А. И. Генералов, Е. А. Осиюк

КОГОМОЛОГИИ АЛГЕБР ДИЭДРАЛЬНОГО ТИПА, III: СЕРИЯ $D(2\mathcal{A})$

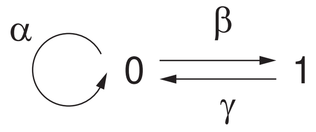
Введение

В работах [1, 2, 3] для некоторых семейств алгебр диэдрального типа, – а именно, для алгебр серий $D(3\mathcal{A})_1$, $D(3\mathcal{B})_1$ $D(3\mathcal{D})_1$ и $D(3\mathcal{K})$ (в обозначениях книги [4]), – были вычислены алгебры Йонеды. Интерес к этим сериям был отчасти связан с тем, что блоки групповых алгебр конечных групп, имеющие ровно три простых модуля, могут встречаться только среди алгебр этих четырех серий (см. [5]). В качестве приложения соответствующих вычислений было получено описание кольца когомологий для групп $\mathrm{PSL}\,(2,q)$, где q – степень нечетного простого числа, над алгебраически замкнутым полем характеристики два (см. также [6, 7]).

В настоящей работе мы даём описание алгебр Йонеды для алгебр из серии $D(2\mathcal{A})$. Не все из алгебр этой серии, – в отличие от алгебр, рассмотренных в [1, 2, 3], – являются специальными бирядными, и потому к ним не может быть непосредственно применена техника построения минимальных проективных резольвент, основанная на так называемом диаграммном методе Бенсона–Карлсона. В связи с этим мы, отталкиваясь от некоторых эмпирических наблюдений, сразу предъявляем соответствующие резольвенты для простых модулей над алгебрами из рассматриваемой здесь серии, а точность их доказываем с помощью спектральных последовательностей. Затем с помощью техники, развитой в [1, 2, 3, 8], мы даём описание алгебр Йонеды рассматриваемых алгебр в терминах колчанов с соотношениями. Поскольку мы вычисляем также Ext-алгебры простых модулей, то эти результаты могут быть непосредственно применены для описания кольца когомологий тех конечных групп, у которых главный блок (над алгебраически замкнутым полем характеристики два) Морита-эквивалентен алгебрам из серии $D(2\mathcal{A})$ (см., например, таблицы в книге [4]).

1. Формулировка основных результатов

Пусть K – произвольное поле. Алгебры $R^{(A)} = R^{(A)}_{n,c}$, $n \in \mathbb{N}$, $c \in \{0,1\}$, составляющие серию $\mathcal{D}(2\mathcal{A})$, определяются следующим колчаном с соотношениями (композиция путей записывается справа налево) $Q^{(A)}$:

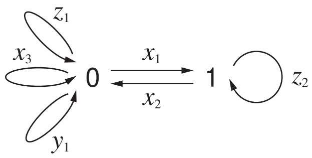


$$\beta\gamma = 0, \quad \alpha^2 = c(\gamma\beta\alpha)^n, \quad (\gamma\beta\alpha)^n = (\alpha\gamma\beta)^n. \tag{1}$$

Как доказано в [4], $R^{(A)}$ – симметричная базисная K-алгебра, имеющая ручной тип представления.

Для конечномерного модуля M над произвольной конечномерной K-алгеброй Λ прямая сумма $\mathcal{E}(M) = \bigoplus_{m\geq 0} \operatorname{Ext}^m_\Lambda(M,M)$ превращается с помощью обычного произведения Йонеды в (ассоциативную) K-алгебру, которую называют Ext-алгеброй модуля M. Если Λ – базисная K-алгебра с радикалом Джекобсона $J(\Lambda)$, то Ext-алгебра $\mathcal{E}(\Lambda/J(\Lambda))$ называется алгеброй Йонеды алгебры Λ; ее будем обозначать через $\mathcal{Y}(\Lambda)$.

Для описания алгебры Йонеды $\mathcal{Y}(R^{(A)})$ алгебры $R^{(A)}$ рассмотрим колчан $\mathfrak{R}^{(\mathcal{A})}$:



На алгебре путей $K[\mathfrak{R}^{(\mathcal{A})}]$ этого колчана введем градуировку такую, что имеем

$$\deg(x_i) = 1\ (i = 1,2,3), \deg(y_1) = 2, \deg(z_j) = 3\ (j = 1,2).$$

Рассмотрим на колчане $\mathfrak{R}^{(A)}$ следующие соотношения:

$$\begin{cases} x_2x_1 = x_3x_2 = x_1x_3 = x_1y_1 = y_1x_2 = 0, \\ \qquad x_1z_1 = -z_2x_1,\ x_2z_2 = -z_1x_2, \\ \qquad\qquad y_1x_3 + x_3y_1 = cx_3^3, \end{cases} \tag{2}$$

$$z_1x_3 = x_3z_1 = 0,\ \ y_1z_1 = -z_1y_1, \tag{3}$$

$$\begin{cases} y_1^2 = -x_3z_1,\ z_1x_3 - x_3z_1 = c(x_3^2y_1 - x_3y_1x_3), \\ \qquad y_1z_1 + z_1y_1 = -cx_3y_1^2. \end{cases} \tag{4}$$

Определим алгебру $\mathcal{E} = \mathcal{E}_c$ с помощью колчана $\mathfrak{R}^{(\mathcal{A})}$ и соотношений (2) и (3), а также алгебру $\mathcal{E}' = \mathcal{E}'_c$ с помощью того же колчана $\mathfrak{R}^{(\mathcal{A})}$ и соотношений (2) и (4). Ясно, что алгебры $\mathcal{E}_c$ и $\mathcal{E}'_c$ наследуют с алгебры $K[\mathfrak{R}^{(\mathcal{A})}]$ естественную градуировку.

Теорема 1.1. *Пусть $R = R_{n,c}^{(A)}$, $n \in \mathbb{N}, c \in \{0,1\}$. Алгебра Йонеды $\mathcal{Y}(R)$ как градуированная алгебра изоморфна алгебре $\mathcal{E}_c$ при $n > 1$ и алгебре $\mathcal{E}'_c$ при $n = 1$.*

Замечание. Если $\operatorname{char} K \neq 2$, то ввиду [4] алгебры из рассматриваемой нами серии могут быть описаны соотношениями (1), в которых достаточно рассматривать $c = 0$. Таким образом, при рассмотрении алгебр, для которых $c = 1$, мы могли бы считать, что $\operatorname{char} K = 2$. Однако мы нигде не используем последнее условие, поскольку это не приводит к упрощению изложения.

Доказательство теоремы 1.1 проводится в остальной части работы.

2. Резольвенты

Пусть $R = R_{n,c}^{(A)}$, $n \in \mathbb{N}$, $c \in \{0,1\}$ – алгебры, определенные в §1. Введем сокращенные обозначения для следующих элементов алгебры $K[Q^{(A)}]$ (а также для их образов в алгебре R):

$$g = (\gamma\beta\alpha)^{n-1}, \quad a = (\alpha\gamma\beta)^{n-1}, \quad \tilde{\alpha} = \alpha - c(\gamma\beta\alpha)^{n-1}\gamma\beta$$

(для $n = 1$ в качестве g, a берутся подходящие идемпотенты e_i). Модули P_0 и P_1 имеют следующие K-базисы:

$$P_0 =_K \langle e_0, \beta, \gamma\beta, \alpha\gamma\beta, \dots, (\alpha\gamma\beta)^n = (\gamma\beta\alpha)^n, \beta\alpha(\gamma\beta\alpha)^{n-1}, \dots, \gamma\beta\alpha, \beta\alpha, \alpha\rangle,$$
$$P_1 =_K \langle e_1, \gamma, \alpha\gamma, \beta\alpha\gamma, \gamma\beta\alpha\gamma, \dots, (\beta\alpha\gamma)^n\rangle.$$

В частности, $\dim_K P_0 = 6n$, $\dim_K P_1 = 3n+1$; кроме того, ясно, что P_1 – цепной модуль. Построим следующий бикомплекс $B_{\bullet\bullet}$, расположенный в первой четверти плоскости (т.е. строки и столбцы занумерованы числами $0, 1, 2, \ldots$):

$$
\begin{tikzcd}
 & & \ldots \arrow[d, "\beta"'] & \ldots \arrow[d, "\gamma\beta"'] & \ldots \arrow[d, "\gamma\beta"'] & \\
 & & P_0 \arrow[d, "\gamma\beta"'] & P_0 \arrow[l, "a\alpha"'] \arrow[d, "\gamma\beta"'] & P_0 \arrow[l, "a\alpha"'] \arrow[d, "g\gamma\beta"'] & \ldots \arrow[l, "\alpha"'] \\
 & P_1 \arrow[d, "\beta"'] & P_0 \arrow[l, "-a\alpha\gamma"'] \arrow[d, "\gamma\beta"'] & P_0 \arrow[l, "-a\alpha"'] \arrow[d, "g\gamma\beta"'] & P_0 \arrow[l, "-\alpha"'] \arrow[d, "g\gamma\beta"'] & \ldots \arrow[l, "-\tilde{\alpha}"'] \\
 & P_0 \arrow[d, "\gamma\beta"'] & P_0 \arrow[l, "a\alpha"'] \arrow[d, "g\gamma\beta"'] & P_0 \arrow[l, "\alpha"'] \arrow[d, "g\gamma\beta"'] & P_0 \arrow[l, "\tilde{\alpha}"'] \arrow[d, "g\gamma\beta"'] & \ldots \arrow[l, "\alpha"'] \\
P_1 \arrow[d, "\beta"'] & P_0 \arrow[l, "-a\alpha\gamma"'] \arrow[d, "g\gamma\beta"'] & P_0 \arrow[l, "-\alpha"'] \arrow[d, "g\gamma\beta"'] & P_0 \arrow[l, "-\tilde{\alpha}"'] \arrow[d, "g\gamma\beta"'] & P_0 \arrow[l, "-\alpha"'] \arrow[d, "g\gamma\beta"'] & \ldots \arrow[l, "-\tilde{\alpha}"'] \\
P_0 & P_0 \arrow[l, "\alpha"'] & P_0 \arrow[l, "\tilde{\alpha}"'] & P_0 \arrow[l, "\alpha"'] & P_0 \arrow[l, "\tilde{\alpha}"'] & \ldots \arrow[l, "\alpha"']
\end{tikzcd}
\tag{5}
$$

Предложение 2.1. *Пусть $n > 1$. Тогда тотализация $\mathrm{Tot}(B_{\bullet\bullet})$ бикомплекса (5) представляет собой минимальную проективную резольвенту простого R-модуля S_0.*

Доказательство. Воспользуемся спектральной последовательностью бикомплекса:

$$E^2_{pq} = H^h_p H^v_q(B_{\bullet\bullet}) \Rightarrow H_{p+q}(\mathrm{Tot}(B_{\bullet\bullet})).$$

Докажем, что уже второй лист этой спектральной последовательности вырождается, а именно мы покажем, что ее первый лист состоит из точных строк (за исключением места $(p, q) = (0, 0)$). Если $i > 0$, то из диаграммы (5) получаем, что

$$E^1_{p,2i} = \begin{cases} 0, & \text{если } \ 0 \le p < i, \\ \mathrm{Ker}\,(\gamma\beta)/\mathrm{Im}\beta, & \text{если } \ p = i, \\ \mathrm{Ker}\,(\gamma\beta)/\mathrm{Im}(\gamma\beta), & \text{если } \ i < p < 2i, \\ \mathrm{Ker}\,(g\gamma\beta)/\mathrm{Im}(\gamma\beta), & \text{если } \ p = 2i, \\ \mathrm{Ker}\,(g\gamma\beta)/\mathrm{Im}(g\gamma\beta), & \text{в остальных случаях;} \end{cases}$$

$$E^1_{p,2i+1} = \begin{cases} 0, & \text{если } 0 \le p < i, \\ \operatorname{Ker}\beta, & \text{если } p = i, \\ \operatorname{Ker}(\gamma\beta)/\operatorname{Im}(\gamma\beta), & \text{если } i < p < 2i+1, \\ \operatorname{Ker}(g\gamma\beta)/\operatorname{Im}(\gamma\beta), & \text{если } p = 2i+1, \\ \operatorname{Ker}(g\gamma\beta)/\operatorname{Im}(g\gamma\beta), & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Прямые вычисления показывают, что

$$\begin{aligned} \operatorname{Ker}(g\gamma\beta)/\operatorname{Im}(g\gamma\beta) &= \langle \overline{\beta}, \overline{\gamma\beta}, \overline{\alpha\gamma\beta}, \overline{\beta(\alpha\gamma\beta)}, \dots, \overline{\beta\cdot a}, \overline{\beta\alpha\cdot g}, \dots, \overline{\gamma\beta\alpha}, \overline{\beta\alpha} \rangle, \\ \operatorname{Ker}(g\gamma\beta)/\operatorname{Im}(\gamma\beta) &= \langle \overline{\beta}, \overline{\beta\alpha\cdot g}, \overline{\alpha\cdot g}, \dots, \overline{\alpha(\gamma\beta\alpha)}, \overline{\gamma\beta\alpha}, \overline{\beta\alpha} \rangle, \\ \operatorname{Coker}\beta &= \langle \overline{e_0}, \overline{\beta}, \overline{\gamma\beta}, \dots, \overline{g\gamma\beta}, \overline{\beta\alpha g}, \dots, \overline{\beta\alpha}, \overline{\alpha} \rangle, \\ \operatorname{Coker}(g\gamma\beta) &= \langle \overline{e_0}, \overline{\beta}, \overline{\gamma\beta}, \dots, \overline{\beta a}, \overline{\beta\alpha g}, \dots, \overline{\beta\alpha}, \overline{\alpha} \rangle, \\ \operatorname{Ker}(\gamma\beta)/\operatorname{Im}(\gamma\beta) &= \langle \overline{\beta}, \overline{\beta\alpha\cdot g} \rangle, \\ \operatorname{Ker}(\gamma\beta)/\operatorname{Im}\beta &= \langle \overline{\beta\alpha\cdot g} \rangle, \\ \operatorname{Ker}\beta &= \langle \overline{(\beta\alpha\gamma)^n} \rangle \end{aligned}$$

(мы чертой отмечаем канонические образы элементов в соответствующих фактор-модулях). Теперь легко видеть, что вычисленные выше члены $E^1_{p,2i}$, $E^1_{p,2i+1}$ $(i > 0)$ вместе с дифференциалами первого листа рассматриваемой спектральной последовательности (они индуцируются горизонтальными дифференциалами бикомплекса $B_{\bullet\bullet}$) составляют точные последовательности. Далее, поскольку

$$E^1_{p,1} = \begin{cases} \operatorname{Ker}\beta, & \text{если } p = 0, \\ \operatorname{Ker}(g\gamma\beta)/\operatorname{Im}(\gamma\beta), & \text{если } p = 1, \\ \operatorname{Ker}(g\gamma\beta)/\operatorname{Im}(g\gamma\beta), & \text{в остальных случаях,} \end{cases}$$

то ясно, что гомоморфизм $P_1 \xleftarrow{\overline{-a\alpha\gamma}} P_0$ из первой строки бикомплекса $B_{\bullet\bullet}$ индуцирует изоморфизм $E^1_{0,1} \xleftarrow{\simeq} E^1_{1,1}$. Наконец, имеем:

$$E^1_{p,0} = \begin{cases} \operatorname{Coker}\beta, & \text{если } p = 0, \\ \operatorname{Coker}(g\gamma\beta), & \text{в остальных случаях,} \end{cases}$$

а $P_0 \xleftarrow{\alpha} P_0$ индуцирует мономорфизм $E^1_{0,0} \xleftarrow{\overline{\alpha}} E^1_{1,0}$ с ядром $\operatorname{Coker}\overline{\alpha} \simeq S_0$. Таким образом, доказано, что $Q_\bullet = \operatorname{Tot}(B_{\bullet\bullet})$ является проективной резольвентой модуля S_0. Минимальность этой резольвенты следует из того, что, как видно из ее построения, $\operatorname{Im}(d^Q_m : Q_{m+1} \to Q_m) \subset \operatorname{Rad} Q_m$ для любого $m \geqslant 0$. $\square$

Для случая $n = 1$ рассмотрим следующий бикомплекс $B'_{\bullet\bullet}$:

$$
\begin{tikzcd}
 & & \dots \arrow[d, "\beta"'] & \dots \arrow[d, "\gamma\beta"'] & \dots \arrow[d, "\gamma\beta"'] & \\
 & & P_0 \arrow[d, "\gamma\beta"'] & P_0 \arrow[l, "\alpha"'] \arrow[d, "\gamma\beta"'] & P_0 \arrow[l, "\tilde{\alpha}"'] \arrow[d, "\gamma\beta"'] & \dots \arrow[l, "\alpha"'] \\
 & P_1 \arrow[d, "\beta"'] & P_0 \arrow[l, "-\alpha\gamma"'] \arrow[d, "\gamma\beta"'] & P_0 \arrow[l, "-\tilde{\alpha}"'] \arrow[d, "\gamma\beta"'] & P_0 \arrow[l, "-\alpha"'] \arrow[d, "\gamma\beta"'] & \dots \arrow[l, "-\tilde{\alpha}"'] \\
 & P_0 \arrow[d, "\gamma\beta"'] & P_0 \arrow[l, "\tilde{\alpha}"'] \arrow[d, "\gamma\beta"'] & P_0 \arrow[l, "\alpha"'] \arrow[d, "\gamma\beta"'] & P_0 \arrow[l, "\tilde{\alpha}"'] \arrow[d, "\gamma\beta"'] & \dots \arrow[l, "\alpha"'] \\
P_1 \arrow[d, "\beta"'] & P_0 \arrow[l, "-\alpha\gamma"'] \arrow[d, "\gamma\beta"'] & P_0 \arrow[l, "-\alpha"'] \arrow[d, "\gamma\beta"'] & P_0 \arrow[l, "-\tilde{\alpha}"'] \arrow[d, "\gamma\beta"'] & P_0 \arrow[l, "-\alpha"'] \arrow[d, "\gamma\beta"'] & \dots \arrow[l, "-\tilde{\alpha}"'] \\
P_0 & P_0 \arrow[l, "\alpha"'] & P_0 \arrow[l, "\tilde{\alpha}"'] & P_0 \arrow[l, "\alpha"'] & P_0 \arrow[l, "\tilde{\alpha}"'] & \dots \arrow[l, "\alpha"']
\end{tikzcd}
\tag{6}
$$

Отметим, что при $c = 0$ этот бикомплекс является частным случаем бикомплекса $B_{\bullet\bullet}$ из (5).

Предложение 2.2. *Пусть $n = 1$. Тогда тотализация $\operatorname{Tot}(B'_{\bullet\bullet})$ бикомплекса (6) представляет собой минимальную проективную резольвенту простого R-модуля S_0.*

Доказательство этого предложения аналогично доказательству предложения 2.1 и предоставляется читателю.

Предложение 2.3. *Пусть $R = R^{(A)}_{n,c}$, $n \in \mathbb{N}, c \in \{0, 1\}$. Минимальная проективная резольвента модуля S_1 имеет вид*

$$
\dots \longrightarrow P_1 \xrightarrow{\beta} P_0 \xrightarrow{\gamma} P_1 \xrightarrow{(\beta\alpha\gamma)^n} P_1 \xrightarrow{\beta} P_0 \xrightarrow{\gamma} P_1 \to S_1 \to 0.
$$

Доказательство состоит в прямой проверке точности указанной последовательности и предоставляется читателю.

Из предложений 2.1–2.3 вытекает следующее утверждение.

Следствие 2.4. *Пусть $R = R^{(A)}_{n,c}$, $n \in \mathbb{N}, c \in \{0, 1\}$. Тогда*:

а)

$$\dim_K \operatorname{Ext}_R^m(S_0, S_1) = \dim_K \operatorname{Ext}_R^m(S_1, S_0) = \begin{cases} 1, & \text{*если* } m \equiv 1 \pmod 3, \\ 0, & \text{*в остальных случаях*}; \end{cases}$$

б)

$$\dim_K \operatorname{Ext}_R^m(S_1, S_1) = \begin{cases} 0, & \text{*если* } m \equiv 1 \pmod 3, \\ 1, & \text{*в остальных случаях*}; \end{cases}$$

в) *для* $m \geq 2$

$$\dim_K \operatorname{Ext}_R^m(S_0, S_0) = \begin{cases} \dim_K \operatorname{Ext}_R^{m-2}(S_0, S_0) + 2, & \text{*если* } m \equiv 0 \pmod 3, \\ \dim_K \operatorname{Ext}_R^{m-2}(S_0, S_0) + 1, & \text{*в остальных случаях*}. \end{cases}$$

Замечание 2.5. Дифференциалы в минимальной проективной резольвенте модуля S_k мы в дальнейшем будем обозначать через $d_m^{(k)}$, $m \geqslant 0$. Если $B_{\bullet\bullet}$ — бикомплекс вида (5) (или аналогичный ему бикомплекс), то будем использовать упорядочение прямых слагаемых в разложении m-го члена минимальной проективной резольвенты $Q_m(S_k) = \bigoplus_{i+j=m} B_{ij}$ простого модуля S_k по возрастанию второго индекса (ср. [2]).

3. Образующие

В этом параграфе для рассматриваемой серии алгебр $\mathcal{D}(2\mathcal{A})$ мы укажем (конечные) множества образующих алгебр Йонеды

$$\mathcal{Y}(R) = \mathcal{E}(R/J(R)) = \bigoplus_{m \geq 0} \bigoplus_{i,j=0}^{1} \operatorname{Ext}_R^m(S_i, S_j).$$

Элементы групп расширений $\psi \in \operatorname{Ext}_R^m(S_i, S_j) \simeq \operatorname{Hom}_R(\Omega^m(S_i), S_j)$ мы будем задавать с помощью коммутативных диаграмм вида

$$\begin{array}{ccccc} Q_m(S_i) & \xrightarrow{\pi_m} & \Omega^m(S_i) & \subset & Q_{m-1}(S_i) \\ \big\downarrow{\scriptstyle f_1} & & \big\downarrow{\scriptstyle \widehat{\psi}} & & \big\downarrow{\scriptstyle f_0} \\ P_j = Q_0(S_j) & \xrightarrow[\rho_j]{} & S_j & \subset & P_j, \end{array} \tag{7}$$

где ρ_j – проективное накрытие. Такая диаграмма может быть кратко изображена в виде

$$\begin{tikzcd} Q_m(S_i) \arrow[r, "d^{(i)}_{m-1}"] \arrow[d, "f_1"] & Q_{m-1}(S_i) \arrow[d, "f_0"] \\ Q_0(S_j) \arrow[r, "\rho_j"'] & P_j\,, \end{tikzcd} \tag{8}$$

поскольку коммутативный квадрат (8) однозначно определяет отображение $\widehat{\psi}$ из (7). С помощью аналогичных коммутативных квадратов мы будем описывать также Ω-сдвиги отображения $\widehat{\psi}$. С другой стороны, диаграмма (7) однозначно (с точностью до изоморфизма) восстанавливается, если задан лишь гомоморфизм f_1 (такой, что гомоморфизм $\rho_j \cdot f_1$ аннулирует $\operatorname{Ker} d^{(i)}_{m-1}$), и потому эту диаграмму можно кратко описать следующим образом:

$$\widehat{\psi} = sq(Q_m(S_i) \xrightarrow{f_1} Q_0(S_j)).$$

Пусть $R = R^{(A)}$. Введем в рассмотрение однородные элементы:
степени 1: $x_1 \in \operatorname{Ext}^1_R(S_0, S_1)$, $x_2 \in \operatorname{Ext}^1_R(S_1, S_0)$, $x_3 \in \operatorname{Ext}^1_R(S_0, S_0)$;
степени 2: $y_1 \in \operatorname{Ext}^2_R(S_0, S_0)$;
степени 3: $z_1 \in \operatorname{Ext}^3_R(S_0, S_0)$, $z_2 \in \operatorname{Ext}^3_R(S_1, S_1)$.
Соответствующие им отображения кратко описываются следующими квадратами:

$$\begin{aligned} &\widehat{x}_1 = sq(Q_1(S_0) \xrightarrow{(0,1)} P_1), && \widehat{x}_2 = sq(Q_1(S_1) \xrightarrow{1} P_0) \\ &\widehat{x}_3 = sq(Q_1(S_0) \xrightarrow{(1,0)} P_0), && \widehat{y}_1 = sq(Q_2(S_0) \xrightarrow{(0,1)} P_0) \\ &\widehat{z}_1 = sq(Q_3(S_0) \xrightarrow{(0,0,1)} P_0), && \widehat{z}_2 = sq(Q_3(S_1) \xrightarrow{1} P_1). \end{aligned}$$

В следующем предложении мы укажем базисные элементы (над K) для некоторых групп $\operatorname{Ext}^m_R(S_i, S_j)$ для $m \le 6$.

Предложение 3.1. *Как K-линейные пространства приведенные ниже* Ext*-группы имеют следующие базисы*:

$$\begin{aligned} &\operatorname{Ext}^2_R(S_0,S_0) = \langle x_3^2,\ y_1\rangle, && \operatorname{Ext}^2_R(S_1,S_1) = \langle x_1x_2\rangle, \\ &\operatorname{Ext}^3_R(S_0,S_0) = \langle x_3^3,\ x_3y_1,\ z_1\rangle, && \operatorname{Ext}^3_R(S_1,S_1) = \langle z_2\rangle, \\ &\operatorname{Ext}^4_R(S_0,S_0) = \langle x_3^4,\ y_1x_3^2,\ y_1^2\rangle, && \operatorname{Ext}^4_R(S_0,S_1) = \langle x_1z_1\rangle, \\ &\operatorname{Ext}^4_R(S_1,S_0) = \langle x_2z_2\rangle, && \operatorname{Ext}^5_R(S_1,S_1) = \langle x_1x_2z_2\rangle, \end{aligned}$$

$$\mathrm{Ext}^5_R(S_0,S_0)=\langle x_3^5,\ y_1x_3^3,\ x_3y_1^2,\ y_1z_1\rangle,$$
$$\mathrm{Ext}^6_R(S_0,S_0)=\langle x_3^6,\ x_3^4y_1,\ x_3^2y_1^2,\ x_3z_1y_1,\ z_1^2\rangle.$$

Доказательство. В тех случаях, когда $\dim_K \mathrm{Ext}^m_R(S_i,S_j)=1$, достаточно убедиться, что указанные элементы отличны от нуля, что проверяется непосредственно. Если же $\dim_K \mathrm{Ext}^m_R(S_i,S_j)>1$, то следует проводить более подробные вычисления, что мы проиллюстрируем на примере группы $\mathrm{Ext}^2_R(S_0,S_0)$. Элемент $x_3^2\in \mathrm{Ext}^2_R(S_0,S_0)$ представляется гомоморфизмом $\widehat{x_3x_3}=x_3\circ\Omega^1(\widehat{x}_3):\Omega^2(S_0)\longrightarrow S_0$, а эта композиция описывается с помощью объемлющего квадрата следующей диаграммы:

$$\begin{array}{ccc}
Q_2(S_0) & \longrightarrow & Q_1(S_0)\\
\Big\downarrow{\scriptstyle\begin{pmatrix}1 & 0\\ -cg\gamma & g\gamma\end{pmatrix}} & & \Big\downarrow{\scriptstyle(1,0)}\\
Q_1(S_0) & \longrightarrow & Q_0(S_0)\\
\Big\downarrow{\scriptstyle(1,0)} & & \Big\downarrow{\scriptstyle g\gamma\beta}\\
Q_0(S_0) & \longrightarrow & P_0.
\end{array}$$

Сравнивая отображения $\widehat{x_3x_3}$ и $\widehat{y}_1$, видим, что они линейно независимы, и остается учесть, что $\dim_K \mathrm{Ext}^2_R(S_0,S_0)=2$. Оставшиеся случаи предоставляется проверить читателю.

Предложение 3.2. *Пусть $R=R^{(A)}$. Любое отображение*

$$f:\Omega^m(S_0)\longrightarrow S_j\ \ (j=0,1)$$

представляется в виде линейной комбинации композиций отображений $\widehat{x}_1$, $\widehat{x}_2$, $\widehat{x}_3$, $\widehat{y}_1$, $\widehat{z}_1$, $\widehat{z}_2$, а также их Ω-сдвигов.

Доказательство. Для $m\le 5$ требуемое утверждение следует из предложения 3.1 (а также из определения указанных выше однородных элементов алгебры $\mathcal{Y}(R)$), и потому далее предположим, что $m>5$.

Случай 1: пусть $j=1$. В силу периодичности модуля S_1 умножение на z_2 задает изоморфизм $\mathrm{Ext}^{m-3}_R(S_0,S_1)\longrightarrow \mathrm{Ext}^m_R(S_0,S_1)$. Следовательно, $f=\widehat{z}_2\cdot\Omega^3(f')$ для некоторого отображения $f':\Omega^{m-3}(S_0)\longrightarrow S_1$, и можно применить индукцию по m.

Случай 2: $j=0$. Определим $p=f\pi_m$, где $\pi_m:Q_m(S_0)\longrightarrow\Omega^m(S_0)$ – проективное накрытие. Пусть $B_{i,m-i}\simeq P_0$ – прямое слагаемое в каноническом разложении модуля $Q_m(S_0)$ (см. замечание 2.5) такое, что $p(B_{i,m-i}) = S_0$, и можно считать дополнительно, что $\operatorname{Ker} p \supset \bigoplus_{l\neq i} B_{l,m-l}$. Мы должны рассмотреть различные варианты расположения такого модуля P_0 в бикомплексе $B_{\bullet\bullet}$.

(a) Пусть $n > 1$ и предположим, что имеет место следующая конфигурация:

$$\begin{array}{ccc} & P_1 & \\ & \big\downarrow{\scriptstyle\beta} & \\ B_{i,m-i} = & P_0 & \xleftarrow{a\alpha} P_0, \end{array}$$

иными словами, в матрице, представляющей дифференциал $d_m^{(0)}$: $Q_{m+1}(S_0) \longrightarrow Q_m(S_0)$, имеется строка вида $(\dots, 0, a\alpha, \beta)$ (и эта строка нижняя). Отметим, что в этом случае $m \equiv 0 \pmod 3$. Построим следующую коммутативную диаграмму с точными строками:

$$\begin{array}{ccccccc} Q_{m+1}(S_0) & \xrightarrow{d_m^{(0)}} & Q_m(S_0) & \xrightarrow{\pi_m} & \Omega^m(S_0) & \longrightarrow & 0 \\ \big\downarrow{\scriptstyle\varphi_1} & & \big\downarrow{\scriptstyle\varphi_0} & & \big\downarrow{\scriptstyle\varphi} & & \\ Q_4(S_0) & \xrightarrow{d_3^{(0)}} & Q_3(S_0) & \xrightarrow{\pi_3} & \Omega^3(S_0) & \longrightarrow & 0, \end{array} \tag{9}$$

где

$$d_3^{(0)} = \begin{pmatrix} \tilde\alpha & g\gamma\beta & 0 & 0 \\ 0 & -\tilde\alpha & g\gamma\beta & 0 \\ 0 & 0 & a\alpha & \beta \end{pmatrix} : Q_4(S_0) = P_0^3 \oplus P_1 \longrightarrow Q_3(S_0) = P_0^3,$$

φ_1 – проекция на последние четыре прямых слагаемых модуля $Q_{m+1}(S_0)$ из его канонического разложения, а φ_0 – композиция аналогичной проекции модуля $Q_m(S_0)$ на соответствующие прямые слагаемые и гомоморфизма $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} : Q_3(S_0) \longrightarrow Q_3(S_0)$. Тогда $\varphi_0 d_m^{(0)} = d_3^{(0)}\varphi_1$, и, следовательно, найдется гомоморфизм φ, делающий коммутативной всю диаграмму (9). Кроме того, поскольку $\operatorname{Ker}\varphi_0 \subset \operatorname{Ker} p$, то существует гомоморфизм $p' : Q_3(S_0) \longrightarrow S_0$ такой, что $p'\varphi_0 = p$. При этом $\operatorname{Im} d_3^{(0)} \subset \operatorname{Rad} Q_3(S_0) \subset \operatorname{Ker} p'$, и потому найдется гомоморфизм $p'' : \Omega^3(S_0) \longrightarrow S_0$, для которого $p''\pi_3 = p'$, кроме того, p'' отличается от $\widehat{z}_1$ на некоторый множитель $k \in K^*$. Тогда $p''\varphi\pi_m = p = f\pi_m$, и, следовательно, $p''\varphi = f$.

Так как $\varphi = \Omega^3(\tilde{\varphi})$ для некоторого $\tilde{\varphi} : \Omega^{m-3}(S_0) \longrightarrow S_0$, то по индукции получаем требуемое утверждение.

(б) Рассмотрим теперь случай, когда модуль $B_{i,m-i} \simeq P_0$ включается в конфигурацию следующего вида :

$$\begin{array}{lllll}
B_{i,m+1-i} = P_0 & & & & \\
\quad\downarrow{\scriptstyle\gamma\beta} & & & & \\
B_{i,m-i} = P_0 & \xleftarrow{-\alpha} & P_0 = B_{i+1,m-i} & & \\
& & \quad\downarrow{\scriptstyle g\gamma\beta} & & \\
& & B_{i+1,m-i-1} = P_0 & \xleftarrow{\alpha} & P_0 = B_{i+2,m-i-1}.
\end{array} \tag{10}$$

Отметим, что тогда $m \equiv 2 \pmod 4$; кроме того, если $m = 2l, l \in \mathbb{N}$ и $n > 1$, то $i = m - i = l$. Построим следующую коммутативную диаграмму с точными строками:

$$\begin{array}{ccccccc}
Q_{m+1}(S_0) & \xrightarrow{d_m^{(0)}} & Q_m(S_0) & \xrightarrow{\pi_m} & \Omega^m(S_0) & \longrightarrow & 0 \\
\downarrow{\scriptstyle\psi_1} & & \downarrow{\scriptstyle\psi_0} & & \downarrow{\scriptstyle\psi} & & \\
Q_3(S_0) & \xrightarrow{d_2^{(0)}} & Q_2(S_0) & \xrightarrow{\pi_2} & \Omega^2(S_0) & \longrightarrow & 0.
\end{array} \tag{11}$$

Здесь

$$d_2^{(0)} = \begin{pmatrix} \alpha & g\gamma\beta & 0 \\ 0 & -\alpha & \gamma\beta \end{pmatrix} : Q_3(S_0) = P_0^3 \longrightarrow Q_2(S_0) = P_0^2,$$

ψ_0 – проекция на прямые слагаемые $B_{i+1,m-i-1} \oplus B_{i,m-i} \simeq P_0 \oplus P_0$, а ψ_1 – проекция на прямые слагаемые $B_{i+2,m-i-1} \oplus B_{i+1,m-i} \oplus B_{i,m-i+1} \simeq P_0 \oplus P_0 \oplus P_0$, входящие в конфигурацию (10). Теперь аналогично случаю 2 (а) строится гомоморфизм $p'' : \Omega^2(S_0) \longrightarrow S_0$ такой, что $p = p''\psi$, при этом $p'' = k \cdot \widehat{y}_1$, где $k \in K^*$. Кроме того, $\psi = \Omega^2(\tilde{\psi})$ для некоторого $\tilde{\psi} : \Omega^{m-2}(S_0) \longrightarrow S_0$, и вновь завершаем доказательство индукцией по m.

(в) Рассмотрим теперь конфигурацию

$$\begin{array}{lll}
& P_0 & \\
& \downarrow{\scriptstyle\gamma\beta} & \\
B_{i,m-i} = & P_0 & \xleftarrow{\alpha} P_0.
\end{array} \tag{12}$$

Заметим, что в этом случае $m \equiv 0 \pmod 4$. Построим диаграмму, аналогичную диаграмме (11), в которой в качестве ψ_0 берем композицию проекции на прямые слагаемые $B_{i+1,m-i-1} \oplus B_{i,m-i} \simeq P_0 \oplus P_0$ и гомоморфизма $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} : P_0^2 \longrightarrow Q_2(S_0)$, а в качестве ψ_1 – композицию проекции на прямые слагаемые $B_{i+2,m-i-1} \oplus B_{i+1,m-i} \oplus B_{i,m-i+1} \simeq P_0 \oplus P_0 \oplus P_0$ и гомоморфизма $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} : P_0^3 \longrightarrow Q_3(S_0)$. Далее доказательство завершается аналогично случаю 2 (а).

(г) Рассмотрим следующую конфигурацию

$$\begin{array}{ccc} & P_0 & \\ & \Big\downarrow{\scriptstyle g\gamma\beta} & \\ B_{i,m-i} = & P_0 \xleftarrow{\ \alpha\ } & P_0. \end{array} \tag{13}$$

i) Предположим дополнительно, что гомоморфизмы из конфигурации (13) включаются в следующую подматрицу матрицы дифференциала $d_m^{(0)}$:

$$\begin{pmatrix} \dots & \alpha & g\gamma\beta & 0 & \dots \\ \dots & 0 & -\alpha & g\gamma\beta & \dots \end{pmatrix}.$$

В этом случае мы строим диаграмму вида (11): ψ_0 – это проекция на $B_{i,m-i} \oplus B_{i-1,m-i+1}$, а ψ_1 – композиция проекции на прямые слагаемые $B_{i+1,m-i} \oplus B_{i,m-i+1} \oplus B_{i-1,m-i+2} \simeq P_0^3$ и отображения $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & g \end{pmatrix} : P_0^3 \longrightarrow Q_3(S_0)$.

ii) Предположим, что гомоморфизмы из конфигурации (13) включаются в следующую подматрицу матрицы дифференциала $d_m^{(0)}$:

$$\begin{pmatrix} \dots & \alpha & g\gamma\beta & 0 & \dots \\ \dots & 0 & -\alpha & \gamma\beta & \dots \end{pmatrix}.$$

(Если $n > 1$, то в этом случае $m \equiv 2 \pmod 4$). Тогда строим диаграмму вида (11), в которой ψ_0 – это проекция на $B_{i,m-i} \oplus B_{i-1,m-i+1}$, а ψ_1 – проекция на прямые слагаемые $B_{i+1,m-i} \oplus B_{i,m-i+1} \oplus B_{i-1,m-i+2}$, и завершаем доказательство аналогично случаю 2 (а).

(д) Рассмотрим следующую конфигурацию

$$\begin{array}{ccc} & & P_0 \\ & & \Big\downarrow{\scriptstyle g\gamma\beta} \\ B_{i,m-i} = & P_0 & \xleftarrow{\ -\alpha\ } \ P_0. \end{array} \tag{14}$$

i) Предположим, что гомоморфизмы из конфигурации (14) включаются в следующую подматрицу матрицы дифференциала $d_m^{(0)}$:

$$\begin{pmatrix} \dots & -\alpha & g\gamma\beta & 0 & \dots \\ \dots & 0 & \alpha & g\gamma\beta & \dots \end{pmatrix}.$$

Вновь строим диаграмму вида (11): ψ_0 – композиция проекции на $B_{i,m-i} \oplus B_{i-1,m-i+1} \simeq P_0^2$ и гомоморфизма $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$: $P_0^2 \longrightarrow Q_2(S_0)$, а ψ_1 – композиция проекции на прямые слагаемые $B_{i+1,m-i} \oplus B_{i,m-i+1} \oplus B_{i-1,m-i+2} \simeq P_0^3$ и отображения $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & g \end{pmatrix} : P_0^3 \longrightarrow Q_3(S_0)$.

ii) Предположим, что гомоморфизмы из конфигурации (14) включаются в следующую подматрицу матрицы дифференциала $d_m^{(0)}$:

$$\begin{pmatrix} \dots & -\alpha & g\gamma\beta & 0 & \dots \\ \dots & 0 & \alpha & \gamma\beta & \dots \end{pmatrix}.$$

(Если $n > 1$, то $m \equiv 0 \pmod 4$). Вновь строим диаграмму вида (11): ψ_0 – композиция проекции на $B_{i,m-i} \oplus B_{i-1,m-i+1} \simeq P_0^2$ и гомоморфизма $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} : P_0^2 \longrightarrow Q_2(S_0)$, а ψ_1 – композиция проекции на прямые слагаемые $B_{i+1,m-i} \oplus B_{i,m-i+1} \oplus B_{i-1,m-i+2} \simeq P_0^3$ и отображения $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} : P_0^3 \longrightarrow Q_3(S_0)$.

(е) Рассмотрим следующую конфигурацию

$$\begin{array}{ccc} & & P_0 \\ & & \Big\downarrow{\scriptstyle g\gamma\beta} \\ B_{i,m-i} = & P_0 & \xleftarrow{\ \pm\tilde{\alpha}\ } \ P_0. \end{array} \tag{15}$$

i) Предположим, что гомоморфизмы из конфигурации (15) включаются в следующую подматрицу, состоящую из $(m-i)$-ой и $(m-i+1)$-ой строк матрицы дифференциала $d_m^{(0)}$:

$$\begin{pmatrix} \dots & \tilde{\alpha} & g\gamma\beta & 0 & \dots \\ \dots & 0 & -\tilde{\alpha} & g\gamma\beta & \dots \end{pmatrix}$$

(мы здесь и далее нумеруем строки матрицы дифференциала номерами соответствующих строк бикомплекса $B_{\bullet\bullet}$). В этом случае строим диаграмму, аналогичную (11), в которой нижняя строка имеет вид

$$Q_2(S_0) \xrightarrow{d_1^{(0)}} Q_1(S_0) \xrightarrow{\pi_1} \Omega^1(S_0) \longrightarrow 0:$$

в качестве ψ_0 берем композицию проекции на $B_{i,m-i} \oplus B_{i-1,m-i+1} \simeq P_0^2$ и отображения $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & g\gamma \end{pmatrix} : P_0^2 \longrightarrow Q_1(S_0)$, а в качестве ψ_1 – проекцию на $B_{i+1,m-i} \oplus B_{i,m-i+1}$. Теперь аналогично случаю 2 (a) строится гомоморфизм $p'' : \Omega^1(S_0) \longrightarrow S_0$ такой, что $p = p''\psi$, при этом $p'' = k \cdot \widehat{x}_3$, где $k \in K^*$. Кроме того, $\psi = \Omega^1(\tilde{\psi})$ для некоторого $\tilde{\psi} : \Omega^{m-2}(S_0) \longrightarrow S_0$, и вновь по индукции завершаем доказательство индукцией по m.

ii) Предположим, что гомоморфизмы из конфигурации (15) включаются в следующую подматрицу матрицы дифференциала $d_m^{(0)}$:

$$\begin{pmatrix} \dots & -\tilde{\alpha} & g\gamma\beta & 0 & \dots \\ \dots & 0 & \tilde{\alpha} & g\gamma\beta & \dots \end{pmatrix}$$

(вновь это ее $(m-i)$-ая и $(m-i+1)$-ая строки). В этом случае строим диаграмму, аналогичную диаграмме, рассмотренной в случае i): ψ_0 – это композиция проекции на $B_{i,m-i} \oplus B_{i-1,m-i+1} \simeq P_0^2$ и отображения $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & g\gamma \end{pmatrix} : P_0^2 \longrightarrow Q_2(S_0)$, а ψ_1 – композиция проекции на прямые слагаемые $B_{i+1,m-i} \oplus B_{i,m-i+1}$ и отображения $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} : Q_1(S_0) \longrightarrow Q_1(S_0)$.

iii) Предположим, что гомоморфизмы из конфигурации (15) включаются в следующую подматрицу матрицы дифференциала $d_m^{(0)}$:

$$\begin{pmatrix} \dots & \tilde{\alpha} & g\gamma\beta & 0 & \dots \\ \dots & 0 & -a\alpha & \gamma\beta & \dots \end{pmatrix}.$$

Ясно, что сейчас $n > 1$. В этом случае ψ_0 – это композиция проекции на $B_{i,m-i} \oplus B_{i-1,m-i+1} \simeq P_0^2$ и отображения $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \gamma \end{pmatrix}$: $P_0^2 \longrightarrow Q_1(S_0)$, а ψ_1 – проекция на прямые слагаемые $B_{i+1,m-i} \oplus B_{i,m-i+1}$.

iv) Предположим, что гомоморфизмы из конфигурации (15) включаются в следующую подматрицу матрицы дифференциала $d_m^{(0)}$:

$$\begin{pmatrix} \dots & -\tilde{\alpha} & g\gamma\beta & 0 & \dots \\ \dots & 0 & a\alpha & \gamma\beta & \dots \end{pmatrix}$$

(вновь $n > 1$). В этом случае ψ_0 – это композиция проекции на $B_{i,m-i} \oplus B_{i-1,m-i+1} \simeq P_0^2$ и отображения $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & \gamma \end{pmatrix} : P_0^2 \longrightarrow Q_1(S_0)$, а ψ_1 – композиция проекции на прямые слагаемые $B_{i+1,m-i} \oplus B_{i,m-i+1}$ и отображения $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} : Q_1(S_0) \longrightarrow Q_1(S_0)$.

(ж) Рассмотрим следующую конфигурацию

$$\begin{array}{ccc} & P_0 & \\ & {\scriptstyle\gamma\beta}\big\downarrow & \\ B_{i,m-i} = & P_0 & \xleftarrow{\pm a\alpha} \; P_0, \end{array} \tag{16}$$

иными словами, в матрице, представляющей дифференциал $d_m^{(0)}$: $Q_{m+1}(S_0) \longrightarrow Q_m(S_0)$, имеется строка вида $(\dots, 0, \pm a\alpha, \gamma\beta, \dots)$; при этом считаем, что $n > 1$.

i) Предположим, что гомоморфизмы из конфигурации (16) включаются в подматрицу, состоящую из $(m-i-1)$-ой и $(m-i)$-ой строк матрицы дифференциала $d_m^{(0)}$ и имеющую вид

$$\begin{pmatrix} \dots & \mp a\alpha & \gamma\beta & 0 & \dots \\ \dots & 0 & \pm a\alpha & \gamma\beta & \dots \end{pmatrix} \text{ или } \begin{pmatrix} \dots & \mp \alpha & \gamma\beta & 0 & \dots \\ \dots & 0 & \pm a\alpha & \gamma\beta & \dots \end{pmatrix}.$$

В этом случае мы строим диаграмму, аналогичную (9), в которой φ_0 – это композиция проекции на $B_{i+1,m-i-1} \oplus B_{i,m-i} \simeq P_0^2$ и отображения $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \pm a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} : P_0^2 \longrightarrow Q_3(S_0)$, а φ_1 – композиция проекции на прямые слагаемые $B_{i+1,m-i} \oplus B_{i,m+1-i} \simeq P_0^2$ и гомоморфизизма $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \pm 1 & 0 \\ 0 & \gamma \end{pmatrix} : P_0^2 \longrightarrow Q_4(S_0) \simeq P_0^3 \oplus P_1$. Далее доказательство завершается аналогично случаю 2 (а).

ii) Предположим, что строка вида $(\dots, 0, -a\alpha, \gamma\beta, \dots)$ включается в следующую подматрицу матрицы $d_m^{(0)}$:

$$\begin{pmatrix} \dots & -\tilde{\alpha} & g\gamma\beta & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \dots & 0 & \tilde{\alpha} & g\gamma\beta & 0 & 0 & \dots \\ \dots & 0 & 0 & -a\alpha & \gamma\beta & 0 & \dots \end{pmatrix}.$$

Вновь строим диаграмму вида (9): φ_0 – это композиция проекции на $B_{i+2,m-i-2} \oplus B_{i+1,m-i-1} \oplus B_{i,m-i} \simeq P_0^3$ и отображения $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} : P_0^3 \longrightarrow Q_3(S_0)$, а φ_1 – композиция проекции на прямые слагаемые $B_{i+3,m-i-2} \oplus B_{i+2,m-i-1} \oplus B_{i+1,m-i} \oplus B_{i,m-i+1} \simeq P_0^4$ и гомоморфизма $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} : P_0^4 \longrightarrow Q_4(S_0)$.

iii) Предположим, что строка вида $(\dots, 0, a\alpha, \gamma\beta, \dots)$ включается в следующую подматрицу матрицы $d_m^{(0)}$:

$$\begin{pmatrix} \dots & \tilde{\alpha} & g\gamma\beta & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \dots & 0 & -\tilde{\alpha} & g\gamma\beta & 0 & 0 & \dots \\ \dots & 0 & 0 & a\alpha & \gamma\beta & 0 & \dots \end{pmatrix}.$$

В этом случае φ_0 – это проекция на $B_{i+2,m-i-2} \oplus B_{i+1,m-i-1} \oplus B_{i,m-i}$, а φ_1 – композиция проекции на прямые слагаемые $B_{i+3,m-i-2} \oplus B_{i+2,m-i-1} \oplus B_{i+1,m-i} \oplus B_{i,m-i+1}$ и гомоморфизма $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} : P_0^4 \longrightarrow Q_4(S_0)$.

(з) Для случая $n = 1$ мы должны рассмотреть еще две конфигурации.

i) Если $m \equiv 3 \pmod 6$, то возможна следующая конфигурация

$$\begin{array}{ccc} & P_1 & \\ & \beta\big\downarrow & \\ B_{i,m-i} = & P_0 & \xleftarrow{\tilde{\alpha}} P_0. \end{array}$$

В этом случае строится диаграмма вида (9), в которой φ_1 (соответственно φ_0) – проекция на последние четыре (соответственно три) прямых слагаемых модуля $Q_{m+1}(S_0)$ (соответственно $Q_m(S_0)$) из его канонического разложения.

ii) Для $m \equiv 0 \pmod 6$, $m > 6$, возможна следующая конфигурация:

$$\begin{array}{ccc} & P_0 & \\ & \beta\big\downarrow & \\ B_{i,m-i} = & P_0 & \xleftarrow{\alpha} P_0. \end{array}$$

В этом случае строится диаграмма, аналогичная диаграмме (11), в которой нижняя строка имеет вид

$$Q_7(S_0) \xrightarrow{d_6^{(0)}} Q_6(S_0) \xrightarrow{\pi_6} \Omega^6(S_0) \longrightarrow 0:$$

в качестве ψ_1 (соответственно ψ_0) берем проекцию на последние шесть (соответственно пять) прямых слагаемых модуля $Q_{m+1}(S_0)$ (соответственно $Q_m(S_0)$) из его канонического разложения; при этом для завершения доказательства мы используем последнее соотношение в предложении 3.1. □

Следствие 3.3. *Пусть $R = R^{(A)}$. Множество*

$$\chi_{\mathcal{A}} = \{x_1, x_2, x_3, y_1, z_1, z_2\}$$

порождает алгебру Йонеды $\mathcal{Y}(R^{(A)})$ как K-алгебру.

4. Соотношения

Положим $R = R^{(A)}_{n,c}$, $n \in \mathbb{N}$, $c \in \{0, 1\}$.

Предложение 4.1. *Для множества образующих $\chi_{\mathcal{A}}$ алгебры $\mathcal{Y}(R)$ выполняются соотношения* (2), *а также* (3), *если $n > 1$, и* (4), *если $n = 1$.*

Доказательство. Доказательство проводится с помощью тех же технических приемов, что и в [2]. Потому мы ограничимся рассмотрением лишь одного из соотношений в (2)–(4), а именно

$x_1z_1 = -z_2x_1$ при $n > 1$. Проверка остальных соотношений в (2), а также соотношений (3) (соответственно (4)) предоставляется читателю. Поскольку $\widehat{x_1z_1} = \widehat{x}_1 \cdot \Omega^1(\widehat{z}_1)$, $\widehat{z_2x_1} = \widehat{z}_2 \cdot \Omega^3(\widehat{x}_1)$, то предварительно требуется вычислить указанные Ω-сдвиги отображений $\widehat{x}_1$ и $\widehat{z}_1$. Результаты этих вычислений содержатся в следующих коммутативных диаграммах:

$$\begin{tikzcd}
Q_4(S_0) \arrow[r, "d_3^{(0)}"] \arrow[d, "{(0,0,0,-1)}"] & Q_3(S_0) \arrow[r, "d_2^{(0)}"] \arrow[d, "{(0,0,a\alpha)}"] & Q_2(S_0) \arrow[r, "d_1^{(0)}"] \arrow[d, "{(0,-a\alpha)}"] & Q_1(S_0) \arrow[r, "d_0^{(0)}"] \arrow[d, "{(0,1)}"] & Q_0(S_0) \arrow[d, "a\alpha\gamma"] \\
Q_3(S_1) \arrow[r, "d_2^{(1)}"'] & Q_2(S_1) \arrow[r, "d_1^{(1)}"'] & Q_1(S_1) \arrow[r, "d_0^{(1)}"'] & Q_0(S_1) \arrow[r, "(\beta\alpha\gamma)^n"'] & P_1;
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
Q_4(S_0) \arrow[r, "d_3^{(0)}"] \arrow[d, "\begin{pmatrix} 0 & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}"] & Q_3(S_0) \arrow[r, "d_2^{(0)}"] \arrow[d, "{(0,0,1)}"] & Q_2(S_0) \arrow[d, "{(0,a\alpha)}"] \\
Q_1(S_0) \arrow[r, "{(\alpha,\beta)}"'] & Q_0(S_0) \arrow[r, "(\gamma\beta\alpha)^n"'] & P_0.
\end{tikzcd}$$

Далее, отображения $\widehat{x}_1 \cdot \Omega^1(\widehat{z}_1)$ и $\widehat{z}_2 \cdot \Omega^3(\widehat{x}_1)$ представляются объемлющими квадратами следующих коммутативных диаграмм:

$$\begin{tikzcd}
Q_4(S_0) \arrow[r, "d_3^{(0)}"] \arrow[d, "\begin{pmatrix} 0 & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}"'] & Q_3(S_0) \arrow[d, "{(0,0,1)}"] \\
Q_1(S_0) \arrow[r, "{(\alpha,\beta)}"] \arrow[d, "{(0,1)}"'] & Q_0(S_0) \arrow[d, "a\alpha\gamma"] \\
Q_0(S_1) \arrow[r, "(\beta\alpha\gamma)^n"'] & P_1,
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
Q_4(S_0) \arrow[r, "d_3^{(0)}"] \arrow[d, "{(0,0,0,-1)}"] & Q_3(S_0) \arrow[d, "{(0,0,-a\alpha\gamma)}"] \\
Q_3(S_1) \arrow[r, "(\beta\alpha\gamma)^n"] \arrow[d, "1"] & Q_2(S_1) \arrow[d, "1"] \\
Q_0(S_1) \arrow[r, "(\beta\alpha\gamma)^n"'] & P_1.
\end{tikzcd}$$

Теперь сравнение отображений в этих объемлющих квадратах доказывает соотношение $x_1z_1 = -z_2x_1$ (при $n > 1$). $\square$

Пусть $\mathcal{E} = K[\mathfrak{R}^{(\mathcal{A})}]/I$ (соответственно $\mathcal{E}' = K[\mathfrak{R}^{(\mathcal{A})}]/I'$) – градуированная K-алгебра, где I (соответственно I') – идеал алгебры путей колчана $\mathfrak{R}^{(\mathcal{A})}$, соответствующий соотношениям (2) и (3) (соответственно (2) и (4)). Если $n > 1$, то ввиду следствия 3.3 и предложения 4.1 существует сюръективный гомоморфизм градуированных K-алгебр $\mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{Y}(R)$, переводящий канонические образующие алгебры $\mathcal{E}$ (т.е. соответствующие стрелкам в $\mathfrak{R}^{(\mathcal{A})}$)

в соответствующие образующие алгебры $\mathcal{Y}(R)$, введенные в начале §3. Если $n = 1$, то имеется аналогичный сюръективный гомоморфизм $\mathcal{E}' \longrightarrow \mathcal{Y}(R)$. Далее мы будем рассматривать только случай $n > 1$. Для $n = 1$ надо провести аналогичные рассуждения, и мы предоставляем это сделать читателю.

Пусть $\mathcal{E} = \oplus_{m \geq 0} \mathcal{E}^m$ – прямое разложение алгебры $\mathcal{E}$ на однородные прямые слагаемые. Через ε_i, $i = 0, 1$, обозначим идемпотенты алгебры $K[\mathfrak{R}^{(\mathcal{A})}]$, соответствующие вершинам колчана $\mathfrak{R}^{(\mathcal{A})}$, и так же обозначим образы этих идемпотентов в $\mathcal{E}$. Теперь теорема 1.1 вытекает из следующего утверждения.

Предложение 4.2. *Для любых* $i, j \in \{0, 1\}$ *и* $m \geq 0$

$$\dim_K(\varepsilon_i \mathcal{E}^m \varepsilon_j) = \dim_K \operatorname{Ext}_R^m(S_j, S_i).$$

Доказательство. Поскольку для $m = 0, 1$ соотношение очевидно, то далее предполагаем, что $m > 1$.

(а) Рассмотрим сначала случай $i = j = 0$. Введем обозначение $d_m = \dim_K(\varepsilon_0 \mathcal{E}^m \varepsilon_0)$. Заметим, что K-алгебра $\varepsilon_0 \mathcal{E} \varepsilon_0$ порождается элементами x_3, y_1, z_1. Так как эти элементы удовлетворяют соотношениям

$$y_1 z_1 = -z_1 y_1, \quad z_1 x_3 = x_3 z_1 = 0, \quad y_1 x_3 + x_3 y_1 = c x_3^3,$$

то легко получаем, что одночлены вида $y_1^s z_1^t$ $(2s+3t = m)$, $x_3^t y_1^s$ $(t+2s = m)$ составляют K-базис пространства $\varepsilon_0 \mathcal{E}^m \varepsilon_0$. Докажем, что

$$d_m = \begin{cases} d_{m-2} + 2, & \text{если } m \equiv 0 \pmod 3, \\ d_{m-2} + 1, & \text{в остальных случаях.} \end{cases} \tag{17}$$

Действительно, одночленам вида $y_1^s z_1^t$, $x_3^t y_1^s$, у которых $s > 0$, однозначно соответствуют элементы аналогичного K-базиса пространства $\varepsilon_0 \mathcal{E}^{m-2} \varepsilon_0$ (например, достаточно опускать один сомножитель y_1). Кроме того, имеется одночлен вида z_1^t в точности, когда $m = 3t$, $t \in \mathbb{N}$, и одночлен x_3^m для любого m. Наконец, заметим, что виду следствия 2.4 в) последовательность $\{\dim_K \operatorname{Ext}_R^m(S_0, S_0)\}_{m \geq 1}$ удовлетворяет рекуррентному соотношению, аналогичному (17).

(б) Случай $i = j = 1$. Введем обозначение $d_m = \dim_K(\varepsilon_1 \mathcal{E}^m \varepsilon_1)$. K-алгебра $\varepsilon_1 \mathcal{E} \varepsilon_1$ порождается элементами $y = x_1 x_2$, z_2. Так как эти элементы удовлетворяют соотношениям

$$y^2 = 0, \quad y z_2 = z_2 y,$$

то одночлены вида yz_2^t, z_2^s, где $2+3t=m$ $(t\geq 0)$, $3s=m$ $(s>0)$, составляют K-базис пространства $\varepsilon_1\mathcal{E}^m\varepsilon_1$. Ясно, что

$$d_m=\begin{cases}0, & \text{если } m\equiv 1 \pmod 3,\\ 1, & \text{в остальных случаях.}\end{cases}$$

Ввиду следствия 2.4 б) получаем, что

$$\dim_K(\varepsilon_1\mathcal{E}^m\varepsilon_1)=\dim_K \mathrm{Ext}_R^m(S_1,S_1).$$

(в) Случай $i=1$, $j=0$. Пусть $d_m=\dim_K(\varepsilon_1\mathcal{E}^m\varepsilon_0)$. Используя соотношения (2) и (3), легко видеть, что одночлены вида $x_1z_1^t$ $(t>0)$, где $1+3t=m$, составляют K-базис пространства $\varepsilon_1\mathcal{E}^m\varepsilon_0$. Следовательно,

$$d_m=\begin{cases}1, & \text{если } m\equiv 1 \pmod 3,\\ 0, & \text{в остальных случаях}\end{cases}$$

и ввиду следствия 2.4 а) получаем, что

$$\dim_K(\varepsilon_1\mathcal{E}^m\varepsilon_0)=\dim_K \mathrm{Ext}_R^m(S_0,S_1).$$

(г) Случай $i=0$, $j=1$. Пусть $d_m=\dim_K(\varepsilon_0\mathcal{E}^m\varepsilon_1)$. Аналогично предыдущим случаям легко видеть, что одночлены вида $x_2z_2^t$ $(t>0)$, где $1+3t=m$, составляют K-базис пространства $\varepsilon_0\mathcal{E}^m\varepsilon_1$, и потому

$$d_m=\begin{cases}1, & \text{если } m\equiv 1 \pmod 3,\\ 0, & \text{в остальных случаях,}\end{cases}$$

откуда ввиду следствия 2.4 а) получаем, что $\dim_K(\varepsilon_0\mathcal{E}^m\varepsilon_1)=\dim_K \mathrm{Ext}_R^m(S_1,S_0)$. $\square$

Из доказательства теоремы 1.1 можно получить также описание Ext-алгебр простых $R^{(\mathcal{A})}$-модулей. Для этого рассмотрим следующие K-алгебры:

$$\mathcal{H}_c=K\langle x,y,z\rangle/(yz+zy,zx,xz,yx+xy-cx^3),$$

$$\mathcal{H}'_c=K\langle x,y,z\rangle/(yx+xy-cx^3,xz+y^2,zx+y^2-c(x^2y-xyx),yz+zy+cxy^2),$$

где $\deg x=1$, $\deg y=2$, $\deg z=3$.

Следствие 4.3. *Пусть* $R = R_{n,c}^{(\mathcal{A})}$. *Тогда*:

а) $$\mathcal{E}(S_0) \simeq \begin{cases} \mathcal{H}_c, & \textit{если} \;\; n > 1, \\ \mathcal{H}'_c, & \textit{если} \;\; n = 1; \end{cases}$$

б) $\mathcal{E}(S_1) \simeq K[y,z]/(y^2)$, *где* $\deg y = 2$, $\deg z = 3$.

Доказательство. Для $n > 1$ соответствующие утверждения вытекают из доказательства предложения 4.2. Для $n = 1$ доказательство проводится аналогично и предоставляется читателю. □

Литература

1. О. И. Балашов, А. И. Генералов, *Алгебры Йонеды для одного класса диэдральных алгебр.* — Вестник С.-Петерб. ун-та. Сер. 1, Вып. 3, №15 (1999), 3–10.
2. А. И. Генералов, *Когомологии алгебр диэдрального типа.* I. — Зап. научн. семин. ПОМИ **265** (1999), 139–162.
3. О. И. Балашов, А. И. Генералов, *Когомологии алгебр диэдрального типа.* II. — Алгебра и анализ **13**, вып. 1 (2001), 3–25.
4. K. Erdmann, *Blocks of tame representation type and related algebras.* — Lect. Notes Math. **1428** (1990).
5. K. Erdmann, *Algebras and dihedral defect groups.* — Proc. London Math. Soc. **54** No. 1 (1987), 88–114.
6. J. Martino, S. Priddy, *Classification of BG for groups with dihedral or quaternion Sylow 2-subgroups.* — J. Pure Appl. Algebra **73** (1991), 13–21.
7. T. Asai, H. Sasaki, *The* mod 2 *cohomology algebras of finite groups with dihedral Sylow 2-subgroups.* — Commun. Algebra **21** (1993), 2771–2790.
8. А. И. Генералов, *Когомологии алгебр полудиэдрального типа.* I. — Алгебра и анализ **13**, вып. 4 (2001), 54–85.

Generalov A. I., Osiuk E. A. Cohomology of algebras of dihedral type, III: the family $D(2\mathcal{A})$.

For algebras of dihedral type that form the family $D(2\mathcal{A})$ (from K. Erdmann's list), the Yoneda algebras are described in terms of quivers with relations.

С.-Петербургский государственный университет

Поступило 2 ноября 2002 г.