Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 289, 2002 г.

Н. А. Вавилов, В. А. Петров

ВАРИАЦИИ НА ТЕМУ ХИГМЭНА

Мы показываем, что классическое вычисление Хигмэна [5] групп когомологий специальной линейной группы $\mathrm{SL}(n,K)$ над полем K с коэффициентами в естественном модуле $V=K^n$, зависит только от соотношений в группе Стейнберга и распространяется на случай произвольного, не обязательно даже коммутативного кольца. Интересным здесь является случай $n=3$, когда $H^1(\mathrm{SL}(3,\mathbb{F}_2),\mathbb{F}_2^3)=\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Распространение ответа на произвольные кольца в этом случае уже совершенно не очевидно.

Теорема. *Пусть R – произвольное ассоциативное кольцо, $n\geqslant 4$. Тогда для естественного модуля $V=R^n$ группы $G=\mathrm{GL}(n,R)$ имеет место равенство $H^1(\mathrm{St}(n,R),V)=0$. Для $n=3$*

$$H^1(\mathrm{St}(3,R),R^3)=\bigcap \mathrm{Ann}(\xi\zeta+\zeta\xi)\cap\bigcap \mathrm{Ann}((\xi^2+\xi)(\zeta^2+\zeta)),$$

где оба пересечения берутся по всем $\xi,\zeta\in R$.

Следствие 1. *Пусть $n\geqslant 4$. Тогда $H^1(\mathrm{E}(n,R),V)=0$.*

Доказательство. Пусть $\delta:\mathrm{E}(n,R)\to V$ – коцикл. Рассмотрим его инфляцию, то есть коцикл $\delta':\mathrm{St}(n,R)\to V$, определенный формулой $\delta'(x)=\delta(\varphi(x))$, где $\varphi:\mathrm{St}(n,R)\to\mathrm{E}(n,R)$ – каноническая проекция. Так как $H^1(\mathrm{St}(n,R),V)=0$, существует такой вектор $v\in V$, что $\delta'(x)=xv-v$ для любого $x\in\mathrm{St}(n,R)$. Пусть x – любой элемент $\mathrm{E}(n,R)$, и x' – его произвольный прообраз в $\mathrm{St}(n,R)$. Тогда $\delta(x)=\delta'(x')=x'v-v=xv-v$, то есть δ – кограница.

Следствие 2. *Пусть R – такое кольцо, что $\mathrm{E}(n,R)\trianglelefteq\mathrm{GL}(n,R)$, и $n\geqslant 4$. Тогда $H^1(\mathrm{GL}(n,R),V)=0$.*

Доказательство. Пусть $\delta:\mathrm{GL}(n,R)\to V$ – коцикл. Его ограничение на $\mathrm{E}(n,R)$, по предыдущему следствию, является кограницей, значит, подправляя δ на кограницу, можно считать, что

Настоящая работа выполнена в рамках проектов РФФИ 01-01-00924 (СПбГУ), 00-01-00441 (ПОМИ РАН) и INTAS 00-566.

$\delta|_{\mathrm{E}(n,R)} = 0$. Пусть g – любой элемент $\mathrm{GL}(n,R)$. Рассмотрим произвольный элемент $h \in \mathrm{E}(n,R)$. Тогда $h\delta(g) = \delta(h) + h\delta(g) = \delta(hg) = \delta(gg^{-1}hg) = \delta(g) + g\delta(g^{-1}hg) = \delta(g)$, то есть $\delta(g)$ неподвижен относительно каждого элемента $h \in \mathrm{E}(n,R)$, и, следовательно, равен 0.

Замечание. Доказательства обоих следствий немедленно получаются из точной последовательности Линдона–Хохшильда–Серра. Напомним, что если G – произвольная группа, $H \trianglelefteq G$, X – произвольный G-модуль, то имеет место точная последовательность

$$0 \to H^1(G/H, X^H) \to H^1(G,X) \to H^1(H,X)^G$$

Для следствия 1 нужно взять $G = \mathrm{St}(n,R)$, $H = K_2(n,R) = \mathrm{Ker}(\varphi)$, а для следствия 2 – $G = \mathrm{GL}(n,R)$, $H = \mathrm{E}(n,R)$.

Вычислению когомологий групп Шевалле и других классических групп *над полями* (в особенности *конечными* полями!), действующих на небольших модулях, посвящено необозримое количество работ, и мы не пытаемся дать здесь систематическую библиографию. Однако, как нам кажется, нигде ранее явно не отмечалось, что получающиеся при этом результаты зависят лишь от соотношений Стейнберга и обобщаются на произвольные кольца. Заметим, что в [6] второй из авторов настоящей работы обобщил основной результат на случай унитарных групп Стейнберга над форменным кольцом (см. [3, 4] по поводу определения этих групп и дальнейших ссылок). При этом оказалось, что для некоторых форменных колец H^1 нетривиальна для групп **всех** степеней. Вся оставшаяся часть работы посвящена доказательству сформулированной выше теоремы.

Доказательство. Группа и модуль. Для двух элементов x, y группы G через $[x,y] = xyx^{-1}y^{-1}$ обозначается их коммутатор. Напомним (см., например, [1, 2] или [4]), что группа Стейнберга $\Gamma = \mathrm{St}(n,R)$ порождается элементарными образующими $x_{ij}(\xi)$, $\xi \in R$, $i \neq j$, подчиненными соотношениям Стейнберга: $x_{ij}(\xi+\zeta) = x_{ij}(\xi)x_{ij}(\zeta)$ (аддитивность) и

$$[x_{ij}(\xi), x_{hk}(\zeta)] = \begin{cases} 1, & \text{если } j \neq h,\ i \neq k, \\ x_{ik}(\xi\zeta), & \text{если } j = h,\ i \neq k, \\ x_{hj}(-\zeta\xi), & \text{если } j \neq h,\ i = k \end{cases}$$

(коммутационная формула Шевалле). При этом $x_{ij}(\xi)$ действует *слева* на свободном *правом* R-модуле $V = R^n$ посредством элементарной трансвекции $t_{ij}(\xi) = e + \xi e_{ij}$, т.е. для вектора $v = (v_i) \in V$ имеем $x_{ij}(\xi)v = v + e_i \xi v_j$, где $e_1, \ldots, e_n$ – стандартный базис V.

Мы хотим показать, что в случае $n \geqslant 4$ любой 1-коцикл со значениями в V является кограницей, иными словами, имеет вид $a_{ij}^i(\xi) = \xi a_j$, в то время как $a_{jh}^i(\xi) = 0$ для всех остальных наборов i, j, h. В самом деле, рассмотрим коцикл $\delta : \Gamma \longrightarrow V$. Положим

$$\delta(x_{ij}(\xi)) = a_{ij}(\xi) = (a_{ij}^h(\xi)) \in V.$$

Соотношение 1. Воспользуемся соотношением $x_{ij}(\xi)x_{ij}(\zeta) = x_{ij}(\xi + \zeta)$. По определению коцикла

$$a_{ij}(\xi + \zeta) = a_{ij}(\xi) + x_{ij}(\xi)a_{ij}(\zeta) = a_{ij}(\zeta) + x_{ij}(\zeta)a_{ij}(\xi).$$

Для $h \neq i$ оба способа вычислить $a_{ij}^h(\xi + \zeta)$ дают $a_{ij}^h(\xi) + a_{ij}^h(\zeta)$. Для $h = i$ получаются разные результаты: в одном порядке $a_{ij}^i(\xi + \zeta) = a_{ij}^i(\xi) + a_{ij}^i(\zeta) + \xi a_{ij}^j(\zeta)$, а в другом порядке ξ и ζ меняются местами. Сравнивая, получаем $\zeta a_{ij}^j(\xi) = \xi a_{ij}^j(\zeta)$. Это соотношение справедливо для любого $n \geqslant 2$.

Соотношение 2. Если все четыре индекса i, j, h, k различны, то $x_{ij}(\xi)$ и $x_{hk}(\zeta)$ коммутируют, т.е. $[x_{ij}(\xi), x_{hk}(\zeta)] = 1$. Таким образом, снова

$$a_{ij}(\xi) + x_{ij}(\xi)a_{hk}(\zeta) = a_{hk}(\zeta) + x_{hk}(\zeta)a_{ij}(\xi).$$

Для $p \neq i, h$ мы не получим никаких соотношений, но для $p = i$ предыдущее равенство дает

$$a_{ij}^i(\xi) + a_{hk}^i(\zeta) + \xi a_{hk}^j(\zeta) = a_{hk}^i(\zeta) + a_{ij}^i(\xi).$$

Так как это равенство справедливо для всех ξ, то $a_{hk}^j(\zeta) = 0$ для всех $j \neq h, k$. Это соотношение имеет место для $n \geqslant 4$.

Соотношение 3. Если три индекса i, j, h различны, то имеет место равенство $[x_{ij}(\xi), x_{ih}(\zeta)] = 1$, которое дает

$$a_{ij}(\xi) + x_{ij}(\xi)a_{ih}(\zeta) = a_{ih}(\zeta) + x_{ih}(\zeta)a_{ij}(\xi).$$

Для $p \neq i$ мы не получаем никаких соотношений, в то время как для $p = i$ получаем $\xi a_{ih}^j(\zeta) = \zeta a_{ij}^h(\xi)$. Это соотношение имеет место для любого $n \geqslant 3$. Разумеется, для $n \geqslant 4$ оно вытекает из предыдущего соотношения, так как в этом случае обе части равны 0.

Соотношение 4. Если три индекса i, j, h различны, то имеет место равенство $[x_{ih}(\xi), x_{ih}(\zeta)] = 1$, которое дает

$$a_{ih}(\xi) + x_{ih}(\xi)a_{jh}(\zeta) = a_{jh}(\zeta) + x_{jh}(\zeta)a_{ih}(\xi).$$

Для $p \neq i, j$ мы не получаем никаких соотношений, в то время как для $p = i$ получаем $\xi a^h_{jh}(\zeta) = 0$, а для $p = j$, соответственно, $\zeta a^h_{ih}(\xi) = 0$. Это соотношение также справедливо для любого $n \geqslant 3$, причем даже в случае $n \geqslant 4$ оно не вытекает из соотношения 2. Подставляя это в соотношение 1, мы видим, что все a^i_{ij} аддитивны, т.е. $a^i_{ij}(\xi + \zeta) = a^i_{ij}(\xi) + a^i_{ij}(\zeta)$.

Соотношение 5. Если три индекса i, j, h различны, то имеет место равенство $[x_{hi}(\xi), x_{ij}(\zeta)] = x_{hj}(\xi\zeta)$, которое дает

$$a_{hi}(\xi) + x_{hi}(\xi)a_{ij}(\zeta) = a_{ij}(\zeta) + x_{ij}(\zeta)a_{hi}(\xi) + x_{ij}(\zeta)x_{hi}(\xi)a_{hj}(\xi\zeta).$$

Для $p \neq i, h$ получаем соотношение $a^p_{hj}(\xi\zeta) = 0$. Для $n \geqslant 4$ при $p \neq j$ это нам уже известно из соотношения 2, а для $p = j$ – из соотношения 3. Для $p = i$ получится следующее соотношение $\zeta a^j_{hi}(\xi) + \zeta a^j_{hj}(\xi\zeta) + a^i_{hj}(\xi\zeta) = 0$. Наконец, для $p = h$ получаем $\xi a^i_{ij}(\zeta) = \xi a^i_{hj}(\xi\zeta) + a^h_{hj}(\xi\zeta)$.

Окончание доказательства для $n \geqslant 4$**.** Так как для $n \geqslant 4$ первое слагаемое в правой части последнего соотношения равно 0, то, окончательно, $\xi a^i_{ij}(\zeta) = a^h_{hj}(\xi\zeta)$. Взяв здесь $\xi = 1$, видим, что $a^i_{ij}(\zeta) = a^h_{hj}(\zeta)$. Таким образом, $\xi a^i_{ij}(\zeta) = a^i_{ij}(\xi\zeta)$ так что в сочетании с соотношением 3, мы убеждаемся, что все функции a^i_{ij} линейны. Зафиксируем любой i и положим $a_j = a^i_{ij}(1)$, как вытекает из соотношения 5, элемент a_j не зависит от выбора i. Рассмотрим вектор $a = (a_j) \in V$. По только что доказанному, для любой элементарной образующей $x_{ij}(\xi)$ имеем $\delta(x_{ij}(\xi)) = (a^h_{ij}(\xi)) = a^i_{ij}(\xi)e_i = \xi a_j e_i$. Это значит, что для всех элементарных образующих $\delta(x_{ij}(\xi)) = x_{ij}(\xi)a - a$. Пусть теперь $x \in \mathrm{St}(n, R)$ – произвольный элемент. Докажем, что тогда $\delta(x) = xa - a$. Проведем индукцию по длине l элемента x в элементарных образующих. База индукции $l = 1$ только что доказана. Предположим, что $x = yz$, где длины y и z строго меньше l. Тогда по определению коцикла

$\delta(x) = \delta(y) + y\delta(z)$. По индукционному предположению это равно $(ya - a) + y(za - a) = (yz)a - a = xa - a$, что и утверждалось.

Окончание доказательства для $n = 3$. В силу соотношения 4 соотношение 5 для $p = i$ превращается в $\zeta a^j_{hi}(\xi) + a^i_{hj}(\xi\zeta) = 0$. В частности, $a^j_{hi}(1) + a^i_{hj}(1) = 0$. С другой стороны, по соотношению 3, $a^j_{hi}(\xi) = \xi a^i_{hj}(1)$. В частности, $a^j_{hi}(1) = a^i_{hj}(1)$ и, значит, $a^j_{hi}(\xi) = \xi a^j_{hi}(1)$. Тем самым, $a^j_{hi}(1) \in \mathrm{Ann}(2)$ для попарно различных i, j, h. Подстановка в соотношение 5 $p = h$, $\xi = 1$, дает $a^i_{hj}(\zeta) = a^i_{ij}(\zeta) - a^h_{hj}(\zeta)$, в частности, $a^i_{hj}(1) = a^i_{ij}(1) - a^h_{hj}(1)$ и, в силу симметрии между i и h, $a^h_{ij}(1) = a^h_{hj}(1) - a^i_{ij}(1)$. Сравнивая выражения для $a^i_{hj}(1)$ и $a^h_{ij}(1)$ и вспоминая, что все $a^i_{hj}(1)$ аннулируются 2, мы видим, что все шесть значений $a^i_{hj}(1)$ равны между собой. Обозначим их общее значение через α. Ясно, что $\alpha \in \mathrm{Ann}(\xi\zeta + \zeta\xi)$.

В этих обозначениях приведенные выше частные случаи соотношения 5 примут вид $\xi(a^i_{ij}(\zeta) - \xi\zeta\alpha) = a^h_{hj}(\xi\zeta)$ и $a^i_{ij}(\zeta) - a^h_{hj}(\zeta) = \zeta\alpha$, откуда $a^h_{hj}(\xi\zeta) = \xi\zeta(\alpha + \xi) + \xi a^h_{hj}(\zeta)$. Подставляя сюда $\zeta = 1$ и исключая из получившейся системы уравнений $a^h_{hj}(1)$, получим искомое условие на α, а именно, $(\xi^2 + \xi)(\zeta^2 + \zeta)\alpha = 0$ для всех $\xi, \zeta \in R$.

Обратно, по любому $\alpha \in \bigcap \mathrm{Ann}(\xi\zeta + \zeta\xi) \cap \bigcap \mathrm{Ann}((\xi^2 + \xi)(\zeta^2 + \zeta))$, можно построить коцикл. В самом деле, подправляя любой коцикл на кограницу, можно считать, что $a^1_{12}(1) = a^1_{13}(1) = a^2_{21}(1) = 0$. Тогда $a^2_{23}(1) = a^3_{31}(1) = a^3_{32}(1) = \alpha$ и явные формулы для коцикла примут вид: 1) $a^i_{ij}(\xi) = (\xi^2 + \xi)\alpha$ для $(i, j) = (1, 2), (1, 3), (2, 1)$, 2) $a^i_{ij}(\xi) = \xi^2\alpha$ для $(i, j) = (2, 3), (3, 1), (3, 2)$, 3) $a^i_{ji}(\xi) = 0$ и 4) $a^i_{jh}(\xi) = \xi\alpha$, если i, j, h попарно различны.

Литература

1. Дж. Милнор, *Введение в алгебраическую K-теорию.* М., Мир, 1974.
2. Р. Стейнберг, *Лекции о группах Шевалле.* М., Мир, 1975.
3. A. Bak, N. Vavilov, *Structure of hyperbolic unitary groups* I. *Elementary subgroups.* — Algebra Colloquium **7**, no. 2 (2000), 159–196.
4. A.J. Hahn, O.T. O'Meara, *The classical groups and K-theory.* Berlin et al., Springer, 1989.
5. G.Higman, *Flag transitive collineation groups of finite projective spaces.* — Illinois J. Math. **6** (1962), 432–446.
6. V.A. Petrov, *On the first cohomology of unitary Steinberg groups.* — submitted to Algebra Colloquium.

Vavilov N. A., Petrov V. A. Variations on a theme of Higman.

Let R be an associative ring with 1, $n \geqslant 3$, We show that Higman's computation of the first cohomology group of the special linear group over a field with natural coefficients really shows that $H^1(\mathrm{St}(n,R),R^n)=0$ for $n \geqslant 4$ and explicitly compute this group for $n=3$, when it does not vanish. In [6] the second-named author extended these results to all classical Steinberg groups.

С.-Петербургский
государственный университет

E-mail: vavilov@mathematik.uni-bielefeld.de
vavilov@ pdmi.ras.ru
petrov@mathematik.uni-bielefeld.de

Поступило 10 июня 2002 г.