u}.$$

Доказательство. Утверждение леммы доказывается дословным повторением доказательства леммы 1.1 [3]. □

Теорема 4. *Пусть $n < q \leqslant \infty$. Пусть неотрицательная функция $B \in C^2(\overline{\Omega})$ такова, что*

$$\mathcal{L}B \geqslant |\mathbf{b}| \left(1 + \ln \frac{R}{x_1}\right) \qquad \text{п.в. в} \quad \Omega. \tag{5}$$

Тогда для любой функции $u \in \widetilde{V}^2_{q,(\widehat{\alpha}(q))}(\Omega)$, удовлетворяющей условию $u\big|_{\partial\Omega} \leqslant 0$, справедлива оценка

$$u \leqslant N_3(n) \frac{\|B\|_{\Omega^u} + N_4(n,\nu)R}{\nu} \|(\mathcal{L}u)_+\|_{q,(\widehat{\alpha}(q)),\Omega^u}. \tag{6}$$

Доказательство. Утверждение доказывается аналогично теореме 2.1 [3]. Отличие состоит лишь в том, что вместо лемм 1.3 и 1.1 из [3] используются леммы 2 и 3. □

Рассмотрим теперь **неограниченные** функции b^i.

Теорема 5. *Пусть $n < q_0, q_1 \leqslant \infty$, $\delta = \widehat{\alpha}(q_1) - \alpha_1 > 0$ и $R \leqslant 1$.*

Существует константа $\sigma = \sigma(n,\nu,\delta)$, такая, что для любой функции $u \in \widetilde{V}^2_{q_0,(\widehat{\alpha}(q_0))}(\Omega)$ при выполнении условий

$$u\big|_{\partial\Omega} \leqslant 0, \qquad \|\mathbf{b}\|_{q_1,(\alpha_1),\Omega} \leqslant \sigma$$

справедливо неравенство

$$u \leqslant C_0(n,\nu)R\|(\mathcal{L}u)_+\|_{q_0,(\widehat{\alpha}(q_0)),\Omega^u}. \tag{7}$$

Доказательство. Заметим, что достаточно получить оценку (7) только для гладкой области $\Omega \subset\subset \{0 < x_1 < R\}$. Общий случай получается из этого так же, как в п. 3 в доказательстве теоремы 2.1 [3].

1. Пусть $q_1 = \infty$. Тогда условие теоремы 5 означает, что

$$|\mathbf{b}(x)|(x_1)^{1-\delta} \leqslant \sigma \qquad \text{п.в. в} \quad \Omega.$$

Поэтому для функции $B = x_1 \ln \frac{R}{x_1}$ имеем

$$\mathcal{L}B \geqslant \frac{\nu}{x^1} - |\mathbf{b}| \left(1 + \ln \frac{R}{x_1}\right) \geqslant \frac{\nu}{x_1} \left(1 - \frac{\sigma}{\nu} x_1^\delta \left(1 + \ln \frac{R}{x_1}\right)\right) \quad \text{п.в. в} \quad \Omega.$$

Заметим, что неравенства

$$x_1^\delta \left(1 + \ln \frac{R}{x_1}\right) \leqslant C(\delta) R^\delta \leqslant C(\delta)$$

справедливы на отрезке $[0,R]$. Следовательно при $\sigma = \frac{\nu}{2C(\delta)}$ получаем

$$\mathcal{L}B \geqslant |\mathbf{b}| \left(1 + \ln \frac{R}{x_1}\right) \qquad \text{п.в. в} \quad \Omega,$$

и оценка (7) следует из (6).

2. Пусть $q_0, q_1 < \infty$. В этом случае достаточно получить оценку (7) для операторов с гладкими коэффициентами и гладких функций u, а затем провести предельный переход.

Определим B как решение краевой задачи

$$\mathcal{L}B = |\mathbf{b}| \left(1 + \ln \frac{R}{x_1}\right) \equiv \widetilde{b} \quad \text{в } \Omega, \qquad B\big|_{\partial\Omega} = 0.$$

Тогда решение B удовлетворяет неравенству (5) из условия теоремы 4. Поэтому оценка (6), примененная при $q = q_1$ и $u = B$, дает

$$\begin{aligned} B &\leqslant N_3 \frac{\|B\|_\Omega + N_4 R}{\nu} \|\widetilde{b}\|_{q_1,(\widehat{\alpha}(q_1)),\Omega} \\ &\leqslant N_3 \frac{\|B\|_\Omega + N_4 R}{\nu} C(\delta) R^\delta \|\mathbf{b}\|_{q_1,(\alpha_1),\Omega} \\ &\leqslant \frac{N_3 \sigma C(\delta)}{\nu} (\|B\|_\Omega + N_4 R). \end{aligned} \tag{8}$$

При $\sigma = \frac{\nu}{2N_3 C(\delta)}$ из (8) получаем

$$\|B\|_\Omega \leqslant N_4 R,$$

и снова (7) следует из (6).

3. Пусть, наконец, $q_0 = \infty, q_1 < \infty$.

Тогда для достаточно большого конечного q из п. 2 вытекает, что

$$u \leqslant C_0 R \|(\mathcal{L}u)_+\|_{q,(\widehat{\alpha}(q)),\Omega^u} \leqslant C_0 R \|(\mathcal{L}u)_+\|_{\infty,(1),\Omega^u} (\inf_\Omega |x'|)^{-\frac{n}{q}} |\Omega|^{\frac{1}{q}}.$$

Переходя к пределу при $q \to \infty$, получаем оценку (7) для $q_0 = \infty$, $q_1 < \infty$. $\square$

Шаг 2. ГЕЛЬДЕРОВСКИЕ ОЦЕНКИ РЕШЕНИЙ

Далее на протяжении всей статьи мы считаем, что

$$n < q < \infty, \qquad \delta = \widehat{\alpha}(q) - \alpha_+ > 0.$$

Лемма 6. *Пусть $\rho \leqslant 1$. Тогда для любого $\beta_1 \in]0,1[$ существуют положительные константы $\sigma_1 = \sigma_1(n,\nu,\beta_1,\delta)$ и $\varepsilon = \varepsilon(n,\nu,\beta_1)$, такие, что для любой функции $u \in \widetilde{V}^2_{q,(\widehat{\alpha}(q))}(\Pi_\rho) \cap C(\overline{\Pi}_\rho)$ при выполнении условий*

$$u \geqslant 0 \quad \text{в} \quad \overline{\Pi}_\rho, \qquad u \geqslant k > 0 \quad \text{на} \quad \Gamma_\rho,$$
$$\|\mathbf{b}\|_{q,(\alpha),\Pi_\rho} \leqslant \sigma_1$$

справедливо неравенство

$$u \geqslant (1-\beta_1)k - N_5(n,\nu)\rho\|(\mathcal{L}u)_-\|_{q,(\widehat{\alpha}(q)),\Pi_\rho} \quad \text{в} \quad \Pi_{\varepsilon\rho}. \tag{9}$$

Доказательство. Не умаляя общности, положим $k=1$. С помощью масштабирования превратим Π_ρ в Π_1. В новых координатах

$$\widetilde{\mathcal{L}}\widetilde{u} \equiv -\widetilde{a}^{ij}D_iD_j\widetilde{u} + \rho\widetilde{b}^iD_i\widetilde{u} = \rho^2(\mathcal{L}u) \qquad \text{в} \quad \Pi_1, \tag{10}$$

где $\widetilde{u}(x) = u(\rho x)$, $\widetilde{a}^{ij}(x) = a^{ij}(\rho x)$, и т.д.

Введем барьерную функцию

$$\psi(x) = 1 - |x'|^2 + \left(\frac{n-1}{\nu}\right)^2 x_1^2 - \frac{4(n-1)}{\nu}x_1,$$

и положим $\Pi = \Pi_1 \cap \{x_1 < \frac{\nu}{n-1}\}$.

Очевидно, что условия леммы 6 приводят к неравенствам

$$\psi - \widetilde{u} \leqslant 0 \quad \text{на} \quad \partial\Pi, \qquad \widetilde{\mathcal{L}}\psi \leqslant N_6(n,\nu)\rho|\widetilde{\mathbf{b}}| \quad \text{в} \quad \Pi,$$

и

$$\|\rho\widetilde{\mathbf{b}}\|_{q,(\alpha),\Pi} \leqslant \|\rho\widetilde{\mathbf{b}}\|_{q,(\alpha),\Pi_1} = \rho^\delta\|\mathbf{b}\|_{q,(\alpha),\Pi_\rho} \leqslant \sigma_1. \tag{11}$$

Без потери общности считаем, что $\sigma_1 \leqslant \sigma$, где $\sigma = \sigma(n,\nu,\delta)$ – константа из теоремы 5 (при $q_0 = q_1 = q$). Далее, применяя теорему 5 к функции $\psi - \widetilde{u}$ в Π, используя (11) и учитывая вытекающее из (10) очевидное соотношение

$$\|(\widetilde{\mathcal{L}}\widetilde{u})_-\|_{q,(\widehat{\alpha}(q)),\Pi_1} = \rho\|(\mathcal{L}u)_-\|_{q,(\widehat{\alpha}(q)),\Pi_\rho},$$

выводим

$$\widetilde{u}(x) \geqslant \psi(x) - N_7(n,\nu)\rho\|(\mathcal{L}u)_-\|_{q,(\widehat{\alpha}(q)),\Pi_\rho} - N_8(n,\nu)\sigma_1 \quad \text{в} \quad \Pi. \tag{12}$$

Поскольку $\psi(0) = 1$, можно выбрать $\varepsilon = \varepsilon(n,\nu,\beta_1)$ так, чтобы $\Pi_\varepsilon \subset \Pi$ и $\psi \geqslant 1 - \beta_1/2$ в Π_ε. После этого, выбрав σ_1 достаточно малым и вернувшись к исходным переменным, из неравенства (12) получим требуемую оценку (9). $\square$

Теорема 7. *Пусть* $\rho_0 \leqslant 1$, *и функция* $u \in \widetilde{V}^2_{q,(\widehat{\alpha}(q))}(\Pi_{\rho_0}) \cap C(\overline{\Pi}_{\rho_0})$, *такая, что*

$$|u| \leqslant M_0 \quad \textit{в} \quad \Pi_{\rho_0}, \qquad\qquad u = 0 \quad \textit{на} \quad \Gamma_{\rho_0}$$

удовлетворяет неравенству

$$|a^{ij}(x, u, Du) D_i D_j u| \leqslant \mu |Du|^2 + b(x)|Du| + \Phi(x) \qquad \textit{в} \quad \Pi_{\rho_0},$$

где

$$b \in L_{q,(\alpha)}(\Pi_{\rho_0}), \qquad \Phi \in L_{q,(\widehat{\alpha}(q))}(\Pi_{\rho_0}),$$

а функции $a^{ij}(x, z, p)$ *при* $x \in \overline{\Pi}_{\rho_0}$, $z \in \mathbb{R}^1$, $p \in \mathbb{R}^n$ *удовлетворяют неравенствам (A0).*

Если, кроме того,

$$\|b\|_{q,(\alpha),\Pi_{\rho_0}} \leqslant \sigma_1,$$

где $\sigma_1 = \sigma_1(n, \nu, 1/2, \delta)$ *– константа из леммы 6, то*

$$\operatorname*{osc}_{\Pi_\rho} u \leqslant C_1 \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{\gamma_1} \qquad \forall \rho \leqslant \rho_0,$$

где $\gamma_1 = \gamma_1(n, \nu) \in]0, 1[$, *а* $C_1 > 0$ *зависит от* n, ν, μ, M_0, $\|\Phi\|_{q,(\widehat{\alpha}(q)),\Pi_{\rho_0}}$.

Доказательство. Это утверждение выводится из леммы 6 так же, как лемма 2.2 [4] – из леммы 2.1 [4]. □

Шаг 3. ОЦЕНКИ ГРАДИЕНТА РЕШЕНИЯ НА ГРАНИЦЕ

Прежде чем приступить к получению оценок градиента на границе, сформулируем несколько вспомогательных утверждений. Первое утверждение касается внутренних оценок градиента решения эллиптического уравнения. Во втором утверждении приведены оценки для функций, удовлетворяющих линейному эллиптическому неравенству с сингулярностями специального вида. Наконец, в третьем утверждении построено специальное разложение для функций, принадлежащих весовому пространству $L_{q,(\alpha)}$.

Лемма 8. *Пусть* $\rho_0 \leqslant 1$, *и функция* $u \in \widetilde{V}^2_{q,(\alpha)}(\Pi_{\rho_0}) \cap C(\overline{\Pi}_{\rho_0})$, *такая, что*

$$|u| \leqslant M_0 \qquad \textit{в} \quad \Pi_{\rho_0},$$

удовлетворяет в Π_{ρ_0} *уравнению (1).*

Предположим также, что для любых $x \in \overline{\Pi}_{\rho_0}$, $z \in \mathbb{R}^1$, $p \in \mathbb{R}^n$ *функции* $a^{ij}(x,z,p)$ *имеют первые обобщенные производные по всем аргументам и выполнены условия* (A0), (A1), (A2), (A3) *с* b, $\Phi \in L_{q,(\alpha)}(\Pi_{\rho_0})$.

Тогда существует $\lambda = \lambda(n,\nu,q,\delta,\mu) > 0$, *такое, что если шар* $B^n_{x_1^*/2}(x^*)$ *не пересекает* $\partial\Pi_{\rho_0}$ *и*

$$\operatorname*{osc}_{B^n_{x_1^*/2}(x^*)} u \leqslant \omega_0,$$

то

$$|Du(x^*)| \leqslant N_9\,(x^*)^{-1}\left[\operatorname*{osc}_{B^n_{x_1^*/2}(x^*)} u\right]^{\lambda}, \tag{13}$$

где положительные константы N_9 *и* ω_0 *определяются значениями* n, ν, q, δ, μ, $\|b\|_{q,(\alpha),\Pi_{\rho_0}}$, $\|\Phi\|_{q,(\alpha),\Pi_{\rho_0}}$.

Доказательство. Рассмотрим $\varepsilon_1 \leqslant \frac{nq\delta}{(n+q\alpha)}$ и положим $\delta_1 = \frac{nq\delta-(n+q\alpha)\varepsilon_1}{(n+\varepsilon_1)q}$. Заметим, что в силу определения ε_1 выполнено неравенство $n+\varepsilon_1 < q$. По неравенству Гельдера для произвольной функции $f \in L_{q,(\alpha)}(\Pi_{\rho_0})$ и $\rho^* \leqslant \frac{x_1^*}{2}$ имеем

$$\begin{aligned}\|f\|_{n+\varepsilon_1,B^n_{\rho^*}(x^*)} &\leqslant \|f\|_{q,(\alpha),B^n_{\rho^*}(x^*)}\left(\int\limits_{B^n_{\rho^*}(x^*)} x_1^{\frac{-\alpha q(n+\varepsilon_1)}{q-n-\varepsilon_1}}\,dx\right)^{\frac{q-n-\varepsilon_1}{q(n+\varepsilon_1)}}\\ &\leqslant \|f\|_{q,(\alpha),\Pi_{\rho_0}}\,(\rho^*)^{-\alpha}\left|B^n_{\rho^*}(x^*)\right|^{\frac{q-n-\varepsilon_1}{q(n+\varepsilon_1)}}\\ &\leqslant (\rho^*)^{\delta_1}\,N_{10}(n)\|f\|_{q,(\alpha),\Pi_{\rho_0}}.\end{aligned} \tag{14}$$

Это означает, что в $B^n_{\rho^*}(x^*)$ можно применить теорему 2.1 [5] и, следовательно, неравенство (13) фактически доказано (при $b=0$; случай $b \in L_{n+\varepsilon_1}$ рассматривается аналогично); достаточно выписать зависимость от параметра ρ^* константы C в указанной теореме. $\square$

Лемма 9. *Пусть* $r > n$, $u \in W^2_r(\Pi_1) \cap C(\overline{\Pi}_1)$, $u|_{\Gamma_1} = 0$.

Пусть в цилиндре Π_1 *задан оператор*

$$\mathbb{L} \equiv -a^{ij}(x)D_iD_j + \left[b_1^i(x) + b_2^i(x)\right]D_i,$$

с измеримыми коэффициентами $a^{ij} = a^{ji}$, b_1^i, b_2^i, *такой, что,*

$$\nu|\eta|^2 \leqslant a^{ij}(x)\eta_i\eta_j \leqslant \nu^{-1}|\eta|^2 \qquad \forall x \in \overline{\Pi}_1, \quad \eta \in \mathbb{R}^n,$$

$$\mathbf{b}_1 \in L_r(\Pi_1), \quad |\mathbf{b}_2(x)| \leqslant (x_1)^{\beta-1} F \quad \text{в} \quad \Pi_1, \quad F > 0, \quad \beta \in]0,1[.$$

Предположим также, что

$$|(\mathbb{L}u)(x)| \leqslant \Phi(x) + (x_1)^{\beta-1} H \quad \text{в} \quad \Pi_1, \qquad \Phi \in L_r(\Pi_1), \quad H > 0.$$

Тогда существует положительное число $\mathcal{R} = \mathcal{R}(\nu, \beta, F)$, *такое, что справедливы следующие оценки*

$$\frac{u(x)}{x_1} \leqslant N_{12} \qquad \text{в} \quad \Pi_{\mathcal{R}/2}, \tag{15}$$

$$\operatorname*{osc}_{\Pi_\rho} \frac{u(x)}{x_1} \leqslant N_{13}\rho^{\gamma_2} \quad \forall \rho \leqslant \mathcal{R}/4. \tag{16}$$

Здесь $\gamma_2 = \gamma_2(n, \nu, \beta, \widehat{\alpha}(r)) \in]0,1[$, *а положительные константы* N_{12} *и* N_{13} *зависят от тех же параметров, что и* γ_2, *а также от* F, H, $\mathcal{R}$, $\sup_{\Pi_1} u$, $\|\mathbf{b}_1\|_{r,\Pi_1}$, $\|\Phi\|_{r,\Pi_1}$.

Доказательство. Рассмотрим $\mathcal{R} \leqslant \min\left\{1, \left(\frac{\beta(\beta+1)\nu}{14F}\right)^{1/\beta}\right\}$. Для доказательства (15) и (16) достаточно применить последовательно к функции u эллиптический вариант леммы 3.4 [6] и эллиптический вариант леммы 4.5 [6]. Применение первого даст оценку (15), а применение второго – оценку (16). $\square$

Лемма 10. *Пусть* $\rho_0 \leqslant 1$ *и пусть* $\delta_2 = \frac{\delta q - \varepsilon_1}{q - n - \varepsilon_1} \in]0,1[$, *где* ε_1 – *константа из доказательства леммы 8.*

Тогда для любой функции $g \in L_{q,(\alpha)}(\Pi_{\rho_0})$ *существуют* $g_1 \in L_{n+\varepsilon_1}(\Pi_{\rho_0})$ *и* $g_2 \in L_{\infty,(1-\delta_2)}(\Pi_{\rho_0})$, *такие, что*

$$g(x) = g_1(x) + g_2(x),$$

и

$$\|g_1\|_{n+\varepsilon_1,\Pi_{\rho_0}} + \|g_2\|_{\infty,(1-\delta_2),\Pi_{\rho_0}} \leqslant 2\|g\|_{q,(\alpha),\Pi_{\rho_0}}. \tag{17}$$

Доказательство. Не умаляя общности, будем считать, что $g \geqslant 0$ в Π_{ρ_0}. Далее, положим

$$g_1(x) = \left(g(x) - x_1^{\delta_2-1}\varkappa\right)_+, \qquad g_2(x) = g(x) - g_1(x),$$

где положительный параметр $\varkappa$ будет фиксирован позднее.

Очевидно, что
$$\|g_2\|_{\infty,(1-\delta_2),\Pi_{\rho_0}} \leqslant \varkappa. \tag{18}$$
Заметим также, что неравенство Гельдера гарантирует оценку
$$\|g_1\|_{n+\varepsilon_1,\Pi_{\rho_0}} = \left(\int\limits_{\mathcal{G}} \left(g(x) - x_1^{\delta_2-1}\varkappa\right)^{n+\varepsilon_1} dx\right)^{\frac{1}{n+\varepsilon_1}}$$
$$\leqslant \left(\int\limits_{\mathcal{G}} x_1^{\alpha q}\left(g(x) - x_1^{\delta_2-1}\varkappa\right)^q dx\right)^{\frac{1}{q}} \left(\int\limits_{\mathcal{G}} x_1^{-(n+\varepsilon_1)(1-\delta_2)} dx\right)^{\frac{\alpha}{(n+\varepsilon_1)(1-\delta_2)}}$$
$$\leqslant \|g\|_{q,(\alpha),\Pi_{\rho_0}} \left(\int\limits_{\mathcal{G}} x_1^{-(n+\varepsilon_1)(1-\delta_2)} dx\right)^{\frac{\alpha}{(n+\varepsilon_1)(1-\delta_2)}}, \tag{19}$$
где $\mathcal{G} = \left\{x : g(x) > x_1^{\delta_2-1}\varkappa\right\}$.

С другой стороны,
$$\|g\|_{q,(\alpha),\Pi_{\rho_0}} \geqslant \left(\int\limits_{\mathcal{G}} x_1^{\alpha q}\,(g(x))^q\,dx\right)^{1/q} \geqslant \varkappa \left(\int\limits_{\mathcal{G}} x_1^{q(\alpha+\delta_2-1)} dx\right)^{1/q}$$
$$= \varkappa \left(\int\limits_{\mathcal{G}} x_1^{-(n+\varepsilon_1)(1-\delta_2)} dx\right)^{1/q}. \tag{20}$$

Объединяя (19) и (20), получаем
$$\|g_1\|_{n+\varepsilon_1,\Pi_{\rho_0}} \leqslant \varkappa^{\frac{-\alpha q}{(n+\varepsilon_1)(1-\delta_2)}} \left(\|g\|_{q,(\alpha),\Pi_{\rho_0}}^{1+\frac{\alpha q}{(n+\varepsilon_1)(1-\delta_2)}}\right). \tag{21}$$

Теперь, выбрав $\varkappa = \|g\|_{q,(\alpha),\Pi_{\rho_0}}$ и сложив (21) и (18), мы немедленно приходим к требуемой оценке (17). □

Теорема 11. *Пусть выполнены условия леммы 8. Предположим также, что* $u|_{\Gamma_{\rho_0}} = 0$ *и*
$$\|b\|_{q,(\alpha),\Pi_{\rho_0}} \leqslant \sigma_1, \tag{22}$$
где $\sigma_1 = \sigma_1(n,\nu,1/2,\delta)$ *– константа из леммы 6.*

Тогда справедливы следующие оценки:

$$\sup_{\Gamma_{\rho_0/4}} |Du| \leqslant C_2, \tag{23}$$

$$\operatorname*{osc}_{\Gamma_\rho} Du \leqslant C_3 \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{\gamma_3} \qquad \forall \rho \leqslant \rho_0/8. \tag{24}$$

где $\gamma_3 = \gamma_3(n,\nu,q,\delta,\mu) \in]0,1[$, *а положительные константы* C_2, C_3 *зависят от тех же параметров, что и* γ_3, *а также от* ρ_0, M_0, $\|b\|_{q,(\alpha),\Pi_{\rho_0}}$, $\|\Phi\|_{q,(\alpha),\Pi_{\rho_0}}$.

Доказательство. Заметим, что достаточно получить (23) и (24) только для гладких функций u, а затем провести предельный переход.

В силу леммы 10 функции b и Φ представимы в виде сумм b_1+b_2 и $\Phi_1+\Phi_2$, причем для каждой из этих сумм выполняется соответствующее неравенство (17).

Далее, согласно теореме 7 и лемме 8, имеем

$$|Du(x)| \leqslant N_{14}\,(x_1)^{\lambda_1-1} \qquad \text{в} \quad \Pi_{\rho_0/2},$$

где $\lambda_1 = \lambda\gamma_1$, а константа N_{14} определяется известными величинами, перечисленными в условии теоремы. Без ограничения общности можно считать $\lambda_1 \leqslant \delta_2$, где δ_2 – константа из леммы 10. Следовательно, в цилиндре $\Pi_{\rho_0/2}$ неравенство (A1) можно переписать следующим образом:

$$|a(x,u,Du)| \leqslant \left(b_1(x)+b_2(x)+\widehat{b}(x)\right)|Du| + \Phi_1(x)+\Phi_2(x), \tag{25}$$

где $\widehat{b}(x) = \mu N_{14}\,(x_1)^{\lambda_1-1}$.

Теперь, рассуждая как в теореме 3.1 [7], из неравенства (25) получаем

$$|\widetilde{\mathcal{L}}u| \leqslant \Phi_1(x)+\Phi_2(x) \qquad \text{в} \quad \Pi_{\rho_0/2}, \tag{26}$$

где

$$\widetilde{\mathcal{L}} \equiv -\widetilde{a}^{ij}_{(u)}(x) D_i D_j + \left[\widetilde{b}^i_1(x)+\widetilde{b}^i_2(x)\right] D_i u,$$

$$\widetilde{a}^{ij}_{(u)}(x) = a^{ij}(x,u,Du), \quad |\widetilde{\mathbf{b}}_1(x)| \leqslant b_1(x), \quad |\widetilde{\mathbf{b}}_2(x)| \leqslant b_2(x)+\widehat{b}(x).$$

Очевидно, что

$$b^i_1,\ \Phi_1 \in L_{n+\varepsilon_1}(\Pi_{\rho_0}), \tag{27}$$

а из неравенства (17) следуют оценки

$$|\widetilde{\mathbf{b}}_2(x)| \leqslant (x_1)^{\lambda_1-1}\left[\|b_2\|_{\infty,(1-\delta_2),\Pi_{\rho_0}} + \mu N_{14}\right], \tag{28}$$

$$|\Phi_2(x)| \leqslant (x_1)^{\lambda_1-1}\,\|\Phi_2\|_{\infty,(1-\delta_2),\Pi_{\rho_0}}. \tag{29}$$

Соотношения (26)–(29) и условие $u|_{\Gamma_{\rho_0}} = 0$ показывают, что к функции u применима лемма 9 при

$$F = \left[\|b_2\|_{\infty,(1-\delta_2),\Pi_{\rho_0}} + \mu N_{14}\right], \quad H = \|\Phi_2\|_{\infty,(1-\delta_2),\Pi_{\rho_0}}.$$

Эта лемма дает (23) и (24) для всех $\rho \leqslant \rho_1 = \min\{\rho_0/8, \mathcal{R}_0/4\}$, где $\mathcal{R}_0 := \mathcal{R}(\nu, \lambda_1, F)$ – константа из леммы 9. В случае $\rho_1 < \rho \leqslant \rho_0/8$ оценка осцилляции Du на Γ_ρ получается следующим образом:

$$\operatorname*{osc}_{\Gamma_\rho} Du \leqslant 2C_2 \leqslant 2C_2\left(\frac{\rho}{\rho_1}\right)^{\gamma_3} \leqslant C_3\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{\gamma_3},$$

где $C_3 = 2C_2\left(\frac{\rho_0}{8\rho_1}\right)^{\gamma_3}$. □

Шаг 4. ОЦЕНКИ ГРАДИЕНТА РЕШЕНИЯ ВБЛИЗИ ГРАНИЦЫ

Теорема 12. *Пусть выполнены условия леммы 8 и условие (22). Пусть $\mathcal{R}_1 = \min\{\rho_0, \mathcal{R}_0\}$, где $\mathcal{R}_0$ – константа из доказательства теоремы 11.*

Если, кроме того, $u|_{\Gamma_{\rho_0}} = 0$, то для $x^* \in \Pi_{\mathcal{R}_1/3}$, таких, что $B^n_{x_1^*/2}(x^*)$ не пересекает $\partial\Pi_{\mathcal{R}_1/3}$, справедлива оценка

$$|Du(x^*)| \leqslant C_4. \tag{30}$$

Здесь C_4 – положительная константа, зависящая от n, ν, q, δ, μ, M_0, $\|b\|_{q,(\alpha),\Pi_{\rho_0}}$, $\|\Phi\|_{q,(\alpha),\Pi_{\rho_0}}$.

Доказательство. Рассмотрим $\rho = \frac{x_1^*}{2}$ и определим в B_1^n функцию $v(x) = \frac{u(\rho x + x^*)}{\rho}$. Неравенство (30) будет доказано, если для функции v будет получена оценка градиента, не зависящая от ρ.

Рассуждая так же, как в доказательстве теоремы 11, получим, что функция u удовлетворяет условиям леммы 9. Заметим еще, что $B^n_\rho(x^*) \subset \Pi_{\mathcal{R}_0/2}$. Поэтому справедливо неравенство (15) и, следовательно,

$$|v| \leqslant N_{15} \quad \text{в} \quad B_1^n,$$

где $N_{15} = N_{15}(n, \nu, \mu, \delta, M_0, \|\varPhi\|_{q,(\alpha),\Pi_{\rho_0}})$.

Заметим также, что функция v удовлетворяет уравнению

$$-\widetilde{a}^{ij}(x, v, Dv)D_iD_jv + \widetilde{a}(x, v, Dv) = 0 \qquad \text{в} \quad B_1^n,$$

где

$$\widetilde{a}^{ij}(x, v, Dv) = a^{ij}(\rho x + x^*, \rho v, Dv), \quad \widetilde{a}(x, v, Dv) = \rho a(\rho x + x^*, \rho v, Dv).$$

Более того, при $x \in \overline{B}_1$, $z \in \mathbb{R}^1$, $p \in \mathbb{R}^n$ условия (A0), (A1), (A2), (A3) переходят соответственно в

$$\nu|\zeta|^2 \leqslant \widetilde{a}^{ij}(x, z, p)\zeta_i\zeta_j \leqslant \nu^{-1}|\zeta|^2 \quad \forall\zeta \in \mathbb{R}^n, \tag{A0'}$$

$$|\widetilde{a}(x, z, p)| \leqslant \widetilde{\mu}|p|^2 + \widetilde{b}(x)|p| + \widetilde{\Phi}(x), \tag{A1'}$$

$$|p|\left|\frac{\partial\widetilde{a}^{ij}(x, z, p)}{\partial p_k}\right| \leqslant \mu, \tag{A2'}$$

$$\left|\frac{\partial\widetilde{a}^{ij}(x, z, p)}{\partial z}p_k + \frac{\partial\widetilde{a}^{ij}(x, z, p)}{\partial x_k}\right| \leqslant \widetilde{\mu}|p| + \widetilde{\Phi}(x), \tag{A3'}$$

где $\widetilde{\mu} = \mu\rho \leqslant \mu$, $\widetilde{b}(x) = \rho b(\rho x + x^*)$, $\widetilde{\Phi}(x) = \rho\Phi(\rho x + x^*)$.

Элементарные вычисления с учетом соотношения (14) показывают, что

$$\begin{aligned}\|\widetilde{\Phi}\|_{n+\varepsilon_1,B_1^n} &= \rho^{\frac{\varepsilon_1}{n+\varepsilon_1}}\|\Phi\|_{n+\varepsilon_1,B_\rho^n(x^*)} \\ &\leqslant \rho^{\delta_1+\frac{\varepsilon_1}{n+\varepsilon_1}}N_{10}\|\Phi\|_{q,(\alpha),\Pi_{\rho_0}} \leqslant N_{10}\|\Phi\|_{q,(\alpha),\Pi_{\rho_0}},\end{aligned}$$

где ε_1 и δ_1 – константы из доказательства леммы 8.

Аналогично

$$\|\widetilde{b}\|_{n+\varepsilon_1,B_1^n} \leqslant N_{10}\|b\|_{q,(\alpha),\Pi_{\rho_0}}.$$

Таким образом, мы проверили, что функция v в шаре B_1^n удовлетворяет всем условиям теоремы 2.1 [5]. Применение указанной теоремы дает оценку

$$\|Dv\|_{B_{1/2}^n} \leqslant C_4,$$

из которой немедленно следует (30). □

Теорема 13. *Пусть $\rho_0 \leqslant \mathcal{R}_0$, где $\mathcal{R}_0$ – константа из доказательства теоремы 11. Пусть выполнены условия леммы 8 и условие (22). Если, кроме того, $u|_{\Gamma_{\rho_0}} = 0$, и*

$$|Du| \leqslant M_1 \quad \text{в} \quad \Pi_{\rho_0},$$

то при $x, y \in \Pi_{\rho_0/8}$ справедлива оценка

$$|Du(x) - Du(y)| \leqslant C_5 |x-y|^{\gamma_4}, \tag{31}$$

где $\gamma_4 \in]0,1[$ и $C_5 > 0$ зависят от n, ν, q, δ, ρ_0, M_0, M_1, $\|b\|_{q,(\alpha),\Pi_{\rho_0}}$, $\|\Phi\|_{q,(\alpha),\Pi_{\rho_0}}$.

Доказательство. Очевидно, что при $x \in \overline{\Pi}_{\rho_0}$, $|z| \leqslant M_0$, $|p| \leqslant M_1$ условия (A1), (A2), (A3) переходят соответственно в

$$|a(x,z,p)| \leqslant \mu M_1^2 + b(x) M_1 + \Phi(x) \equiv \widehat{\Phi}_{\{1\}}(x), \tag{A1”}$$

$$\left|\frac{\partial a^{ij}(x,z,p)}{\partial p_k}\right| \leqslant \mu, \tag{A2”}$$

$$\left|\frac{\partial a^{ij}(x,z,p)}{\partial z}\right|, \quad \left|\frac{\partial a^{ij}(x,z,p)}{\partial x_k}\right| \leqslant \mu M_1 + \Phi(x) \equiv \widehat{\Phi}_{\{2\}}(x). \tag{A3”}$$

Рассмотрим функцию $w(x) = u(x) - x_1 D_1 u(0)$. Очевидно, что w удовлетворяет уравнению

$$-\widehat{a}^{ij}(x,w,Dw) D_i D_j w + \widehat{a}(x,w,Dw) = 0 \quad \text{в} \quad \Pi_{\rho_0},$$

где

$$\begin{aligned}
\widehat{a}^{ij}(x,w,Dw) &= \widehat{a}^{ij}(x,w,D_1 w, D'w) \\
&= a^{ij}(x, w + x_1 D_1 u(0), D_1 w + D_1 u(0), D'w), \\
\widehat{a}(x,w,Dw) &= \widehat{a}(x,w,D_1 w, D'w) \\
&= a(x, w + x_1 D_1 u(0), D_1 w + D_1 u(0), D'w).
\end{aligned}$$

Разложив $\widehat{\Phi}_{\{1\}}$ и $\widehat{\Phi}_{\{2\}}$ так же, как в доказательстве леммы 10, мы видим, что w удовлетворяет условиям леммы 9 (при $b_1^i(x) = b_2^i(x) = 0$). Следовательно, неравенство (16) остается верным при замене u на w. Поэтому с учетом равенств

$$\lim_{x \to 0} \frac{w(x)}{x_1} = D_1 w(0) = 0,$$

имеем оценку

$$|w(x)| \leqslant (x_1)^{1+\gamma_2} N_{16} \quad \text{в} \quad \Pi_{\rho_0/4}, \tag{32}$$

где константа $N_{16} > 0$ определяется известными величинами, перечисленными в условии теоремы. Без ограничения общности считаем, что $\gamma_2 \leqslant \frac{\varepsilon_1}{n+\varepsilon_1}$, где ε_1 – константа из доказательства леммы 8.

Далее, рассмотрим точку $x^* \in \Pi_{\rho_0/8}$ и для $\rho = \frac{x_1^*}{2}$ определим в шаре B_1^n функцию $v(x) = \frac{w(\rho x + x^*)}{\rho^{1+\gamma_2}}$. Прежде всего мы получим для v оценки градиента, не зависящие от ρ.

Из (32) выводим, что $|v| \leqslant N_{16}$ в B_1^n. Заметим также, что функция v удовлетворяет уравнению

$$-\overline{a}^{ij}(x, v, Dv) D_i D_j v + \overline{a}(x, v, Dv) = 0 \quad \text{в} \quad B_1^n,$$

где

$$\begin{aligned} \overline{a}^{ij}(x, v, Dv) &= \widehat{a}^{ij}(\rho x + x^*, \rho^{1+\gamma_2} v, \rho^{\gamma_2} Dv), \\ \overline{a}(x, v, Dv) &= \rho^{1-\gamma_2} \widehat{a}(\rho x + x^*, \rho^{1+\gamma_2} v, \rho^{\gamma_2} Dv). \end{aligned} \tag{33}$$

Более того, условие (A0) переходит в (A0') с коэффициентами $\overline{a}^{ij}$ определенными в (33). Условия (A1"), (A2"), (A3") переходят соответственно в

$$|\overline{a}(x, z, p)| \leqslant \overline{\Phi}_{\{1\}}(x),$$

$$\left| \frac{\partial \overline{a}^{ij}(x, z, p)}{\partial p_k} \right| \leqslant \mu,$$

$$\left| \frac{\partial \overline{a}^{ij}(x, z, p)}{\partial z} \right|, \quad \left| \frac{\partial \overline{a}^{ij}(x, z, p)}{\partial x_k} \right| \leqslant \overline{\Phi}_{\{2\}}(x),$$

где $\overline{\Phi}_{\{1\}}(x) = \rho^{1-\gamma_2} \widehat{\Phi}_{\{1\}}(\rho x + x^*)$ и $\overline{\Phi}_{\{2\}}(x) = \rho^1 \widehat{\Phi}_{\{2\}}(\rho x + x^*)$.

Элементарные вычисления с учетом соотношения (14) показывают, что

$$\begin{aligned} \|\overline{\Phi}_{\{1\}}\|_{n+\varepsilon_1, B_1^n} &= \rho^{\frac{\varepsilon_1}{n+\varepsilon_1} - \gamma_2} \|\widehat{\Phi}_{\{1\}}\|_{n+\varepsilon_1, B_\rho^n(x^*)} \\ &\leqslant N_{10} \rho^{\frac{\varepsilon_1}{n+\varepsilon_1} - \gamma_2 + \delta_1} \|\widehat{\Phi}_{\{1\}}\|_{q,(\alpha),\Pi_{\rho_0}} \leqslant N_{10} \|\widehat{\Phi}_{\{1\}}\|_{q,(\alpha),\Pi_{\rho_0}}, \\ \|\overline{\Phi}_{\{2\}}\|_{n+\varepsilon_1, B_1^n} &= \rho^{\frac{\varepsilon_1}{n+\varepsilon_1}} \|\widehat{\Phi}_{\{2\}}\|_{n+\varepsilon_1, B_\rho^n(x^*)} \\ &\leqslant N_{10} \rho^{\frac{\varepsilon_1}{n+\varepsilon_1} + \delta_1} \|\widehat{\Phi}_{\{2\}}\|_{q,(\alpha),\Pi_{\rho_0}} \leqslant N_{10} \|\widehat{\Phi}_{\{2\}}\|_{q,(\alpha),\Pi_{\rho_0}}. \end{aligned}$$

Таким образом, к функции v применимы теорема 4.1 [1] и теорема 4.3 [1], которые показывают, что

$$|Dv(x)| \leqslant N_{17}, \qquad |Dv(x) - Dv(y)| \leqslant N_{18}|x-y|^{\widetilde{\gamma}}, \quad x, y \in B^n_{1/2}, \tag{34}$$

где положительные константы $\widetilde{\gamma}$, N_{17} и N_{18} определяются известными величинами из условий теоремы.

Заметим далее, что если $x, y \in \Pi_{\rho_0/8}$ и выполнено условие

$$|x-y| < \frac{1}{2}\max\{x_1, y_1\},$$

то вторая оценка из (34) приводит к (31) при $\gamma_4 = \min\{\widetilde{\gamma}, \gamma_2\}$.

В противном случае

$$|x-y| \geqslant \frac{1}{2}\max\{x_1, y_1\},$$

и с учетом уже доказанной первой оценки из (34) имеем при $x \in \Pi_{\rho_0/8}$

$$|Dw(x)| \leqslant N_{17}\,(x_1)^{\gamma_2}.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned}|Du(x) - Du(y)| &\leqslant |Dw(x) - Dw(y)| \\ &\leqslant 2N_{17}\,(\max\{x_1, y_1\})^{\gamma_2} \leqslant 2^{1+\gamma_2}N_{17}|x-y|^{\gamma_2}.\end{aligned}$$

Таким образом, мы получаем, что оценка (31) при $\gamma_4 = \min\{\widetilde{\gamma}, \gamma_2\}$ справедлива для всех $x, y \in \Pi_{\rho_0/8}$. □

§3. Разрешимость линейной и квазилинейной задач Дирихле

Теорема 14. *Пусть* $1 < p < \infty$, $\alpha \in \left]-\frac{1}{p}, 2-\frac{1}{p}\right[$. *Предположим также, что коэффициенты оператора* $\mathcal{L}$ *удовлетворяют следующим условиям:*

$$a^{ij} \in C(\overline{\Omega}), \quad |\mathbf{b}| \in \mathbb{L}_{\overline{p},(\overline{\alpha})}(\Omega),$$

где

$$\overline{p} = \begin{cases} \max\{n, p\}, & \text{если} \quad p \neq n \\ n+\varepsilon, & \text{если} \quad p = n, \end{cases} \qquad \overline{\alpha} = \max\{\widehat{\alpha}(\overline{p}) - \varepsilon, 0\},$$

а ε *– сколь угодно малое положительное число.*

Если, кроме того, $\partial\Omega \in \widetilde{\mathbb{V}}^2_{\overline{p},(\overline{\alpha})}(\Omega)$, то для любой функции $f \in \mathbb{L}_{p,(\alpha)}(\Omega)$ краевая задача

$$\mathcal{L}u = f \quad v \quad \Omega,$$
$$u|_{\partial\Omega} = 0$$

имеет единственное решение $u \in \widetilde{\mathbb{V}}^2_{p,(\alpha)}(\Omega)$.

Доказательство. Из неравенства Гельдера и теорем вложения (см. теоремы 10.1 и 10.4 [8]) следует, что условие $|\mathbf{b}| \in \mathbb{L}_{\overline{p},(\overline{\alpha})}(\Omega)$ обеспечивает вложение $b^i D_i u \in \mathbb{L}_{p,(\alpha)}(\Omega)$ для любой $u \in \widetilde{\mathbb{V}}^2_{p,(\alpha)}(\Omega)$.

Кроме того, предположение $\partial\Omega \in \widetilde{\mathbb{V}}^2_{\overline{p},(\overline{\alpha})}(\Omega)$ гарантирует инвариантность условия на $|\mathbf{b}|$ относительно распрямлений границы $\partial\Omega$.

С помощью вытекающих из теоремы 7.6 [9] коэрцитивных оценок для модельной задачи в полупространстве стандартным методом (разбиение единицы, распрямление границы $\partial\Omega$, замораживание коэффициентов и приведение к каноническому виду) получим следующее неравенство:

$$\|D^2 u\|_{p,(\alpha),\Omega} \leqslant N_{19} \left(\|\mathcal{L}u\|_{p,(\alpha),\Omega} + \|u\|_{p,(\alpha),\Omega}\right), \tag{35}$$

где константа $N_{19} > 0$ определяется n, p, α, ν, $\|\mathbf{b}\|_{\bar{p},(\bar{\alpha}),\Omega}$, модулями непрерывности коэффициентов a^{ij} и свойствами $\partial\Omega$. Воспользовавшись подходящим разбиением единицы, можно построить дивергентный оператор $\mathcal{L}_1$ с коэффициентами, удовлетворяющими условиям теоремы 14, который после распрямления границы $\partial\Omega$ в окрестности любой точки $x \in \partial\Omega$ примет вид $-\Delta$ в "новых" локальных координатах.

Рассмотрим задачу

$$\begin{aligned} &\mathcal{L}_1 u = f \quad \text{в} \quad \Omega, \\ &u|_{\partial\Omega} = 0. \end{aligned} \tag{36}$$

Для любой C_0^∞-функции f задача (36) имеет обобщенное решение. Более того, если мы распрямим границу $\partial\Omega$ в окрестности произвольной точки, то указанное решение будет гладкой функцией "новых" локальных переменных. Поэтому нетрудно убедиться, что это решение принадлежит $\widetilde{\mathbb{V}}^2_{p,(\alpha)}(\Omega)$.

Мы доказали, что обратный оператор $\mathcal{L}_1^{-1}$ определен на всюду плотном множестве в весовом пространстве $\mathbb{L}_{p,(\alpha)}(\Omega)$. Заметим также, что оператор $\mathcal{L}_1^{-1}$ можно непрерывно продолжить на все пространство $\mathbb{L}_{p,(\alpha)}(\Omega)$ поскольку оценка (35) сохраняется при замене $\mathcal{L}$ на $\mathcal{L}_1$.

Далее, продолжение по параметру от $\mathcal{L}_1$ к $\mathcal{L}$ показывает, что обратный оператор $\mathcal{L}^{-1}$ определен и ограничен на $\mathbb{L}_{p,(\alpha)}(\Omega)$, если $\mathrm{Ker}\{\mathcal{L}\} = \{0\}$. В силу условия $b^i \in L_{n,loc}(\Omega)$ имеем $\mathrm{Ker}\{\mathcal{L}\} \subset W^2_{n,loc}(\Omega)$. Поэтому тривиальность $\mathrm{Ker}\{\mathcal{L}\}$ следует из принципа максимума Александрова [2]. Это завершает доказательство. $\square$

Доказательство теоремы 1. Полученные априорные оценки (теоремы 5, 7, 11, 12, 13) позволяют доказать утверждение теоремы стандартным рассуждением, основанным на принципе Лере-Шаудера (теорема 10.1, гл. IV [10]) и результатах о разрешимости линейной задачи Дирихле (теорема 14). $\square$

Замечание. При $\alpha = 0$ теорема 1 дает тот же результат, что и теорема 7.1 [1].

Работа поддержана грантом РФФИ 02-01-00276.

Литература

1. О. А. Ладыженская, Н. Н. Уральцева, *Обзор результатов по разрешимости краевых задач для равномерно эллиптических и параболических квазилинейных уравнений второго порядка, имеющих неограниченные особенности.* — Успехи мат. наук **41**, № 5 (1986), 59–83.
2. А. Д. Александров, *Условия единственности и оценки решения задачи Дирихле.* — Вестник Ленингр. унив., Сер.1 **18**, № 13 (1963), 5–29.
3. А. И. Назаров, *Оценки максимума решений эллиптических и параболических уравнений через весовые нормы правой части.* — Алгебра и анализ **13**, № 2 (2001), 151–164.
4. Д. Е. Апушкинская, А. И. Назаров, *Задача Дирихле для квазилинейных эллиптических уравнений в областях с гладкими замкнутыми ребрами.* — Проблемы мат. анализа **21** (2000), 3-29.
5. О. А. Ладыженская, Н. Н. Уральцева, *Об оценках* $\max|u_x|$ *для решений квазилинейных эллиптических и параболических уравнений общего вида и теоремах существования.* — Зап. научн. семин. ЛОМИ **138** (1984), 90–107.
6. Д. Е. Апушкинская, А. И. Назаров, *Оценки на границе области градиента решения недивергентного параболического уравнения с "составной" правой частью и коэффициентами при младших производных.* — Проблемы мат. анализа **14** (1995), 3–27.
7. Д. Е. Апушкинская, А. И. Назаров, *Начально-краевая задача с граничным условием Вентцеля для недивергентных параболических уравнений.* — Алгебра и анализ **6**, № 6 (1994), 1–29.

8. О. В. Бесов, В. П. Ильин, С. М. Никольский, *Интегральные представления функций и теоремы вложения*. Москва, Наука, 1996.
9. А. И. Назаров, *L_p-оценки решения задач Дирихле и Неймана для уравнения теплопроводности в клине с ребром произвольной коразмерности*. — Проблемы мат. анализа **22** (2001), 126–159.
10. О. А. Ладыженская, Н. Н. Уральцева, *Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа*. Москва, Наука, 1973.

Apushkinskaya D. E. and Nazarov A. I. The elliptic Dirichlet problem in weight spaces.

The solvability of the Dirichlet problem for quasilinear elliptic second-order equations of nondivergence form is studied in the weight spaces.

Университет Саарланда
Саарбрюккен, Германия
e-mail: darya@math.uni-sb.de
С.-Петербургский государственный университет
e-mail: an@AN4751.spb.edu

Поступило 10 апреля 2002 г.