Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 289, 2002 г.

А. И. Виноградов

ТОЧКИ ПОД ГИПЕРБОЛОЙ И ПРОБЛЕМА КРУГА. СПЕКТРАЛЬНЫЙ ПОДХОД

К 80-летию академика Й. П. Кубилюса

Введение

Проблема целых точек под гиперболой сводится к нахождению асимптотики среднего для функции числа делителей

$$\tau(n) = \sum_{x \cdot y = n} 1, \tag{0.1}$$

в любом конечном интервале $(1 \leqslant n \leqslant X)$

$$D(X) = \sum_{n \leqslant X} \tau(n) = \sum_{x \cdot y \leqslant X} 1. \tag{0.2}$$

Из транзитивного равенства (0.2) видно, что среднее $D(X)$ является числом целых точек (x, y) правого верхнего квадранта плоскости под гиперболой

$$x \cdot y = X. \tag{0.3}$$

Проблема состоит в том, чтобы получить асимптотику среднего (0.2) с предельным остатком

$$D(X) = X \cdot \big[\log X + 2\gamma - 1\big] + O\Big(X^{\frac{1}{4}+\varepsilon}\Big) \tag{0.4}$$

при любом фиксированном $\varepsilon > 0$.

Сейчас равенство (0.4) получено только для некоторого фиксированного $\varepsilon = \varepsilon_0$. В частности, первый нетривиальный остаток при $\varepsilon = \varepsilon_1 = \frac{1}{4}$ принадлежит Дирихле. Второй результат, при $\varepsilon = \varepsilon_2 = \frac{1}{12}$ принадлежит Вороному. Затем получено еще несколько результатов, которые немного улучшают оценку Вороного.

На спектральном пути мы сможем получить предельный остаток в (0.4) для любого $\varepsilon > 0$.

Но прежде чем переводить задачу на спектральный язык, мы кратко напомним классическую схему, приводящую к результату Вороного, для того, чтобы выяснить то место в классической схеме, где появляется спектральная точка зрения и как она меняет явный вид классического остатка в равенстве (0.4).

Производящей функцией суммы (0.2) является квадрат классической дзета-функции Римана

$$\zeta^2(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\tau(n)}{n^s}, \quad \operatorname{Re} s > 1. \tag{0.5}$$

Используя конечный аналог известного разрывного интеграла

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\operatorname{Re} s>1} \left(\frac{X}{n}\right)^s \frac{ds}{s} = \begin{cases} 1, & n < X, \\ \frac{1}{2}, & n = X, \\ 0, & n > X, \end{cases}$$

получаем интегральное представление для суммы (0.2)

$$D(X) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\sigma-iT}^{\sigma+iT} \frac{X^s}{s} \zeta^2(s) ds + O\left(\frac{X}{T} \log^2 X\right), \tag{0.6}$$

где

$$\sigma = 1 + \frac{1}{\log X}, \quad T \in \left(X^{\frac{2}{3}}, X^{\frac{3}{4}}\right).$$

Затем сдвигаем контур интеграла (0.6) в левую полуплоскость и получаем вычет в полюсе второго порядка $\zeta^2(s)\big|_{s=1}$ и остаток в виде интеграла (0.6), но уже в левой полуплоскости.

В результате равенство (0.6) преобразуется к новому виду

$$\Delta(X) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{-\varepsilon-iT}^{-\varepsilon+iT} \frac{X^s}{s} \zeta^2(s)\, ds + O\left(\frac{X}{T} \log^2 X\right), \quad \varepsilon = \frac{1}{\log X}, \tag{0.7}$$

$$\Delta(X) = \Big[D(X) - X(\log X + 2\gamma - 1)\Big], \quad \gamma \text{ – константа Эйлера.} \tag{0.8}$$

Равенство (0.7) является интегральным представлением разности (0.8) между исходной суммой $D(X)$ и ее главным членом из правой части (0.4).

Затем используем функциональное уравнение для квадрата ζ-функции в ядре интеграла (0.7)

$$\zeta^2(s) = \pi^{2s-1} \cdot \Gamma^2\left(\frac{1-s}{2}\right) \cdot \Gamma^{-2}\left(\frac{s}{2}\right) \cdot \zeta^2(1-s). \qquad (0.9)$$

Это дает возможность поменять порядки интегрирования (0.7) и суммирования

$$\zeta^2(1-s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\tau(n)}{n^{1-s}}.$$

В результате мы сведем задачу к вычислению интегралов вида

$$J_n(X) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{-\varepsilon-iT}^{-\varepsilon+iT} (\pi^2 \vec{X} \cdot n)^s \cdot \Gamma^2\left(\frac{1-s}{2}\right) \cdot \Gamma^{-2}\left(\frac{s}{2}\right) \frac{ds}{s}. \qquad (0.10)$$

Затем, используя асимптотки Γ-функций и вычисляя интегралы (0.10) по стац-фазе, получаем в правой части (0.7) известную сумму:

$$\sqrt[4]{X} \sum_{n \leqslant \frac{1}{X}\left(\frac{T}{\pi}\right)^2} \tau(n)\vec{n}^{-3/4} \cdot \exp\left(2\pi i\sqrt{X \cdot n}\right) \quad n \leqslant \frac{1}{X}\left(\frac{T}{\pi}\right)^2. \qquad (0.11)$$

Тем самым проблема сводится к оценке суммы (0.11) без коэффициента $\sqrt[4]{X}$. Предполагается, что она имеет порядок X^ε при $T = X^{3/4}$ для любого $\varepsilon > 0$.

Если положить $T = (X \cdot \log X)^{2/3}$, тогда тривиальная оценка остатка (0.11) сравняется с остатком в O-символе (0.7), и мы получим оценку типа Вороного

$$\Delta(X) \ll X^{1/3} (\log X)^{4/3}. \qquad (0.12)$$

§1. Перевод задачи на спектральный язык

Чтобы перевести эту задачу на спектральный язык, надо заметить, что $\zeta^2(s)$ при $\operatorname{Re} s > 1$ можно разбить по прогрессиям любого фиксированного модуля $c \geqslant 1$

$$\zeta^2(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\tau(n)}{n^s} = \sum_{\mathcal{M}=1}^{c} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\tau(c \cdot m + \mathcal{M})}{(c \cdot m + \mathcal{M})^s} =$$

$$= \frac{1}{c^{2s}} \cdot \sum_{\mathcal{M}=1}^{c} \sum_{\substack{a,d=1 \\ a\cdot d\equiv\mathcal{M}(\mathrm{mod}\, c)}}^{c} \zeta\left(s, \frac{a}{c}\right) \cdot \zeta\left(s, \frac{d}{c}\right), \tag{1.1}$$

где

$$\zeta(s,\alpha) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(m+\alpha)^s}, \quad \alpha > 0, \quad \mathrm{Re}\, s > 1. \tag{1.2}$$

Отметим, что сдвинутая дзета-функция (1.2) также продолжима на всю s-плоскость, имеет единственный полюс первого порядка в точке $s = 1$ с единичным вычетом и функциональное уравнение римановского типа: ($\mathrm{Re}\, s < 0$)

$$\begin{aligned} \zeta(s,\alpha) = \frac{\Gamma(1-s)}{(2\pi)^{1-s}} \Bigg\{ \left(\sum_{m=1}^{\infty} \frac{\cos 2\pi\alpha m}{m^{1-s}} \right) \sin \frac{\pi s}{2} + \\ + \left(\sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sin 2\pi\alpha m}{m^{1-s}} \right) \cos \frac{\pi s}{2} \Bigg\}, \end{aligned} \tag{1.3}$$

которое имеет и другую форму, если перевести тригонометрические функции на язык мнимых экспонент по формулам Эйлера

$$\zeta(s,\alpha) = \frac{\Gamma(1-s)}{i(2\pi)^{1-s}} \left[e^{\frac{\pi}{2} is} \zeta^*(1-s;\alpha) - e^{-\frac{\pi}{2} is} \zeta^*(1-s;-\alpha) \right] \tag{1.4}$$

где

$$\zeta^*(w,\alpha) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{e^{2\pi i\alpha m}}{m^w}, \quad \mathrm{Re}\, w > 1.$$

Начальные сведения о сдвинутых ζ-функциях (1.2), вместе с функциональным уравнением (1.3), можно найти в [1], глава II, §17. Отсюда следует, что вторая часть транзитивного равенства (1.1)

$$\zeta^2(s) = \frac{1}{c^{2s}} \cdot \sum_{\mathcal{M}=1}^{c} \sum_{\substack{a,d=1 \\ a\cdot d\equiv\mathcal{M}(\mathrm{mod}\, c)}}^{c} \zeta\left(s, \frac{a}{c}\right) \cdot \zeta\left(s, \frac{d}{c}\right) \tag{1.5}$$

справедлива во всей комплексной s-плоскости. Поэтому равенство (1.5) можно подставить в ядро интеграла правой части (0.7) и придать интегралу новый вид

$$\sum_{\mathcal{M}=1}^{c} \sum_{\substack{a,d=1 \\ a\cdot d\equiv\mathcal{M}(\mathrm{mod}\, c)}}^{c} \frac{1}{2\pi i} \int_{-\varepsilon-iT}^{-\varepsilon+iT} \left(\frac{X}{c^2}\right)^s \cdot \zeta\left(s, \frac{a}{c}\right) \cdot \zeta\left(s, \frac{d}{c}\right) \cdot \frac{ds}{s}. \tag{1.6}$$

Затем в ядрах интегралов из (1.6) можно использовать два функциональных уравнения (1.4), одно – для функции $\zeta(s,\frac{a}{c})$, другое – для $\zeta(s,\frac{d}{c})$. В результате получается общее уравнение для их произведения

$$\zeta(s,\alpha)\cdot\zeta(s,\beta)=\frac{\Gamma^2(1-s)}{(2\pi)^{2(1-s)}}\Big[\zeta^*(1-s;\alpha,-\beta)+\zeta^*(1-s;-\alpha,\beta)-$$

$$e^{\pi is}\cdot\zeta^*(1-s;\alpha,\beta)-e^{-\pi is}\cdot\zeta^*(1-s;-\alpha,-\beta)\Big]. \qquad (1.7)$$

В правой части равенства (1.7) использован новый символ для произведения двух ζ^*-функций

$$\zeta^*(1-s;\alpha,\beta)=\zeta^*(1-s;\alpha)\cdot\zeta^*(1-s;\beta).$$

Из правой части равенства (1.7) видно, что интеграл из (1.6) распадается на четыре интеграла. В двух первых будет простое Γ-ядро вида

$$\Gamma^2(1-s)/(2\pi)^{2(1-s)}, \qquad (1.9)$$

а в двух других появятся экспоненциальные множители

$$e^{\pm\pi is}\cdot\Gamma^2(1-s)/(2\pi)^{2(1-s)}, \qquad (1.10)$$

С точки зрения дальнейших вычислений интегралы с Γ-ядром (1.9) тривиальны по причине экспоненциального убывания Γ-ядра (1.9), т.е. оцениваются как $O(1)$.

Нетривиальными остаются только два интеграла с Γ-ядрами (1.10). Для определенности мы рассмотрим первый из них со знаком +1 в показателе экспоненты (1.10)

$$\frac{1}{(2\pi)^3\cdot i}\int\limits_{-\varepsilon-iT}^{-\varepsilon+iT}\left(\frac{2\pi\sqrt{X}}{c}\right)^{2s}\cdot\Gamma^2(1-s)\cdot e^{\pi is}\times$$

$$\times\zeta^*\left(1-s;\frac{a}{c}\right)\cdot\zeta^*\left(1-s;\frac{d}{c}\right)\frac{ds}{s}. \qquad (1.11)$$

Снова, меняя порядки интегрирования и суммирования (теперь уже двойного), мы получим интеграл

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-\varepsilon-iT}^{-\varepsilon+iT}\left(\frac{2\pi\sqrt{X\cdot m\cdot n}}{c}\right)^{2s}\cdot\Gamma^2(1-s)\cdot e^{\pi is}\frac{ds}{s}. \qquad (1.12)$$

Этот интеграл аналогичен интегралу (0.10) и вычисляется по стац-фазе точно так же. В результате вместо суммы (0.11) получается более сложная сумма

$$r_c(X) = \lambda \cdot \frac{\sqrt[4]{X}}{c^2} \cdot \sum_{\mathcal{M}=1}^{c} \sum_{\pi\sqrt{X\cdot n\cdot m}\leqslant cT} S_c(n,m;\mathcal{M})\times$$

$$\times\left(\frac{2\pi\sqrt{nm}}{c}\right)^{-\frac{3}{2}} \cdot \exp\left(i\sqrt{X}\cdot\frac{2\pi\sqrt{nm}}{c}\right), \tag{1.13}$$

где $\lambda \neq 0$ – некоторая абсолютная константа, $S_c(n,m;\mathcal{M})$ – общая сумма Клоостермана из работы [2]

$$\begin{gathered} S_c(n,m;\mathcal{M}) = \sum_{a,d=1}^{c} \delta_c(ad-\mathcal{M}) \cdot \exp\left(2\pi i\frac{an+dm}{c}\right) \\ \delta_c(k) = \begin{cases} 1, & k \equiv 0(\operatorname{mod} c) \\ 0, & k \not\equiv 0(\operatorname{mod} c) \end{cases}. \end{gathered} \tag{1.14}$$

Второй случай Г-ядра (1.10) с множителем $\exp(-\pi i s)$ предполагает и смену знаков у параметров α и β в определении (1.4) ζ^*-функции ядра (1.11). Это означает, что во втором аналоге суммы (1.13) изменятся знаки у параметров сумма Клоостермана $S_c(-n,-m;\mathcal{M})$. Но из ее определения (1.14) видно, что справедливо равенство

$$S_c(-n,-m;\mathcal{M}) = S_c(n,m;\mathcal{M}).$$

Поэтому вторая сумма будет точно такая же как и (1.13).

Взгляд искушенного читателя может отметить, что в показателе экспоненты суммы (1.13) появляется спектральный параметр

$$\frac{1}{2}\cdot x = \frac{2\pi\sqrt{nm}}{c}. \tag{1.15}$$

Это и есть главная новость перевода проблемы точек под гиперболой на спектральный язык. Другими словами, на спектральном пути появляется усредняющий параметр, которого нет в классическом случае (0.11). *Интегрирование по спектральному параметру* (1.15) *позволяет получить окончательное решение проблемы точек под гиперболой.*

Но параметр (1.15) действительно станет спектральным только после усреднения схемы счета по параметру $c \geqslant 1$. Такое усреднение действительно можно провести, т.к. модуль c у нас произвольный.

§2. Усреднение по модулю c

Из определения суммы (1.13) ясно, что в равенстве (0.7) на место интеграла правой части можно поставить удвоенную сумму (1.13)

$$\Delta(X) = 2 \cdot r_c(X) + O\left(\frac{X}{T} \log^2 X\right). \tag{2.1}$$

Но прежде чем проводить усреднение равенства (2.1) по c, мы должны избавиться в сумме (1.13) от ограничения $\mathcal{M} \leqslant c$, которое плохо согласуется с переводом на спектральный язык. Для этого мы воспользуемся периодичностью суммы Клоостермана (1.14) по параметру $\mathcal{M}$

$$S_c(n, m; \mathcal{M} + k \cdot c) = S_c(n, m; \mathcal{M}).$$

Это равенство справедливо при любом $k \in \mathbb{Z}$, что сразу следует из определения (1.14) суммы $S_c(n, m; \mathcal{M})$. Поэтому для произвольного параметра $N \geqslant c$ справедливо равенство

$$\sum_{\mathcal{M}=1}^{N} S_c(n, m; \mathcal{M}) = \left[\frac{N}{c}\right] \cdot \sum_{\mathcal{M}=1}^{c} (\dots) + \sum_{c\left[\frac{N}{c}\right] < \mathcal{M} \leqslant N} (\dots), \tag{2.2}$$

где $(\dots) = S_c(n, m; \mathcal{M})$.

Вторая сумма правой части (2.2) имеет смысл только для $N \not\equiv 0 (\operatorname{mod} c)$, в противном случае считаем ее пустой.

Прочитывая равенство (2.2) в обратную сторону и пользуясь тривиальной оценкой

$$\left|S_c(n, m; \mathcal{M})\right| \leqslant c \cdot \tau\big((\mathcal{M}, c)\big),$$

получаем асимптотику

$$\sum_{\mathcal{M}=1}^{c} S_c(n, m; \mathcal{M}) = \frac{c}{N} \sum_{\mathcal{M}=1}^{N} (\dots) + O\left(\frac{c^3}{N} \prod_{p\cdot} \left(1 + \frac{1}{p}\right)\right). \tag{2.4}$$

Параметр N ограничим снизу условием

$$N \gg c^3 \sqrt[8]{X} \gg c^3 \cdot \sqrt{\frac{T}{\sqrt{X}}}. \tag{2.5}$$

Второе транзитивное условие (2.5) выполняется автоматически благодаря ограничению $T \leqslant X^{3/4}$, которое, в свою очередь, следует из определения параметра $T \in (X^{2/3}, X^{3/4})$. Учитывая неравенства (2.5), подставим (2.4) в (1.13) и преобразуем это равенство к новому виду

$$r_c(X) = \lambda \cdot \frac{\sqrt[4]{X}}{c \cdot N} \cdot \sum_{\mathcal{M}=1}^{N} (\cdot) + O\Big(\sqrt[4]{X} \log^2 X\Big). \tag{2.6}$$

Внутренее ядро суммы правой части (2.6) осталось тем же самым, что и в (1.13). Изменилась только длина внешнего суммирования по $\mathcal{M}$ и, соответственно, его нормировка стала $1/N$ вместо прежней $1/c$. Порядок остатка в (2.6) обеспечивает условие (2.5) на параметр N.

Теперь возьмем финитную функцию $f(x)$, носитель которой расположен на интервале

$$\frac{1}{2} \leqslant x \leqslant \frac{3}{2} \tag{2.7}$$

и будем считать, что $f(x)$ симметрична относительно центра $x = 1$ своего носителя и достигает в этой точке своего максимума: $f(1) = 1$, а слева и справа она монотонна и бесконечно гладка. Затем выберем произвольный параметр $Y > 1$ и умножим равенство (2.1) на $f(x)$ в точке $x = \frac{c}{Y}$

$$f\left(\frac{c}{Y}\right)\Delta(X) = 2f\left(\frac{c}{Y}\right)r_c(X) + O\left(f\left(\frac{c}{Y}\right)\frac{X}{T}\log^2 X\right). \tag{2.8}$$

После чего просуммируем обе части равенства (2.8) по всем $c \geqslant 1$. В результате равенство (2.8) трансформируется к новому виду:

$$\Delta(X) = \frac{2 \cdot \lambda_f}{\lambda \cdot Y} \sum_{c=1}^{\infty} f\left(\frac{c}{Y}\right) r_c(X) + O\left(\frac{X}{T}\log^2 X\right). \tag{2.9}$$

При этом мы считаем справедливым нормировочное равенство

$$\lambda_f \sum_{c=1}^{\infty} f\left(\frac{c}{Y}\right) = Y \cdot \lambda \tag{2.10}$$

с некоторой константой $\lambda_f > 0$, зависящей от функции f.

Для перевода на спектральный язык полученной суммы в (2.9) нам еще мешает разрывное условие для тройного суммирования по параметрам $(n; m; c)$ в сумме (1.13)

$$\pi\sqrt{X \cdot m \cdot n} \leqslant cT, \tag{2.11}$$

которое появилось от границы точек стац-фазы при счете исходных интегралов. Для того, чтобы избавиться от ограничения (2.11) мы снова воспользуемся разрывным интегралом

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\operatorname{Re} w > 0} \left(\frac{cT}{\pi\sqrt{X \cdot n \cdot m}}\right)^w \frac{dw}{w}, \tag{2.12}$$

который обеспечивает нам условие (2.11). Его недостатком является слабая сходимость. Для ее усиления мы снова умножим равенство (2.9) на финитную функцию $f(x)$, но уже для $x = \frac{T}{T_0}$, где $T_0 \in \left(2X^{2/3}, \frac{2}{3}X^{3/4}\right)$. После чего проинтегрируем обе части равенства (2.9) по T в интервале $(0, \infty)$. В результате равенство (2.9) преобразуется к новому виду

$$\Delta(X) = \frac{2\mu_f \lambda_f}{\lambda \cdot Y} \sum_{c=1}^{\infty} f\left(\frac{c}{Y}\right) r_c(X) + O\left(\frac{X}{T} \log^2 X\right). \tag{2.13}$$

Константа μ_f определяется гиперболическим равенством

$$\mu_f \cdot \int\limits_0^{\infty} f(x)dx = 1.$$

При этом условие (2.5) на параметр N так же преобразуется к новому виду

$$N \gg Y^3 \sqrt[8]{X} \gg Y^3 \sqrt{\frac{T_0}{\sqrt{X}}}. \tag{2.14}$$

Сумму $r_c(X)$ в правой части (2.13) мы будем теперь считать суммой (1.13), в которой разрывное условие заменено интегралом

(2.12) и он проинтегрирован по T вместе с финитной функцией $f(\frac{T}{T_0})$. После k-кратного интегрирования по частям, где $k \geqslant 1$ – любое фиксированное целое, этот интеграл преобразуется к новому виду

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\operatorname{Re} w > 0} \left(\frac{T_0 \cdot c}{\pi \sqrt{X \cdot n \cdot m}} \right)^w \frac{\psi(w) \cdot dw}{w(w+1)\dots(w+k)}, \tag{2.15}$$

где

$$\psi(w) = \int\limits_0^\infty x^{w+k} \cdot f^{(k)}(x) dx.$$

Хотя снятие разрывного ограничения (2.11) делает параметры n и m свободными, но присутствие финитных функций $f(\frac{c}{Y})$ и $f(\frac{T}{T_0})$ позволяет ограничить их верхними пределами носителей этих функций

$$\pi \sqrt{X \cdot n \cdot m} \leqslant \left(\frac{3}{2}\right)^2 \cdot T_0 \cdot Y. \tag{2.16}$$

В результате главный член правой части (2.13) преобразуется к окончательному виду

$$\Delta(X)$$
$$= \frac{\sqrt[4]{X}}{2\pi i} \int\limits_{\operatorname{Re} w > 0} \left(\frac{4 \cdot T_0}{\sqrt{X}} \right)^w \frac{R(w) \cdot dw}{w(w+1)\dots(w+k)} + O\left(\frac{X}{T_0} \log^2 X \right), \tag{2.17}$$

где

$$R(w) = \frac{2\mu_f \lambda_f}{Y \cdot N} \sum_{\sqrt{X \cdot m \cdot n} \leqslant 9/4 T_0 Y} \sum_{\mathcal{M}=1}^{N} (2\sqrt{\mathcal{M}})^{3/2+w} F_{\mathcal{M}}(w), \tag{2.18}$$

$$F_{\mathcal{M}}(w) = \sum_{c=1}^{\infty} \frac{S_c(n, m; \mathcal{M})}{c} \varphi(u), \tag{2.19}$$

$$\varphi(u) = u^{-3/2-w} f\left(\frac{4\pi}{u \cdot Y} \sqrt{n \cdot m \cdot \mathcal{M}} \right) \exp\left(\frac{i}{2} u \sqrt{\frac{X}{\mathcal{M}}} \right), \tag{2.20}$$

$$u = \frac{4\pi}{c} \sqrt{n \cdot m \cdot \mathcal{M}}. \tag{2.21}$$

Отметим, что в равенстве (2.21) приведен обобщенный спектральный параметр из работы [2] для любого $\mathcal{M} \geqslant 1$. В равенстве (1.15) мы использовали простейший случай при $\mathcal{M} = 1$.

Сумма (2.19) является типичной спектральной суммой из работы [2] для группы $\mathrm{SL}(2, \mathbb{Z})$, а весовая функция $\varphi(u)$ из равенства (2.20) удовлетворяет всем требованиям теоремы 2, a), [2]. Поэтому мы можем получить спектральное разложение суммы (2.19)

$$F_{\mathcal{M}}(w) = \Big(F_{\mathcal{M}}^{\mathrm{cusp}} + F_{\mathcal{M}}^{\mathrm{disc}} + F_{\mathcal{M}}^{\mathrm{con}}\Big)(w). \tag{2.22}$$

Три символа спектральных компонент (2.22) идут в том же порядке, как и в работе [2]. Отметим, что в cusp-компоненте теоремы 2, a), [2] есть опечатка: на месте весовой функции $h^{+)}(\ell)$ должна стоять функция

$$\widetilde{h}(2\ell - 1) = \int\limits_0^\infty J_{2\ell-1}(x)\varphi(x)\frac{dx}{x}. \tag{2.23}$$

По этому поводу см. работу [3], равенства (1.19) и (1.21).

Подставляя (2.22) в (2.18) получаем спектральное разложение общей суммы

$$R(w) = \Big(R^{\mathrm{cusp}} + R^{\mathrm{disc}} + F^{\mathrm{con}}\Big)(w). \tag{2.24}$$

Подразумевается, что каждая спектральная компонента (2.24) определяется соответствующей компонентой правой части (2.22).

Подробный счет с оценками всех спектральных компонент будет проведен во второй части этой работы.

§3. Проблема круга

Спектральная схема для точек под гиперболой переносится на проблему круга, но автоморфная теория при этом усложняется. В этом случае нужна трансформация работы [2] на случай конгруэнц-групп с мультипликатором.

Действительно, если вместо $\zeta^2(s)$ взять дзета-функцию мнимого квадратичного поля $k = Q(\sqrt{-q})$, где $q > 1$ – ведущий модуль квадратичного нечетного характера $\chi = \chi_q$, тогда

$$\zeta_k(s) = \sum_{\mathcal{Q}} \frac{1}{(N\mathcal{Q})^s} = \sum_{n=1}^\infty \frac{r(n)}{n^s}, \tag{3.1}$$

где $\mathcal{Q}$ – целый идеал поля k, $N\mathcal{Q}$ – его норма,

$$r(n) = \sum_{d|n} \chi(d).$$

Дзета-функцию (3.1) так же можно разбить по прогрессиям, как и $\zeta^2(s)$ в равенстве (1.1), но в этом случае модуль прогрессии должен быть кратен q, т.е. равен $q \cdot c$, где $c \geqslant 1$ – любое фиксированное целое

$$\begin{aligned}\zeta_k(s) &= \sum_{\mathcal{M}=1}^{q\cdot c} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{r(qc \cdot m + \mathcal{M})}{r(qc \cdot m + \mathcal{M})^s} = \\ &= \frac{1}{(qc)^{2s}} \sum_{\mathcal{M}=1}^{qc} \sum_{\substack{a,d=1 \\ ad\equiv\mathcal{M} (\operatorname{mod} qc)}}^{qc} \chi(d)\zeta\left(s, \frac{a}{qc}\right)\zeta\left(s, \frac{d}{qc}\right).\end{aligned} \tag{3.2}$$

Это – аналог равенства (1.1), в котором появляется характер-мультипликатор конгруэнц-группы $\Gamma_0(q)$. Отсюда видно, что обобщенная проблема круга для поля $k = Q(\sqrt{-q})$ сводится к аналогу сумм (1.14) с мультипликатором

$$S_{qc,\chi}(m, n; \mathcal{M}) = \sum_{a,d=1}^{qc} \chi(d)\delta_{qc}(a \cdot d - \mathcal{M}) \exp\left(2\pi i \frac{am + dn}{qc}\right). \tag{3.3}$$

Эти суммы возникают при разложении рядов Пуанкаре в ряды Фурье для пространства автоморфных функций с инвариантной группой $\Gamma_0(q)$ и мультипликатором $\chi = \chi_q$.

Подробности можно найти в работе [4]. Отсюда ясно, что перенос работы [2] на случай группы $\Gamma_0(q)$ с мультипликатором χ_q возможен. Мы предполагаем сделать это в третьей части этой работы. При этом аналитическая часть работы [2] остается той же самой. Изменения произойдут только в арифметике вершин фундаментальной области F_q группы $\Gamma_0(q)$, т.к. появится мультипликатор χ_q, которого не было в работе [2]. Это видно на примере работы [4], где приведены ряды Эйзенштейна для разных вершин фундаментальной области F_q.

Литература

1. E. C. Titchmarsh, *The theory of the Riemann zeta-function.* Oxford (1951). Русский перевод: И. Л., Москва (1953).

2. V. Bykovsky, N. Kuznetsov, A. Vinogradov, *Generalized summation formula for inhomogeneous convolution.* in: International Conference Automorphic Functions and Their Applications, Khabarovsk, 27 June–4 Jule 1988, pp. 18–64.
3. J.-M. Deshouillers, H. Iwaniec, *Kloosterman sums and Fourier coefficients of cusp forms.* — Invent. Math. **70**, No. 2 (1982), 219–288.
4. L. A. Takhtajan, A. I. Vinogradov, *The Gauss–Hasse hypothesis on real quadratic fields with class number one.* — J. reine angew. Mathematik **335** (1982), 40–86.

Vinogradov A. I. The points beneath a hyperbola and the circle problem. A spectral approach.

This is the first introductory part of the paper in which a spectral idea is presented for the solution of the circle problem and the problem on the points beneath a hyperbola. In the second and third parts technical details of such a solution will be given.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им.В. А. Стеклова РАН

Поступило 21 мая 2002 г.