Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 289, 2002 г.

Н. А. Джусоева, В. А. Койбаев

МАКСИМАЛЬНЫЕ ПОДГРУППЫ, СОДЕРЖАЩИЕ ТОР, СВЯЗАННЫЕ С ПОЛЕМ ОТНОШЕНИЙ ДЕДЕКИНДОВОЙ ОБЛАСТИ

Вопросы описания некоторых классов подгрупп линейных групп являются важными вопросами теории групп. Данная работа посвящена направлению, связанному с изучением подгрупп полной линейной группы, содержащих неращепимый максимальный тор, для случая, когда основное поле является полем отношений дедекиндовой области. Основным результатом работы является построение максимальных подгрупп указанного вида.

Вопросам подобных исследований были посвящены работы З. И. Боревича, В.П.Платонова, Г. Зейтца, А. А. Бондаренко, Чан Нгок Хоя, С. Л. Крупецкого и др. (см. [2–5]).

Пусть R – дедекиндова область, k – поле отношений кольца R. На протяжении всей работы $d = p_1 \ldots p_m \in R$ – элемент кольца R, который является произведением различных неприводимых из R (элемент α мы называем неприводимым, если идеал (α) прост). Через $p \in R$ мы будем обозначать неприводимый делитель элемента d.

Как хорошо известно, согласно критерию Эйзенштейна многочлен $x^n - d$ неприводим над полем k (см., например, [1]). Поэтому мы имеем радикальное расширение $K = k(\sqrt[n]{d})$ степени n поля k.

Для данного расширения имеет место регулярное вложение

$$K^* \leftrightarrow \mathrm{Aut}_k(K)$$

мультипликативной группы K^* поля K в группу всех k-линейных автоморфизмов поля K, рассматриваемого как k-линейное пространство, где $f_\alpha(x) = \alpha x, x \in K$.

Образ K^* при указанном вложении мы называем нерасщепимым максимальным тором $T(K) = T(K/k)$. Если выбрать стандартный базис поля K над k, то, очевидно, $\mathrm{Aut}_k(K)$ изоморфно полной линейной группе $\mathrm{GL}(n, k)$, при этом тор $T(K)$ будет представлен подгруппой матриц $T(d)$ в группе $\mathrm{GL}(n,k)$:

$$T = T(d) = \{c(\bar{x}) : \bar{x} \in k^n \backslash \{0\}\},$$

где $c = c(\bar{x}) = (c_{ij})$ — матрица, элементы которой определяются формулой

$$c_{ij} = \begin{cases} x_{i+1-j}, & j \leqslant i; \\ dx_{n+i+1-j}, & j \geqslant i+1. \end{cases}$$

Мы рассматриваем подгруппы H полной линейной группы $G = \mathrm{GL}(n,k)$, содержащие нерасщепимый максимальный тор $T = T(d)$.

Для всякого неприводимого $p \in R$ через $R_{(p)}$ обозначим множество всех p–целых элементов поля k:

$$R_{(p)} = \left\{\frac{a}{b} \in k : (p,b) = 1\right\}.$$

Через σ_p мы обозначаем таблицу (сеть), в которой на диагонали и ниже стоит $R_{(p)}$, а выше главной диагонали — идеал $pR_{(p)}$:

$$(\sigma_{(p)})_{ij} = \begin{cases} R_{(p)}, & i \geqslant j, \\ pR_{(p)}, & i < j. \end{cases}$$

Далее, $G(\sigma_p)$ — сетевая группа (определенная над кольцом $R_{(p)}$).

Теорема. *Для всякого неприводимого делителя p элемента d группа $H_p = T(d)G(\sigma_p)$ является максимальной нетривиальной (не содержащей $\mathrm{SL}(n,k)$) подгруппой полной линейной группы $G = \mathrm{GL}(n,k)$, содержащей тор $T = T(d)$.*

Следствие. *Для всякого неприводимого $p \in R$ группа $H_p = T(p)G(\sigma_p)$ является максимальной нетривиальной подгруппой группы G, содержащей тор $T(p)$.*

Несложно видеть, что элементарная трансвекция $t_{ij}(\alpha)$ содержится в H_p тогда и только тогда, когда $\alpha \in (\sigma_p)_{ij}$, $i \neq j$. Поэтому для доказательства теоремы достаточно показать, что H_p – подгруппа группы $\mathrm{GL}(n,k)$ и она является максимальной.

С каждой матрицей $c = c(\bar{x}) \in T$ связана обратная матрица $c^{-1} = c(\bar{y}) = (c'_{ij}) \in T$, $\bar{y} = (y_1, \ldots, y_n) \in k^n$, где $y_i = \dfrac{C_{1i}}{|c(\bar{x})|}$, причем

C_{1i} — алгебраическое дополнение элемента c_{1i} матрицы $c^{-1} = c(\bar{y})$. Для элементов матрицы $c^{-1} = c(\bar{y})$ имеем формулу:

$$c'_{sr} = \begin{cases} y_{s+1-r}, & r \leqslant s, \\ dy_{n+s+1-r}, & r \geqslant s+1. \end{cases}$$

Введем в рассмотрение подкольцо $R_0 = R(d)$ поля k следующего вида

$$R_0 = R(d) = \operatorname*{ring}_{\bar{x} \in k^n \setminus \bar{0}} \langle x_i y_j, dx_r y_s : \ i+j \leqslant n+1, \ r+s > n+1 \rangle.$$

Предложение 1. *Если кольцо $R_{(p)}$ содержит подкольцо R_0, то тор $T = T(d)$ нормализует сетевую группу $G(\sigma_p)$, а потому $H_p = T \cdot G(\sigma_p)$ – промежуточная подгруппа, содержащая тор T.*

Доказательство. Пусть $g = e + a \in G(\sigma)$, где $a = (a_{ij})$ принадлежит сетевому подкольцу $M(\sigma_p)$. Пусть, далее, $c = (c_{ij}) = c(\bar{x})$, $c^{-1} = (c'_{ij}) = c(\bar{y})$. Покажем, что $b = (b_{ir}) = cac^{-1} \in M(\sigma_p)$. Достаточно показать, что если $a = a_{ks} e_{ks}$, где $a_{ks} \in \sigma_{ks}$, e_{ks} — матричная единица, то $b = cac^{-1} \in M(\sigma_p)$, то есть, что $b_{ir} \in \sigma_{ir}$ для всех i, r. Имеем $b_{ir} = c_{ik} a_{ks} c'_{sr}$. Покажем, что

$$b_{ir} = c_{ik} a_{ks} c'_{sr} \in \sigma_{ir}.$$

В силу формул и для c_{ik} и c'_{sr} достаточно рассмотреть четыре случая ($\alpha = i+1-k$, $\beta = s+1-r$):

1) $s \leqslant r-1$, $k \leqslant i$, $\quad c_{ik} a_{ks} c'_{sr} = x_\alpha d a_{ks} y_{n+\beta}$,
2) $s \leqslant r-1$, $k \geqslant i+1$, $\quad c_{ik} a_{ks} c'_{sr} = dx_{n+\alpha} d a_{ks} y_{n+\beta}$,
3) $s \geqslant r$, $k \leqslant i$, $\quad c_{ik} a_{ks} c'_{sr} = x_\alpha a_{ks} y_\beta$,
4) $s \geqslant r$, $k \geqslant i+1$, $\quad c_{ik} a_{ks} c'_{sr} = dx_{n+\alpha} a_{ks} y_\beta$.

Рассмотрение этих случаев не представляет труда.

Предложение 2. *Для всякого неприводимого делителя p элемента d имеет место включение*

$$R_0 \subset R_{(p)},$$

где $R_{(p)}$ — кольцо всех p-целых элементов поля отношений кольца R.

Доказательство предложения вытекает из следующих двух лемм и того, что дедекиндовом кольце для любого $a \in R$ однозначно определено целое $r \geqslant 0$ такое, что $a = p^r a_1$, где

$a_1 \in R$, $(p, a_1) = 1$ при этом можно заметить, что (см. кольцо R_0) $x_i y_j = \frac{x_i C_{ij}}{|c(\bar{x})|}$, причем в числителе и в знаменателе находятся однородные многочлены степени n.

Лемма 1. *Пусть p – неприводимый делитель элемента d, $p|d$; $x_1, \ldots, x_n \in R$. Если $p^k \big| |c(\bar{x})|$, то $p|x_1, \ldots, p|x_k$.*

Лемма 2. *Пусть $p|x_1, \ldots, p|x_k$.*
а) *Если $i \leqslant n-k$, то $p^k|C_{1i}$,*
б) *Если $i > n-k$, то $p^{k-1}|C_{1i}$,*
где C_{1i} – алгебраическое дополнение элемента c_{1i}.

Предложение 3. *Пусть p — неприводимый делитель элемента d, $p|d$. Тогда тор $T = T(d)$ нормализует сетевую группу $G(\sigma_p)$, а потому $H_p = T \cdot G(\sigma_p)$ является промежуточной подгруппой группы $G = \mathrm{GL}(n,k)$, содержащей тор T. Далее, H_p не содержит $\mathrm{SL}(n,k)$.*

Доказательство предложения 3 вытекает из предложений 1 и 2.

Предложение 4. *Пусть p — неприводимо, $p|d$, $H_p = TG(\sigma_p)$. Если H, $T \leqslant H \leqslant G$, причем $H \supsetneqq H_p$, то $H \supseteq \mathrm{SL}(n,k)$.*

Доказательство. Достаточно, пользуясь элементарными трансвекциями, диагональными матрицами из H_p и матрицей не содержащейся в H_p, получить элементраную трансвекцию $t_{ij}(\alpha)$, $i > j$, где $\alpha \notin R_{(p)}$.

Доказательство теоремы. Согласно предложению 3 H_p – промежуточная подгруппа. Докажем максимальность подгруппы H_p. Пусть $H_p \subsetneqq H \leqslant G$. Покажем, что $H = G$. Для этого в силу предложения 4 нам достаточно показать, что $D(n,k) \subseteq H$. Так как $D(n, R_{(p)}) \subseteq H$, то нам достаточно показать, что $d_r\left(\frac{1}{p}\right) \in H$ для некоторого $1 \leqslant r \leqslant n$. Действительно, так как $T \leqslant H$, то для $x = (0,1,0,\ldots,0)$ мы имеем $c(\bar{x}) \in H$. Умножая матрицу $c(x)$ на матрицы перестановки из $\mathrm{SL}(n,k) \subseteq H$ и на $d_r(-1)$ мы получим, что $d_r(d) \in H$, откуда так как $D(n, R_{(p)}) \subseteq H$, то $d_r(p) \in H$ и $d_r\left(\frac{1}{p}\right) \in H$.

Литература

1. З. И. Боревич, И. Р. Шафаревич, *Теория чисел.* М.: Наука, 1985.
2. З. И. Боревич, В. А. Койбаев Чан Нгок Хой, *Решетки подгрупп в $\mathrm{GL}(n,\mathbb{Q})$, содержащих нерасщепимый тор.* — Зап. науч. семин. ПОМИ **191** (1991), 24–43.

3. В. А. Койбаев, *Подгруппы группы* $\mathrm{GL}(n, \mathbb{Q})$, *содержащие нерасщепимый максимальный тор.* — Докл. АН СССР **312** No. 1 (1990), 36–38.
4. В. А. Койбаев, *О подгруппах полной линейной группы, содержащих максимальный нерасщепимый тор, связаный с радикальным расширением.* — Вестник С.-Петербург. университета Сер. 1 (1995).
5. G. M. Seitz, *Subgroups of finite groups of Lie type.* — J. Algebra **61** (1979), 16–27.

Dzhusoeva N. A., Koibaev V. A. Maximal subgroups containing a torus, connected to the field of fractions of a Dedehind domain.

The paper belongs to the direction related to the description of overgroups of non-split maximal tori, for the case when the ground field is the field of fractions of a Dedekind domain. Its principal result is a construction of a series of maximal subgroups in the class.

С.-Петербургский
государственный университет

Поступило 20 ноября 2002 г.