Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 289, 2002 г.

Н. А. Вавилов

О ПОДГРУППАХ СПИНОРНОЙ ГРУППЫ, СОДЕРЖАЩИХ РАСЩЕПИМЫЙ МАКСИМАЛЬНЫЙ ТОР. II

Hors-d'oeuvre

В настоящей работе, являющейся продолжением [11], мы завершаем доказательство следующего результата, анонсированного без доказательства в [9], теорема 4. Нумерация параграфов и вспомогательных утверждений продолжает нумерацию работы [11].

1. Формулировка основного результата. В настоящей работе мы завершим доказательство следующей теоремы.

Теорема. *Пусть K – поле характеристики отличной от 2, содержащее не менее 9 элементов. Тогда в спинорной группе $G = \mathrm{Spin}(2l, K)$, $l \geqslant 3$, имеет место стандартное описание подгрупп, содержащих расщепимый максимальный тор $T = T(2l, K)$.*

Напомним, что стандартное описание состоит в следующем. Заметим, прежде всего, что $G = \mathrm{Spin}(2l, K)$ представляет собой односвязную группу Шевалле типа $\Phi = D_l$. Для корня $\alpha \in \Phi$ обозначим через X_α соответствующую корневую подгруппу, элементарную относительно T. Подгруппы $X_\alpha = \{x_\alpha(\xi), \xi \in K\}$ состоят из элементарных корневых унипотентов $x_\alpha(\xi)$, $\xi \in K$. Так как $l \geqslant 3$, а $K \ncong \mathbb{F}_2, \mathbb{F}_3$, то подгруппы X_α, $\alpha \in \Phi$, – это в точности минимальные унипотентные подгруппы в G, нормализуемые T. Пусть $S \subseteq \Phi$ – какое-то замкнутое подмножество корней в Φ. Положим $G(S) = T\langle X_\alpha, \alpha \in \Phi\rangle$, по теореме Бореля–Титса $G(S)$ не содержит никаких корневых подгрупп, кроме тех, которые входят туда по определению, т.е., если $X_\beta \leqslant G(S)$, то $\beta \in S$ (см. [3]). Назовем подгруппы H, $G(S) \leqslant H \leqslant N(S) = N_G(G(S))$,

---

Автор благодарит проекты РФФИ 01–01–00924 (СПбГУ), 00–01–00441 (ПОМИ РАН) и INTAS 00–566 за поддержку на заключительном этапе работы над статьей.

лежащие между группой $G(S)$ для некоторого замкнутого множества S и ее нормализатором в G, *стандартными*. Тогда *стандартное описание* утверждает, что *все* промежуточные подгруппы H, $T \leqslant H \leqslant G$, стандартны. Это условие можно выразить еще следующим образом. Пусть H, $T \leqslant H \leqslant G$, промежуточная подгруппа и S – замкнутое множество корней в Φ, состоящее из тех корней α, для которых $X_\alpha \leqslant H$. Тогда стандартное описание эквивалентно тому, что любая промежуточная подгруппа H нормализует соответствующую группу $G(S)$. В [11] стандартное описание формулировалось в терминах введенных Боревичем сетей идеалов. Сети действительно необходимы при переходе к кольцам, но для поля ортогональные D-сети в точности соответствуют замкнутым подмножествам корней в D_l или B_l.

2. Основная редукция. Главным результатом первой части настоящей работы было доказательство следующего утверждения ([11], Предложение 1). Заметим, что в [11] рассматривались также нечетномерные спинорные группы. Все сказанное выше о стандартном описании относится, конечно, и к случаю подгрупп в $\mathrm{Spin}(2l+1, K)$, $l \geqslant 3$, которые являются односвязными группами Шевалле типа B_l. Для нечетномерных спинорных групп аналог теоремы тоже верен, но план его доказательства совершенно другой. Как и для рассмотренного в [8] случая ортогональной группы, наиболее удобный подход состоит в редукции нечетномерного случая к четномерному. В продолжающей настоящую работу статье Е. А. Филипповой [30] эта редукция проведена для случая $n = 4m+1$ и для случая $n = 4m+3$, $-1 \in K^{*2}$. Без предположения о том, что -1 является квадратом в K, подобная редукция в случае $n = 4m+3$ требует гораздо более трудных вычислений.

Предложение 1. *Пусть K – поле характеристики отличной от 2, содержащее не менее 7 элементов. Тогда любая подгруппа в спинорной группе $G = \mathrm{Spin}(n, K)$, $n \geqslant 6$, содержащая расщепимый максимальный тор $T = T(n, K)$ и хотя бы один нетривиальный элементарный корневой унипотент $x_\alpha(\varepsilon)$, $\alpha \in \Phi$, $\varepsilon \in K^*$, стандартна.*

Этот результат сводит доказательство теоремы к анализу *контр-примера*, т.е. подгруппы в G, содержащей T, не содержащейся в его нормализаторе $N = N_G(T)$, и не содержащей нетривиальных элементарных корневых унипотентов. В этой части мы докажем, что в условиях теоремы никакого контр-примера не существует, так что любая подгруппа в G, содержащая T, либо содержится в N и, таким образом, стандартна, либо содержит какой-то нетривиальный корневой унипотент и, значит, снова стандартна по предложению 1. Это значит, что для доказательства теоремы нам достаточно доказать следующее утверждение.

Предложение 2. *Пусть K – поле характеристики отличной от 2, содержащее не менее 13 элементов. Тогда в спинорной группе $G = \mathrm{Spin}(2l, K)$, $l \geqslant 3$, не существует содержащих $T = T(2l, K)$ подгрупп, не содержащихся в $N = N_G(T)$ и не содержащих нетривиальных корневых унипотентов.*

Прежде, чем переходить к доказательству предложения 2, которое, собственно, и составляет основное содержание настоящей работы, сделаем несколько исторических замечаний (по поводу общего контекста, в котором находится настоящая работа, и дальнейших ссылок, см. [23, 24, 29] и особенно [9, 10, 48, 33]).

3. Исторические замечания. В случае *алгебраически замкнутого* поля теорема настоящей работы является частным случаем классического результата Бореля и Титса [3]. В случае *конечного* основного поля она вытекает из результата Зейтца [37] (см. также [38–40], где получены значительно более общие результаты, относящиеся к случаю не обязательно расщепимого максимального тора).

Описание надгрупп расщепимых максимальных торов в *расширенных* классических группах Шевалле известно, притом не только над полями, содержащими не менее 7 элементов, но и над полулокальными кольцами:

- группа GL_n – [1, 2, 4];
- группа GSp_{2l} – [14];
- группа SO_n – [46, 8].

Аналогичные результаты для обычных групп Шевалле оказались *значительно* более трудными и до недавнего времени были известны лишь для полей, содержащих не менее 7 или 13 элементов:

- группа SL_n – [5, 34];
- группа Sp_{2l} – [14, 34, 9, 20].

Единый подход для расширенных/обычных групп Шевалле, в том числе и исключительных типов, основанный на вычислениях с разложением Брюа, был предложен в [10, 12], см. также дальнейшие ссылки в [48, 49, 33]. Важным дополнением к теореме классификации является теорема сопряженности, в простейшем варианте утверждающая, что T пронормальна в G, см. [47, 7, 10, 21]. Койбаев исследовал, что происходит для совсем маленьких полей, скажем, для $\mathbb{F}_3$, $\mathbb{F}_4$ и $\mathbb{F}_5$, см., в частности, [25–27]. Отметим также принципиально важную работу Платонова [36], полностью или в значительной степени решающую несколько задач, сформулированных в [10].

Результат для группы Spin_n, доказательство которого мы завершаем в настоящей работе, содержался в диссертации автора [6] (глава IV, §4 и §6) и был анонсирован в [9–11]. В то время я не опубликовал ни это доказательство, ни другое доказательство, которым я тогда располагал, использующее разложение Брюа, так как надеялся, во-первых, ослабить и для нечетного n условие на поле до $|K| \geqslant 7$, сняв при этом ограничение на характеристику, и, во-вторых, получить аналогичный результат для групп над полулокальными кольцами. В дальнейшем, в связи с отсутствием прогресса в решении этих задач, я надолго утратил интерес к этой проблематике.

4. Опоры и нервюры. Однако в последние годы произошло несколько важных продвижений в близких направлениях, и возникли новые, значительно более общие точки зрения на всю эту проблематику, которые позволили радикально переосмыслить стратегию доказательства подобных результатов и вселяют уверенность в возможность полного решения этих задач.

• В работе [50] было обнаружено, что, с использованием результатов Тиммесфельда о порождении корневыми/квадратичными унипотентными подгруппами [42–45], а также [35, 41], результаты о надгруппах максимальных торов в действительности вытекают из гораздо более общей (и гораздо более простой!) теоремы, утверждающей, что в подгруппе, порожденной любыми двумя некоммутирующими длинными корневыми торами, содержится унипотентный элемент небольшого вычета (‘*геометрия торов*’). Таким образом, вычисления во всех группах Шевалле в действительности сводятся к случаям $\mathrm{Spin}(8, K)$ или $\mathrm{Spin}(10, K)$ (по поводу этой редукции см. [16], дальнейшие ссылки в [10] и недавние работы автора и Нестерова).

• В важном цикле работ Дыбковой (см., в частности, [17–20]) большинство результатов о расширенных группах доказаны в контексте Баковских унитарных групп $GU(2l, R, \Lambda)$ над форменным кольцом (R, Λ) (см. ссылки в [32, 31]). При этом характеристика 2 вообще не играет никакой особой роли. После этих работ стало очевидно, что ценой дополнительных технических усилий можно снять остающиеся условия на обратимость 2 и в результатах для обычных групп Шевалле.

• В работе [51] было получено описание содержащих расщепимый максимальный тор подгрупп в SL_n над полулокальным кольцом с достаточно большими полями вычетов. Как оказалось, это описание не требует принципиально новых идей, а может быть получено за счет чуть более тщательного анализа вычислений, относящихся к случаю поля. Нет сомнения, что и результаты настоящей работы могут быть тем же методом обобщены на (почти) произвольные коммутативные полулокальные кольца.

• Как выяснилось в самое последнее время, естественной комбинаторной структурой, отвечающей за надгруппы максимального тора T, в том же смысле, в котором разложение Брюа отвечает за надгруппы B, является разложение на мелкие клетки Брюа, т.е. неприводимые компоненты пересечений клеток Брюа B_1wB_2 отвечающих всевозможным выборам борелевских подгрупп B_1, $B_2 \geqslant T$ (см., например, [15]). При этом *все* детали доказательств в работах [1, 2, 5, 8, 10, 14, 46] и настоящей работе, в частности, роль матриц с нулями, появление миноров второго порядка, возникновение исключений, etc., получили естественное объяснение, см., в частности, [52].

Разумеется, пока все эти работы не доведены до окончательных формулировок в естественной общности, но за ними уже просматриваются контуры *гораздо* более величественного сооружения, чем это представлялось 15 лет назад. Поэтому я решил опубликовать настоящую работу, содержащую несколько важных вычислительных трюков, как основу для возможных обобщений.

Содержание §5 настоящей работы воспроизводит доказательства Лемм 19 и 26 Главы IV диссертации [6], а содержание §6 является незначительной переработкой основной части §6 той же главы. Вместе с работами [8, II] и [13] настоящая работа практически завершает публикацию доказательств всех основных результатов диссертации [6], и, вместе с тем, *всех* результатов, анонсированных в [9]. *Единственный* крупный фрагмент доказательств, который все еще остается неопубликованным, это часть Главы V, относящаяся к надгруппам subsystem subgroups в симплектической группе. В то время как [8, II] и [13] представляют собой публикацию текстов, изготовленных более 10 лет назад, без каких-либо изменений, *as is*, текст настоящей работы полностью написан в 2001–2002 годах. В связи с этим чуть модернизирован язык и пояснены некоторые детали, которые в 1986–1987 годах представлялись мне очевидными. В то же время, конечно, я не рассматривал возможность кардинальной переработки самого доказательства в свете перечисленных выше более общих подходов.

5. Наиболее важные обозначения. В дальнейшем все вычисления будут производиться не на языке групп Шевалле, а в матрицах, причем даже не в спинорном, а в *векторном* представлении. Это значит, что всюду вместо самой спинорной группы $G = \mathrm{Spin}(n, K)$ мы будем рассматривать ее фактор-группу $\Gamma = \Omega(n, K)$ по $\{\pm 1\}$, а вместо тора T – его образ $\Delta = \Delta(n, K) \leqslant \Gamma$. Положим $n = 2l$, если n четно и $n = 2l + 1$, если n нечетно, и занумеруем строки и столбцы матриц из Γ следующим образом: $1, \dots, l, -l, \dots, -1$ в первом случае и $1, \dots, l, 0, -l, \dots, -1$ во втором. По определению группа $\Omega(n, K)$, которую K-теоретики обычно называют $\mathrm{EO}(n, K)$, порождена всеми элементарными ортогональными трансвекциями

$$T_{ij}(\xi) = T_{-j,-i}(-\xi) = t_{ij}(\xi)t_{-j,-i}(-\xi) = e + \xi e_{ij} - \xi e_{-j,-i},$$

где $i,\ j \neq 0,\ i \neq \pm j,\ \xi \in K$, (элементарные длинные корневые унипотенты) и, в случае нечетного n,

$$T_{i0}(\xi) = T_{0,-i}(-\xi) = e + \xi e_{i0} - 2\xi e_{0,-i} - \xi^2 e_{i,-i},$$

где $i \neq 0$, $\xi \in K$, (элементарные длинные корневые унипотенты).

Ее диагональная подгруппа Δ содержит, в частности, следующие матрицы:

- Микровесовые элементы типа $\bar{\omega}_1$, имеющие вид

$$D_i(\varepsilon) = e + (\varepsilon - 1)e_{ii} + (\varepsilon^{-1} - 1)e_{-i,-i},$$

для $i \neq 0$ и $\varepsilon \in K^{*2}$. Для нечетного n матрица $D_i(\varepsilon^2)$ представляет собой *короткий* корневой полупростой элемент $h_{e_i}(\varepsilon)$.

• Длинные корневые полупростые элементы $D_{ij}(\varepsilon) = D_i(\varepsilon)D_j(\varepsilon)$, $i,j\neq 0$, $i\neq \pm j$, $\varepsilon\in K^*$, которые всегда принадлежат Δ.

• Весовые элементы типа $\bar\omega_l$, имеющие вид

$$D(\varepsilon) = \operatorname{diag}(\varepsilon,\dots,\varepsilon,\varepsilon^{-1}\dots,\varepsilon^{-1})$$

в случае четного n (в этом случае это *микровесовые* элементы) и вид

$$D(\varepsilon) = \operatorname{diag}(\varepsilon,\dots,\varepsilon,1,\varepsilon^{-1}\dots,\varepsilon^{-1})$$

в случае нечетного n. И в том и в другом случае количество ε и количество ε^{-1} равно l, так что принадлежность этих элементов группе Δ определяется четностью l. А именно, при четном l матрицы $D(\varepsilon)$ всегда принадлежат Δ, а при нечетном l они принадлежат Δ, только если $\varepsilon \in K^{*2}$. Именно это обстоятельство делает анализ случая $n = 4m + 3$ значительно более трудным по сравнению со случаем $n = 4m + 1$.

• В случае *нечетного* l – матрицы $D^i(\varepsilon) = D(\varepsilon)D_i(\varepsilon^{-1})$, где $\varepsilon \in K^*$. Изобразим для примера матрицу $D^1(\varepsilon)$, которая только и будет использоваться в настоящей работе:

$$D^1(\varepsilon) = \operatorname{diag}(1,\varepsilon,\dots,\varepsilon,\varepsilon^{-1}\dots,\varepsilon^{-1},1).$$

§5. Матрицы с двумя нулями

В настоящем параграфе мы продолжаем считать, что $n = 2l \geqslant 6$, $|K| \geqslant 7$, $2 \in K^*$, а X – контр-пример, т.е. подгруппа в Γ, содержащая Δ, не содержащаяся в $N_\Gamma(\Delta)$ и не содержащая нетривиальных элементарных ортогональных трансвекций. Заметим, что так как $\mathrm{Spin}(6,K) \cong \mathrm{SL}(4,K)$, а для группы $\mathrm{SL}(4,K)$ более сильный результат о надгруппах максимального тора уже доказан в [5, IV], в действительности мы можем всюду считать, что $l \geqslant 4$. Иногда мы будем использовать это упрощающее предположение, чтобы несколько сократить доказательства.

В этом параграфе мы покажем, что любая немономиальная матрица из контр-примера содержит очень мало нулевых элементов. Точнее, нашей целью здесь является доказательство следующего результата.

Предложение 3. *Если матрица $a \in X$ содержит хотя бы два нулевых элемента в какой-то строке или каком-то столбце, то она мономиальна.*

Для доказательства этого результата мы сначала рассмотрим его частный случай, когда нули в матрице a расположены на симметричных местах.

1. Мономиальные корневые полупростые элементы. Для всех групп Шевалле корневые полупростые элементы, содержащиеся в нормализаторе максимального тора, были изучены в работе Залесского [22]. Нам будем достаточно следующих простых утверждений, которые сразу вытекают из вычисления собственных значений мономиальной матрицы по цикленному типу соответствующей перестановки. Здесь через $d_i(\varepsilon) = e + (\varepsilon - 1)e_{ii}$, $\varepsilon \in K^*$, обозначается псевдоотражение, через $t_{ij}(\xi) = e + \xi e_{ij}$, $i \neq j$, – обычная линейная трансвекция, а через $w_{ij}(\varepsilon) = t_{ij}(\varepsilon)t_{ji}(-\varepsilon^{-1})t_{ij}(\varepsilon)$ и $\widetilde{w}_{ij}(\varepsilon) = d_j(-1)w_{ij}(\varepsilon)$ – подъемы транспозиций в SL_n и GL_n, соответственно. Далее, обозначим через $d_{ij}(\varepsilon) = d_i(\varepsilon)d_j(\varepsilon^{-1})$, $i \neq j$, $\varepsilon \in K^*$, полупростой корневой элемент в SL_n. Напомним, что $D_r(\varepsilon^2) = d_{r,-r}(\varepsilon^2)$ является *коротким* полупростым корневым элементом в $\mathrm{SO}(2l+1, K)$. Следующее простое утверждение – это Лемма 5 работы [5, III].

Лемма 15. *Если для некоторых $x \in \mathrm{GL}(n, K)$, $i \neq j$, $\varepsilon \neq 0$ матрица $y = xd_{ij}(\varepsilon)x^{-1}$ мономиальна, но не диагональна, то имеет место одна из следующих возможностей:*

A) $\varepsilon^4 = 1$ *и* $y = w_{kl}(\eta)$;

B) $\varepsilon^3 = 1$ *и* $y = w_{kl}(\eta)w_{lm}(\theta)$;

C) $\varepsilon = -1$ *и* $y = \widetilde{w}_{kl}(\eta)d_m(-1)$ *или* $y = \widetilde{w}_{kl}(\eta)\widetilde{w}_{mp}(\theta)$.

Отсюда сразу вытекает

Лемма 16. *Если для некоторых $x \in \Omega(2l, K)$ и $\varepsilon \neq 0$, $\varepsilon^4 \neq 1$, матрица $xD_r(\varepsilon^2)x^{-1}$ мономиальна, то она диагональна.*

Доказательство. Транспозиции (ij) и 3-циклы (ijk) не лежат в группе Вейля $W_\Gamma = \mathrm{Oct}_l$, что исключает случаи A) и B) предыдущей леммы, а случай C) исключается тем, что по условию $(\varepsilon^2)^2 \neq 1$.

Следующий ортогональный аналог леммы 15 также моментально вытекает из вычисления собственных значений мономиальной матрицы (для случая, когда $\varepsilon^4, \varepsilon^3 \neq 1$, он доказан в [22]).

Лемма 17. *Если для некоторых $x \in \mathrm{SO}(n, K)$, $i \neq \pm j$, i, $j \neq 0$, $\varepsilon \neq 0$ длинный корневой полупростой элемент $y = xD_{ij}(\varepsilon)x^{-1}$ мономиален, то при $\varepsilon^4, \varepsilon^3 \neq 1$ он диагонален. Если y мономиален и выполняется одно из следующих трех условий* A) $\varepsilon^4 = 1$, $\varepsilon \neq -1$ *и* $n \geqslant 5$; B) $\varepsilon^3 = 1$ *и* $n \geqslant 7$; C) $\varepsilon = -1$ *и* $n \geqslant 9$, *то в y есть строка, совпадающая с соответствующей строкой единичной матрицы.*

Так как мы хотим в дальнейшем без раздумий заменять матрицу a из контр-примера на любой корневой элемент $b = aD_{rs}(\varepsilon)a^{-1}$, $\varepsilon \neq 0, \pm 1$, то нам удобно будет предполагать, что $n \geqslant 8$. В этом случае из леммы следует, что если b мономиален, то в нем *всегда* есть строка совпадающая с соответствующей строкой единичной матрицы. Как уже замечено выше, мы можем это сделать, так как для $n = 6$ наша теорема уже доказана в [5]. Конечно, ценой незначительных дополнительных усилий мы могли бы охватить и случай $n = 6$, но, по существу, это свелось бы просто к переписыванию рассуждений работы [5] с заменой векторного представления на бивекторное.

2. Матрицы с двумя нулями на симметричных местах. Начнем с самого простого случая. Пусть, как всегда, $a = (a_{ij}) \in X$, а $a^{-1} = (a'_{ij})$.

Лемма 18. *Пусть в матрице $a \in X$ имеем $a_{pr} = a_{p,-r} = 0$ для некоторого $r \neq 0$. Тогда $a_{ir}a'_{rj} = a_{i,-r}a'_{-r,j} = 0$ для всех $i \neq j$.*

Доказательство. Так как $|K| \geqslant 7$, то можно выбрать $\varepsilon \in K^*$ такое, что $\varepsilon^4 \neq 1$. Условие на матрицу a показывает, что p-я строка матрицы $b(\varepsilon) = aD_r(\varepsilon^2)a^{-1} \in X$ совпадает с p-й строкой единичной матрицы. Тем самым, группа $H = \langle \Delta, b(\varepsilon) \rangle$ приводима и, следовательно, стандартна по лемме 11. Если бы $b(\varepsilon)$ не была мономиальной, это означало бы, что в группе $H \leqslant X$ есть нетривиальная элементарная ортогональная трансвекция, что противоречит определению контр-примера. Таким образом, матрица $b(\varepsilon)$ мономиальна и, значит, диагональна, по лемме 16. Таким образом,

$$b(\varepsilon)_{ij} = a_{ir}(\varepsilon^2 - 1)a'_{rj} + a_{i,-r}(\varepsilon^{-2} - 1)a'_{-r,j} = 0$$

для всех $i \neq j$. Матрица $b(\varepsilon^{-1}) = b(\varepsilon)^{-1}$ диагональна вместе с $b(\varepsilon)$, так что снова

$$b(\varepsilon^{-1})_{ij} = a_{ir}(\varepsilon^{-2} - 1)a'_{rj} + a_{i,-r}(\varepsilon^2 - 1)a'_{-r,j} = 0$$

для всех $i \neq j$. Утверждение леммы сразу вытекает теперь из того, что определитель получившейся системы равен

$$\varepsilon^{-4}(\varepsilon^2 - 1)^2(\varepsilon^4 - 1) \neq 0.$$

Лемма 19. *Пусть в какой-то строке или каком-то столбце матрицы $a \in X$ всего один ненулевой элемент. Тогда матрица a мономиальна.*

Доказательство. Пусть, скажем, $a_{pj} = 0$ для всех $j \neq q$. Тогда по предыдущей лемме $a_{ir}a'_{rj} = 0$ для всех $i \neq j$ и всех $r \neq \pm q$. В столбце матрицы a с номером r есть хотя бы один ненулевой элемент, скажем, $a_{hr} \neq 0$. Это значит, что $a'_{rj} = 0$ для всех $j \neq h$. Это значит, что во всех строках матрицы a^{-1}, кроме, быть может, строк с номерами $\pm q$, не больше одного ненулевого элемента. В силу ортогональности то же верно для столбцов матрицы a. Теперь такое же рассуждение с заменой строк на столбцы показывает, что это верно и для строк матрицы a. Возьмем два любых индекса h, k таких, что все шесть индексов $\pm h, \pm k, \pm q$ попарно различны (напомним, что $n \geqslant 6$). Ясно, что все четыре ненулевых элемента матрицы a в строках с номерами $\pm h, \pm k$ не могут концентрироваться в q-м и $(-q)$-м столбцах (иначе матрица a была бы вырожденной), поэтому для какого-то индекса $i = \pm h, \pm k$ оба элемента a_{iq} и $a_{i,-q}$ нулевые, так что мы можем снова применить предыдущую лемму и заключить, что $a_{iq}a'_{qj} = a_{i,-q}a'_{-q,j} = 0$. Таким образом, $a_{ir}a'_{rj} = 0$ для *всех* r, но это и значит, что a мономиальна.

Лемма 20. *Пусть в матрице $a \in X$ имеем $a_{pr} = a_{p,-r} = 0$ для некоторого $r \neq 0$. Тогда матрица a мономиальна.*

Доказательство. По лемме 18 имеем $a_{ir}a'_{rj} = 0$ для всех $i \neq j$. В столбце матрицы a с номером r есть хотя бы один ненулевой элемент, скажем, $a_{hr} \neq 0$. Тогда $a'_{rj} = 0$ для всех $j \neq h$, и мы можем применить к $a^{-1} \in X$ предыдущую лемму.

Резюмируя содержание двух последних пунктов, мы получаем основной инструмент доказательства.

Лемма 21. *Если $a \in X$ и для некоторого $\varepsilon \neq 0, \pm 1$ матрица $b = aD_{rs}(\varepsilon)a^{-1}$ мономиальна, то сама матрица a мономиальна.*

Доказательство. По лемме 17 какая-то строка матрицы b, скажем, строка с номером h, совпадает с соответствующей строкой единичной матрицы. Выражая равенство $b_{hj} = \delta_{hj}$ через коэффициенты матриц a и a^{-1}, получим

$$(a_{ir}a'_{rj} + a_{is}a'_{sj})(\varepsilon - 1) + (a_{i,-r}a'_{-r,j} + a_{i,-s}a'_{-s,j})(\varepsilon^{-1} - 1) = 0.$$

Если теперь не все коэффициенты a_{hr}, a_{hs}, $a_{h,-r}$, $a_{h,-s}$ нулевые, то строки матрицы a^{-1} с номерами $\pm r, \pm s$ линейно зависимы, что невозможно. Поэтому на самом деле все перечисленные элементы нулевые, и к матрице a можно применить лемму 20 и заключить, что она мономиальна.

Теперь у нас все готово, чтобы завершить доказательство предложения 3.

3. Доказательство предложения 3. Ввиду леммы 20 нам осталось лишь рассмотреть случай, когда нули в какой-то строке или каком-то столбце матрицы a расположены на несимметричных местах. Пусть, например, $a_{p,-r} = a_{p,-s} = 0$ для некоторых $r \neq \pm s$. Докажем, что и в этом случае матрица a мономиальна. Для этого возьмем $\varepsilon \in K^*$ и рассмотрим длинный корневой полупростой элемент $b = b(\varepsilon) = aD_{rs}(\varepsilon)a^{-1}$. Так как в силу ортогональности $a'_{r,-p} = a'_{s,-p} = 0$, то для любого ε автоматически $b_{p,-p} = 0$. При этом $b_{pp} = 1 + (\varepsilon - 1)(a_{pr}a'_{rp} + a_{ps}a'_{sp})$ и поэтому равенство $b_{pp} = 0$ представляет собой линейное уравнение относительно ε, решение которого η всегда отлично от 1. Если, кроме того, $\lambda = a_{pr}a'_{rp} + a_{ps}a'_{sp}$ отлично от 1 и 1/2, то $\eta \neq 0, \pm 1$. В этом случае к матрице $b = b(\eta)$ можно применить лемму 20 и заключить, что она мономиальна. Но тогде по лемме 21 вместе с ней мономиальна и матрица a. Это значит, что нам осталось лишь рассмотреть случаи $\lambda = 1, 1/2$.

Если $\lambda = 1/2$, то, так как $b(-1)_{pp} = b(-1)_{p,-p} = 0$, то матрица $b(-1)$ мономиальна. Так как $n \geqslant 6$, это означает, что найдется такое $q \neq \pm p$, что $b(-1)_{pq} = b(-1)_{p,-q} = 0$, т.е., иными словами, $a_{pr}a'_{rj} + a_{ps}a'_{sj} = 0$ для $j = \pm q$. Но тогда для любого ε в матрице $b(\varepsilon)$ имеем $b(\varepsilon)_{pq} = b(\varepsilon)_{p,-a} = 0$ и мы можем дословно повторить рассуждение из предыдущего абзаца для матрицы $b = b(\varepsilon)$, где $\varepsilon \neq 0, \pm 1$.

Пусть, наконец, $\lambda = 1$. В этом случае $b(\varepsilon)_{pp} = \varepsilon$. Возьмем $\eta \neq 0, 1$ (в дальнейшем нам придется наложить на η еще одно ограничение) и фиксируем любое $\theta \in K^{*2}$ такое, что $\theta \neq 1$. При $\theta\eta - \theta - \eta \neq 0$ условие, что первые строки матриц $b(\varepsilon)D_p(\theta)$ и $b(\eta)$ пропорциональны, представляет собой линейное уравнение относительно ε, решение которого равно $\varepsilon = -\eta(\theta\eta - \theta - \eta)^{-1}$. Ясно, что автоматически $\varepsilon \neq 0, 1$. Таким образом, мы запретили еще одно значение для η, а именно, $\eta = \theta(\theta - 1)^{-1}$. Теперь в матрице $c = c(\theta, \eta) = b(\varepsilon)D_p(\theta)b(\eta^{-1}) \in X$ строка с номером p пропорциональна соответствующей строке единичной матрицы. Таким образом, мы попали в условия леммы 11 и можем заключить, что матрица c мономиальна. В частности, $c_{ip} = 0$ для всех $i \neq p$. Выражая c_{ip} через элементы матриц a и a^{-1}, получим

$$\begin{aligned} c(\theta,\eta)_{ip} = &(1-\eta)(\theta-1)\big(\eta^2(\eta+\theta)A_{ip} + (\theta-\eta^2)(\theta\eta-\theta-\eta)B_{ip} + \\ &\eta^2 b(\eta^{-1})_{-p,p}A_{i,-p} + \eta(\theta\eta-\theta-\eta)b(\eta^{-1})_{-p,p}B_{i,-p}\big), \end{aligned}$$

где мы для краткости положили

$$A_{ij} = A_{ij}^{rs} = a_{ir}a'_{rj} + a_{is}a'_{sj}, \qquad B_{ij} = B_{ij}^{-r,-s} = a_{i,-r}a'_{-r,j} + a_{i,-s}a'_{-s,j}.$$

Рассмотрим теперь равенства $c(\theta, \eta)_{ip} = 0$ при всех допустимых значениях θ и η как систему линейных уравнений относительно A_{ip}, B_{ip}, $A_{i,-p}$, $B_{i,-p}$. Так как имеется по крайней мере 2 допустимых значения θ и по крайней мере 4 допустимых значения η (напомним, что $|K| \geqslant 7$), то эта система переопределена и несложное вычисление показывает, что либо $b(\eta^{-1})_{-p,p}$ тождественно равно 0, либо ранг этой системы равен 4. В любом случае $A_{ip} = B_{ip} = 0$. Поскольку это верно для любого $i \neq p$, то в матрице $b = b(\varepsilon)$ для любого $\varepsilon \neq 0$ имеем $b_{ip} = b_{-i,p} = 0$ и мы снова можем применить лемму 20 и заключить, что b мономиальна. Если, кроме того, $\varepsilon \neq \pm 1$, то по лемме 21 вместе с ней мономиальна и матрица a, что и завершает доказательство предложения 3.

§6. Доказательство предложения 2

Теперь у нас все готово, чтобы завершить доказательство предложения 2 и, тем самым, основной теоремы в предположении $n = 2l \geqslant 6$, $|K| \geqslant 13$, $2 \in K^*$. К сожалению, автору не удалось придумать единого способа получения двух нулей в матрице из контр-примера, поэтому нам придется рассмотреть отдельно два случая, в зависимости от четности l. Впрочем, не исключено, что это различие связано с существом дела, так как абсолютный центр группы $\mathrm{Spin}(2l, K)$ является циклической группой порядка 4 для нечетного l и изоморфен Vierergruppe для четного l. Мы продолжаем анализ контр-примера X.

1. Матрицы $aD(\varepsilon)a^{-1}$. В этом пункте достаточно предполагать, что $|K| \geqslant 7$. Пусть $a \in X$ – немономиальная матрица. Предположим, что выполняется по крайней мере одно из следующих условий: $l = 2m$ или $\varepsilon \in K^{*2}$. Рассмотрим матрицу $a(\varepsilon) = aD(\varepsilon)a^{-1}$, принадлежащую X вместе с a (в самом деле, $D(\varepsilon) \in \Delta(2l, K)$ так как l четно). Положим

$$\lambda_{ij} = \sum a_{ih}a'_{hj} = \delta_{ij} - \sum a_{i,-h}a'_{-h,j},$$

здесь и далее все суммы берутся по $h = 1, \ldots, l$. В частности, в силу ортогональности, $\lambda_{i,-i} = -\lambda_{i,-i}$. Тем самым, для элементов матрицы $a(\varepsilon)$ имеем

$$a(\varepsilon)_{ij} = \begin{cases} \varepsilon^{-1} + (\varepsilon - \varepsilon^{-1})\lambda_{ii}, & j = i, \\ (\varepsilon - \varepsilon^{-1})\lambda_{ij}, & j \neq \pm i, \\ 0, & j = -i. \end{cases}$$

Мы видим, что для любых двух ε, η все недиагональные элементы матриц $a(\varepsilon)$ и $a(\eta)$ пропорциональны с одним и тем же коэффициентом пропорциональности $\mu = (\varepsilon - \varepsilon^{-1})(\eta - \eta^{-1})^{-1}$.

Лемма 22. *Если в матрице $a(\varepsilon)$, $\varepsilon \neq 0, \pm 1$, в какой-то позиции (p, q), $p \neq -q$, имеем $a(\varepsilon)_{pq} = 0$, то a мономиальна.*

Доказательство. В самом деле, так как, кроме того, $a(\varepsilon)_{p,-p} = 0$, то матрица $a(\varepsilon)$ мономиальна по лемме 20. Но тогда легко видеть, что $a(\varepsilon)$ диагональна. Действительно, так как $n \geqslant 6$, найдутся такие $i \neq \pm j$, что $a(\varepsilon)_{ij} = a(\varepsilon)_{i,-j} = 0$. В силу $\varepsilon \neq \pm 1$ это означает, что $\lambda_{ij} = \lambda_{i,-j} = 0$, так что $a(\eta)_{ij} = a(\eta)_{i,-j} = 0$ для всех $\eta \neq 0$. Это значит, что *все* матрицы $a(\eta)$, $\eta \neq 0$, мономиальны. Но ведь для фиксированного $i = 1, \ldots, -1$ равенство $a(\eta)_{ii} = 0$ представляет собой квадратное уравнение относительно η, которое имеет не более двух корней. Так как поле K содержит по крайней мере 7 элементов, то η, не являющиеся корнями этого уравнения, порождают K^*. Это значит, что $a(\theta)_{ii} \neq 0$ для всех $\theta \neq 0$. Поскольку это рассуждение верно для всех i, все матрицы $a(\theta)$, $\theta \neq 0$, диагональны. Так как матрица $a(\varepsilon)$ диагональна и сопряжена с $D(\varepsilon)$, то она сопряжена с $D(\varepsilon)$ уже при помощи мономиальной матрицы. Иными словами, найдется такая матрица $w \in N_\Gamma(T)$, что $aD(\varepsilon)a^{-1} = w^{-1}D(\varepsilon)w$. Это значит, что $waD(\varepsilon) = D(\varepsilon)wa$, так что $z = wa$ является блочной матрицей типа (l, l). Так как $l \geqslant 3$, матрица $a = w^{-1}z$ имеет в каждой строчке по крайней мере 3 нуля и, следовательно, мономиальна по предложению 3. Лемма доказана.

2. Случай $l = 2m$**.** В этом пункте мы предполагаем, что $|K| \geqslant 9$. Как замечено в начале пункта 1, недиагональные элементы матриц $a(\eta)$ и $a(\varepsilon)^{-1} = a(\varepsilon^{-1})$ пропорциональны с одним и тем же коэффициентом пропорциональности, так что в матрице $b = a(\varepsilon)D(\theta)a(\eta)$ для любого $\theta \neq 0$ и всех i имеем $b_{i,-i} = 0$. В самом деле, то, что диагональные элементы матриц $a(\eta)$ и $a(\varepsilon)^{-1}$ не являются пропорциональными с тем же коэффициентом, не играет никакой роли, так как при умножении i-й строки матрицы $a(\varepsilon)D(\theta)$ на $(-i)$-й столбец матрицы $a(\eta)$ они умножаются на нулевые элементы $a(\varepsilon)_{i,-i} = a(\eta)_{i,-i} = 0$. Нам осталось еще проверить, что выбирая $\theta \neq \pm 1$ можно получить в матрице b еще хотя бы один ноль. Тогда в матрице b будет два нулевых элемента в одной строке и мы сможем применить к ней предложение 3 и заключить, что b мономиальна.

Фиксируем теперь некоторые $p \neq \pm q$ и рассмотрим коэффициент b_{pq}. Непосредственное вычисление показывает, что

$$b_{pq} = (1 - \theta^{-1})\big(\theta \sum a(\varepsilon)_{ph} a(\eta)_{hq} - \sum a(\varepsilon)_{p,-h} a(\eta)_{-h,q}\big).$$

Осталось проверить, что можно выбрать ε и η так, чтобы θ, обращающее этот коэффициент в 0, было отлично от ± 1, т.е.

$$\sum a(\varepsilon)_{ph} a(\eta)_{hq} \neq \pm \sum a(\varepsilon)_{p,-h} a(\eta)_{-h,q}.$$

Но это совершенно ясно. Дело в том, что при фиксированном $\eta \neq 0, \pm 1$ каждое из этих равенств представляет собой уравнение второй степени относительно ε (в самом деле, по Лемме 22 имеем $a(\eta)_{ij} \neq 0$ для всех $i \neq -j$, а старший коэффициент и свободный член этого равенства отличаются на $a(\eta)_{pq}$). Это значит, что запрещая для ε значения $0, \pm 1$ и еще не более *четырех* значений, мы можем считать, что $\theta \neq \pm 1$. Таким образом, снова в матрице z есть по крайней мере два нуля и, значит, по предложению 3 она мономиальна. Нам осталось показать, что это влечет уравнения на коэффициенты исходной матрицы a, из которых вытекает, что тогда и сама a тоже мономиальна (так как ε и η в предшествующем рассуждении почти любые).

В самом деле, что, например, означает равенство $z_{pr}=0$ при $r\neq p,q$? Это значит, что

$$\frac{\sum a(\varepsilon)_{ph}a(\eta)_{hr}}{\sum a(\varepsilon)_{pq}a(\eta)_{hq}}=\frac{\sum a(\varepsilon)_{p,-h}a(\eta)_{-h,r}}{\sum a(\varepsilon)_{p,-h}a(\eta)_{-h,q}}.$$

Приводя к общему знаменателю и сокращая на $\varepsilon-\varepsilon^{-1}$, получим квадратное уравнение относительно ε, старший коэффициент и свободный член которого отличаются на

$$a(\eta)_{pr}\sum\lambda_{p,-h}a(\eta)_{-h,q}-a(\eta)_{pq}\sum\lambda_{p,-h}a(\eta)_{-h,r}.$$

Теперь взяв r и q разных знаков и сокращая на $\eta-\eta^{-1}$, получаем квадратное уравнение относительно η, старший коэффициент и свободный член которого отличаются на $\pm\lambda_{pr}\lambda_{pq}$. Таким образом, если $\lambda_{pr}\lambda_{pq}\neq 0$, то найдутся такие ε и η, что $z_{pr}\neq 0$, что невозможно. Поэтому на самом деле $\lambda_{pr}=0$ или $\lambda_{pq}=0$, что по лемме 22 означает, что a мономиальна.

3. Случай $l=2m+1$. В этом пункте мы предполагаем, что $|K|\geqslant 13$. То, что наш результат продолжает оставаться верным также для полей $\mathbb{F}_9$ и $\mathbb{F}_{11}$ требует несколько более детального анализа уравнений на η, проведенного в [30]. Как и выше, рассмотрим матрицу $b(\varepsilon^2)=aD(\varepsilon^2)a^{-1}$, принадлежащую X вместе с a. Как мы уже знаем, $b(\varepsilon^2)_{i,-i}=0$. Так как l нечетно, для любого $\theta\in K^*$ матрица $D^1(\theta)=D(\theta)D_1(\theta^{-1})$, равная

$$\mathrm{diag}(1,\theta,\dots,\theta,\theta^{-1}\dots,\theta^{-1},1),$$

принадлежит Δ. Теперь точно по той же причине, что и в предыдущем случае, в матрице $z=b(\varepsilon^2)D^1(\theta)b(\eta^2)$ для любых θ и i имеем $z_{i,-i}=0$. Покажем теперь, что можно выбрать θ так, чтобы в p-й строке матрицы z был хотя бы еще один нулевой элемент. В самом деле, при $q\neq\pm 1$, равенство $z_{pq}=0$ имеет (после сокращения на $1-\theta^{-1}$) вид

$$\theta\sum b(\varepsilon^2)_{ph}b(\eta^2)_{hq}-\sum b(\varepsilon^2)_{p,-h}b(\eta^2)_{-h,q}=0,$$

где суммы берутся не по $h = 1, \dots, l$, как выше, а по $h = 2, \dots, l$. Это равенство является линейным уравнением относительно θ. Заметим, прежде всего, что обе суммы в этом равенстве не обращаются в 0 одновременно. В самом деле, если бы это было так, то в матрице $c = b(e^2\eta^2)$ мы имели бы $c_{pp}c_{pq} = 0$, откуда следовало бы, что c мономиальная. Но необращение в 0 одной из сумм (той, которая не содержит член $b(\eta^2)_{qq}$) не зависит от η, а второй – зависит. Теперь если, скажем, $q > 0$ (для $q < 0$ рассуждение совершенно аналогично) и $\sum b(\varepsilon^2)_{p,-h} b(\eta^2)_{-h,q} = 0$, то это значит, что $\sum \lambda_{p,-h}\lambda_{-h,q} = 0$. Рассматривая вместо матрицы $D^1(\theta)$ матрицу, получающуюся из нее перестановкой на каких-то двух симметричных местах (кроме $\pm q$!) коэффициентов θ и θ^{-1}, мы можем повторить то же рассуждение. Либо для какой-то из получившихся матриц соответствующая сумма отлична от 0, либо для всех $h \neq \pm p, \pm q$ имеем $\lambda_{ph}\lambda_{hq} = \lambda_{p,-h}\lambda_{-h,q}$. Однако в последнем случае рассматривая вместо матрицы a какую-то матрицу $x = aD_{rs}(\zeta)a^{-1}$, где $\zeta \neq 0, \pm 1$, выбором ζ можно добиться того, чтобы для x аналогичные уравнения уже не были выполнены ($r \neq \pm s$ здесь могут быть любые, напомним, что по предложению 3 в каждой строке матрицы a не более одного 0). Поэтому мы с самого начала можем считать, что уже в самой матрице a эти уравнения не всегда выполнены, т.е. какая-то из нужных нам сумм отлична от 0. Таким образом, не теряя общности можно с самого начала считать, что, например, $\sum \lambda_{p,-h}\lambda_{-h,q} \neq 0$. Теперь выбор η позволяет считать, что

$$\sum b(\varepsilon^2)_{ph} b(\eta^2)_{hq} \neq \pm \sum b(\varepsilon^2)_{p,-h} b(\eta^2)_{-h,q}.$$

Напомним, что так как $b(\varepsilon^2)_{pq} \neq 0$, то каждое из этих равенств является нетривиальным уравнением *четвертой* степени относительно η, что, вместе с $\eta \neq 0, \pm 1$, запрещает самое большее 11 значений для η – это именно то место, где используется, что поле K содержит по крайней мере 13 элементов! Таким образом, найдется такое $\theta \neq 0, \pm 1$ такое, что $z_{pq} = 0$ для некоторых $p \neq \pm q$. Осталось *буквально* повторить рассуждения, использованные в пункте 2 для завершения доказательства в случае $n = 2l$. Предложение 2, а вместе с тем и основная теорема настоящей работы, полностью доказано.

4. Открытые вопросы. Смысл публикации настоящей работы состоит в том, чтобы стимулировать решение следующих вопросов.

Задача 1. Объединить результаты настоящей работы с результатами работ Е. В. Дыбковой [17]–[20] и получить описание подгрупп в Баковской унитарной группе $\mathrm{GU}(2n, K, \Lambda)$ (см. [32, 31]), содержащих унитарный аналог группы Δ.

Задача 2. Пользуясь техникой статьи [51], перенести результаты настоящей работы на спинорные группы над коммутативным полулокальным кольцом R с достаточно большими полями вычетов.

Задача 3. Снять в основной теореме настоящей работы условие $\mathrm{char}(K) \neq 2$.

Задача 4. Ослабить в основной теореме настоящей работы требование на K до $|K| \geqslant 7$.

Разумеется, решение всех этих задач можно искать как с помощью элементарной матричной техники, наподобие той, которая используется в настоящей работе, так и с более общих точек зрения геометрии торов [50] и мелких клеток Брюа [52]. По поводу более общего контекста, ссылок на работы о надгруппах нерасщепимых торов и других нерешенных проблем в этой области см. [10, 36, 28, 48].

Литература

1. З. И. Боревич, *Описание подгрупп полной линейной группы, содержащих группу диагональных матриц.* — Зап. научн. семин. ЛОМИ **64** (1976), 12–29.
2. З. И. Боревич, Н. А. Вавилов, *Подгруппы полной линейной группы над полулокальным кольцом, содержащие группу диагональных матриц.* — Тр. Мат. ин-т им. Стеклова АН СССР **148** (1978), 43–57.
3. А. Борель, Ж. Титс, *Редуктивные группы.* — Математика. Период. сб. перев. ин. статей **11**, № 1 (1967), 43-111; № 2, 3–31.
4. Н. А. Вавилов, *О подгруппах полной линейной группы над полулокальным кольцом, содержащих группу диагональных матриц.* — Вестн. ЛГУ. № 1 (1981), 10–15.
5. Н. А. Вавилов, *О подгруппах специальной линейной группы, содержащих группу диагональных матриц.* I–V. — Вестн. ЛГУ, сер. I. № 4 (1985), 3–7; № 2 (1986), 10–15; № 2 (1987), 3–8; № 3 (1988), 10–15; № 2 (1993), 10–15.
6. Н. А. Вавилов, *Подгруппы расщепимых классических групп.* Докт. Дисс., Ленингр. Гос. Ун-т, 1987, с. 1–334.

7. Н. А. Вавилов, *Теоремы сопряженности для подгрупп расширенных групп Шевалле, содержащих расщепимый максимальный тор.* — Докл. АН СССР **299**, № 2 (1988), 269–272.
8. Н. А. Вавилов, *О подгруппах расщепимых ортогональных групп.* I, II. — Сиб. мат. журн. **29**, № 3 (1988), 12–25; Зап. научн. семин. ПОМИ **265** (1999), 42–63.
9. Н. А. Вавилов, *О подгруппах расщепимых классических групп.* — Тр. Мат. ин-т им. Стеклова АН СССР **183** (1990), 29–41.
10. Н. А. Вавилов, *Подгруппы групп Шевалле, содержащие максимальный тор.* — Тр. Ленингр. Мат. Об-ва **1** (1990), 64–109.
11. Н. А. Вавилов, *О подгруппах спинорной группы, содержащих расщепимый максимальный тор.* I. — Зап. научн. семин. ЛОМИ **191** (1991), 49–75.
12. Н. А. Вавилов, *Унипотентные элементы в подгруппах расширенных групп Шевалле, содержащих расщепимый максимальный тор.* — Докл. РАН **328**, № 5 (1993), 536–539.
13. Н. А. Вавилов, *Подгруппы расщепимых ортогональных групп над коммутативным кольцом.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **281** (2001), 35–59.
14. Н. А. Вавилов, Е. В. Дыбкова, *Подгруппы полной симплектической группы, содержащие группу диагональных матриц.* I, II. — Зап. научн. семин. ЛОМИ **103** (1980), 31–47 **132** (1983), 44–56.
15. Н. А. Вавилов, М. Ю. Митрофанов, *Пересечения двух клеток Брюа.* — Докл. РАН **377**, No. 1 (2001), 1–4.
16. Н. А. Вавилов, А. А. Семенов, *Длинные корневые полупростые элементы в группах Шевалле.* — Докл. РАН **338**, № 6 (1994), 725–727.
17. Е. В. Дыбкова, *О сетевых подгруппах гиперболических унитарных групп.* — Алгебра и Анализ **9**, № 4 (1997), 87–96.
18. Е. В. Дыбкова, *Наддиагональные подгруппы гиперболической унитарной группы для хорошего форменного кольца над полем.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **236** (1997), 87–96.
19. Е. В. Дыбкова, *О сопряженности сетевых подгрупп в гиперболической унитарной группе над полем.* — Вестн. С.-Петербуг. Ун-та, Сер. 1. № 1 (1997), 8–11.
20. Е. В. Дыбкова, *Форменные сети и решетка наддиагональные подгрупп в симплектической группе над полем характеристики* 2. — Алгебра и Анализ **10**, № 4 (1998), 113–129.
21. А. Е. Егоров, А. А. Панин, *Теорема сопряженности для подгрупп* SL_n, *содержащих группу диагональных матриц.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **272** (2000), 177–185.
22. А. Е. Залесский, *Полупростые корневые элементы алгебраических групп.* — Препринт ИМ АН БССР. № 13(93) (1980), 1-24.
23. А. Е. Залесский, *Линейные группы.* — Успехи мат. наук **36**, № 6 (1981), 56–107.
24. А. Е. Залесский, *Линейные группы.* — В кн.: Итоги науки. Алгебра, Топология, Геометрия. М., 1985, с. 135–182.
25. В. А. Койбаев, *Подгруппы полной линейной группы над полем из трех элементов.* — В кн.: Структурные свойства алгебраических систем. Нальчик, 1981, с. 56–68.

26. В. А. Койбаев, *Подгруппы специальной линейной группы над полями из четырех и пяти элементов.* — В кн.: Арифметика и геометрия многообразий. Куйбышев, 1989, с. 78–91.

27. В. А. Койбаев, *Подгруппы специальной линейной группы порядка* 6 *над полем из четырех элементов, содержащие группу диагональных матриц.* — В кн.: Кольца и модули. Предельные теоремы Теории Вероятностей. Изд-во СПбГУ, 1993, с. 61–70.

28. В. А. Койбаев, *Подгруппы* $\mathrm{GL}(2,K)$*, содержащие нерасщепимый максимальный тор.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **211** (1994), 136–145.

29. А. С. Кондратьев, *Подгруппы конечных групп Шевалле.* — Успехи мат. наук **41**, № 1 (1986), 57–96.

30. Е. А. Филиппова, *О подгруппах спинорной группы, содержащих расщепимый максимальный тор.* III. — Зап. научн. семин. ПОМИ **289** (2002), 287–299.

31. A. Bak, N. Vavilov, *Structure of hyperbolic unitary groups* I. *Elementary subgroups.* — Algebra Colloq. **7** no. 2 (2000), 159–196.

32. A. Hahn, O. T.O'Meara, *The classical groups and K-theory.* Berlin et al., Springer, 1989.

33. A. L. Harebov, N. A. Vavilov, *On the lattice of subgroups of Chevalley groups containing a split maximal torus.* — Commun. Algebra **24** no. 1 (1996), 109–133.

34. O. H. King, *On subgroups of the special linear group containing the diagonal subgroup.* — J. Algebra **132** no. 1 (1990), 198–204.

35. M. W. Liebeck, G. M. Seitz, *Subgroups generated by root elements in groups of Lie type.* — Ann. Math. **139** no. 2 (1994), 293–361.

36. V. P. Platonov, *Subgroups of algebraic groups over a local or global field containing a maximal torus.* — C. R. Acad. Sci. Paris, Sér Math., **318** no. 10 (1994), 899–903.

37. G. M. Seitz, *Subgroups of finite groups of Lie type.* — J. Algebra **61** no. 1 (1979), 16–27.

38. G. M. Seitz, *Properties of the known simple groups.* — Proc. Symp. Pure Math. **37** (1980), 231–237.

39. G. M. Seitz, *On the subgroup structure of classical groups.* — Commun. Algebra **10** no. 8 (1982), 875–885.

40. G. M. Seitz, *Root subgroups for maximal tori in finite groups of Lie type.* — Pacif. J. Math. **106** no. 1 (1983), 153–244.

41. A. I. Steinbach, *Subgroups of classical groups generated by transvections or Siegel transvections.* I, II. — Geom. Dedic. **68** no. 3 (1997), 281–322; 323–357.

42. F. Timmesfeld, *Groups generated by k-transvections.* — Invent. Math. **100** no. 1 (1990), 167–206.

43. F. Timmesfeld, *Groups generated by k-root subgroups.* — Invent. Math. **106** no. 3 (1991), 575–666.

44. F. Timmesfeld, *Groups generated by k-root subgroups: a survey.* Groups, combinatorics & geometry (Durham – 1990). Cambridge Univ. Press, 1992, pp. 183–204.

45. F. Timmesfeld, *Abstract root subgroups and quadratic actions. With an appendix by A. E. Zalesskii.* — Adv. Math. **142** no. 1 (1999), 1–150.

46. N. A. Vavilov, *Subgroups of split orthogonal groups in even dimensions.* — Bull. Acad. Polon. Sci., Ser. sci. Math. **29** no. 9–10 (1981), 425–429.

47. N. A. Vavilov, *A conjugacy theorem for subgroups of* GL_n *containing the group of diagonal matrices.* — Colloq. Math. **54** no. 1 (1987), 9–14.
48. N. A. Vavilov, *Intermediate subgroups in Chevalley groups.* Proc. Conf. Groups of Lie type and their Geometries (Como – 1993). Cambridge Univ. Press, 1995, pp. 233–280.
49. N. A. Vavilov, *Unipotent elements in subgroups which contain a split maximal torus.* — J. Algebra **176** (1995), 356–367.
50. N. A. Vavilov, *Geometry of* 1*-tori in* GL_n. — Preprint Univ. Bielefeld no. 8 (1995), 1–21.
51. N. A. Vavilov, *Subgroups of* SL_n *over a semilocal ring.* — Preprint Univ. Bielefeld no. 111 (1998), 1–13.
52. N. A. Vavilov, *Overgroups of the diagonal subgroup via small Bruhat cells* (to appear).

Vavilov N. A. Subgroups of the spinor group containing a split maximal torus. II.

In the first paper of the series, we proved standardness of a subgroup H containing a split maximal torus in the split spinor group $\mathrm{Spin}(n, K)$ over a field K of characteristic not 2 containing at least 7 elements under one of the following additional assumptions: 1) H is reducible, 2) H is imprimitive, 3) H contains a non-trivial root element. In the present paper we finish the proof of a result announced by the author in 1990 and prove standardness of all intermediate subgroups provided $n = 2l$ and $|K| \geqslant 9$. For an algebraically closed K this follows from a classical result of Borel and Tits and for a finite K this was proven by Seitz. Similar results for subgroups of orthogonal groups $\mathrm{SO}(n, R)$ were previously obtained by the author, not only for fields, but for any commutative semi-local ring R with large enough residue fields.

С.-Петербургский
государственный
университет

Поступило 10 июня 2001 г.