Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 289, 2002 г.

Е. В. Дыбкова

О НАДДИАГОНАЛЬНЫХ ПОДГРУППАХ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОЙ УНИТАРНОЙ ГРУППЫ НАД НЕКОММУТАТИВНЫМ ТЕЛОМ

Одним из направлений, активно развивавшихся в петербургской алгебраической школе на протяжении последних десятилетий, является исследование решетки подгрупп линейных групп над кольцами. Рассматривая специальные матрицы из идеалов, названные им сетями, З. И. Боревич в 1976 году (см. [1]) доказал следующую красивую теорему о подгруппах полной линейной группы над полем: *если поле содержит не менее 7 элементов, то всякая подгруппа H полной линейной группы над этим полем, содержащая все обратимые диагональные матрицы, заключена между однозначно определенной D-сетевой подгруппой $G(\sigma)$ и ее нормализатором $N(\sigma)$* (по поводу определений и обозначений см. также [1]). В дальнейшем теорема Боревича была перенесена на более широкий класс колец: в [2, 3] З. И. Боревич и Н. А. Вавилов доказали наличие точно такого же описания решетки наддиагональных подгрупп в полной линейной группе над полулокальным кольцом, удовлетворяющим некоторым ограничениям.

Мы не будем здесь подробно описывать многочисленные результаты, полученные в этой и смежных областях за последние 20 лет, и сошлемся на обзоры А. Е. Залесского [11–13] и Н. А. Вавилова [5, 27], где детально освещена указанная тематика и приведена обширная библиография. Выделим лишь еще несколько работ, посвященных исследованию линейных групп над кольцами с формами и имеющих самое непосредственное отношение к вопросу, рассматриваемому в предлагаемой статье. В [15, 16] С. Л. Крупецким была установлена стандартность описания решетки наддиагональных подгрупп в унитарной группе над локальным полем и над телом классических кватернионов. Н. А. Вавилов и Е. В. Дыбкова в [6] доказали, что такое же описание допускают наддиагональные подгруппы симплектической группы над полем, удовлетворяющим некоторым ограничениям (одним из таких ограничений являлась обратимость 2). В [4] Н. А. Вавилов перенес теорему Боревича на ортогональные группы над коммутативным полулокальным кольцом с обратимой 2 и достаточно большими полями вычетов.

В связи с переносом теоремы Боревича на унитарные, ортогональные и симплектические группы следует отметить, что в [6, 4] рассуждения весьма похожи, а это вызывает естественное желание построить единое доказательство для всех трех упомянутых классов линейных групп. Удобным инструментом для такого единого подхода является обращение к введенному Э. Баком в [17] понятию форменного кольца и определяемым с его помощью гиперболическим унитарным группам (подробное описание этих групп приведено в [21, 18], там же объясняется, почему симплектические, ортогональные и классические унитарные группы четных размерностей являются частными случаями гиперболических унитарных групп).

Обращение к гиперболическим унитарным группам в некоторых ситуациях позволяет также преодолеть и традиционные технические трудности, возникающие в случае, когда 2 не является обратимым элементом основного кольца. Надо заметить, однако, что необратимость 2 часто служит не техническим, а принципиальным препятствием при описании решетки наддиагональных подгрупп с помощью сетей: в конце работы [6] приведен пример наддиагональной подгруппы симплектической группы над полем характеристики 2, не укладывающийся в рамки стандартного описания. Это означает, что при переносе теоремы Боревича на гиперболические унитарные группы сеть идеалов соответствующего кольца надо как-то ассоциировать с выделением в кольце форменного параметра, участвующего в определении унитарной группы. В связи с последним обстоятельством в [7] было предложено при исследовании гиперболической унитарной группы $U(2n, R, \Lambda)$ над форменным кольцом (R, Λ) использовать форменные D-сети, то есть пары (σ, Γ), состоящие из некоторой D-сети σ идеалов кольца R и набора Γ, содержащего $2n$ аддитивных подгрупп кольца R со специальными (и просто описываемыми) свойствами, – набора форменных сетевых параметров. В [9, 10] показано, что для случая поля, содержащего достаточно много элементов, за основу стандартного описания решетки наддиагональных подгрупп в рассматриваемой ситуации можно брать точные форменные D-сети (точность сети означает, что стоящие на побочной диагонали идеалы однозначно определяются остальными идеалами и форменными сетевыми параметрами).

Следующим шагом, который естественно сделать при описании решетки наддиагональных подгрупп гиперболической унитарной группы, должен быть, конечно, перенос полученного результата на некоммутативные тела. Напомним в этой связи схему доказательства теоремы Боревича в [1], а также переноса этой теоремы на подгруппы гиперболической унитарной группы в случае поля из [9, 10]. Прежде всего устанавливаются необходимые и достаточные условия для вхождения матрицы в нормализатор сетевой подгруппы. Затем строится наибольшая D-сеть (соответственно, точная форменная D-сеть), содержащаяся в данной наддиагональной подгруппе. После этого проверяется, что взятая подгруппа входит в нормализатор ассоциированной сетевой подгруппы, для чего доказываются вспомогательные факты об извлечении в данной группе трансвекций (соответственно, унитарных трансвекций). Отметим, что и в [1], и в [9, 10] доказательство лемм о трансвекциях – технически наиболее сложная часть работы. Как одно из средств преодоления возникающих технических трудностей для гиперболической унитарной группы над полем использовалась индукция по степени группы (в качестве примера укажем на доказательство леммы 10 в [9]), а это означает отдельное рассмотрение базового случая, то есть либо группы наименьшей возможной степени, либо групп нескольких малых степеней.

Основной целью предлагаемой работы является доказательство теоремы Боревича для гиперболической унитарной группы над некоммутативным телом в случае, когда унитарная группа имеет степень 2 или 4. К сожалению, в последнем случае приводимое доказательство годится не для всех форменных колец над некоммутативным телом и потому, как и в [9], мы вводим понятие хорошего форменного кольца над некоммутативным телом.

1. Форменное кольцо и гиперболическая унитарная группа

Пусть R – ассоциативное кольцо с 1, в котором действует инволюция $^-$. Фиксируем в R центральный обратимый элемент λ, удовлетворяющий условию $\lambda\overline{\lambda} = 1$. Выбранный λ и инволюция определяют в R аддитивные подгруппы

$$\Lambda^m = \{\alpha - \lambda\overline{\alpha} \mid \alpha \in R\} \quad \text{и} \quad \Lambda^M = \{\alpha \in R \mid \alpha = -\lambda\overline{\alpha}\}.$$

Понятно, что $\Lambda^m \leqslant \Lambda^M$; в некоторых случаях эти подгруппы могут совпадать – например, это так, если для некоторого элемента s из центра кольца R сумма $s + \overline{s}$ обратима в кольце R (см. [21, 5.1C]). Промежуточная подгруппа Λ ($\Lambda^m \leqslant \Lambda \leqslant \Lambda^M$) называется *форменным параметром* нашего кольца, если $\alpha\Lambda\overline{\alpha} \leqslant \Lambda$ для любого $\alpha \in R$ (таким образом, Λ^m и Λ^M являются, очевидно, минимальным и максимальным форменными параметрами).

Фиксируем форменное кольцо (R, Λ). При определении в матричных терминах гиперболической унитарной группы над этим форменным кольцом нам будут удобны следующие обозначения. Для ненулевого целого числа k через $\varepsilon(k)$ будем обозначать его знак ($\varepsilon(k) = 1$ при $k > 0$ и $\varepsilon(k) = -1$ при $k < 0$), а через Λ_k – подгруппу $\Lambda_k = \lambda^{-\frac{\varepsilon(k)+1}{2}}\Lambda$ (таким образом, $\Lambda_k = \Lambda$ при $k < 0$ и $\Lambda_k = \overline{\lambda}\Lambda = \overline{\Lambda}$ при $k > 0$). Рассматривая квадратные матрицы порядка $2n$ над R, их элементы мы индексируем парами чисел из множества $\Omega = \{1, \ldots, n, -n, \ldots, -1\}$. Для обратимой матрицы a элемент a^{-1}, стоящий в i-ой строке и j-ом столбце, обозначается через a'_{ij}.

Обратимую матрицу a порядка $2n$ мы будем называть *унитарной*, если для всех индексов из Ω справедливо равенство

$$a'_{ij} = \lambda^{\frac{\varepsilon(j)-\varepsilon(i)}{2}}\overline{a}_{-j,-i}.$$

Легко понять, что множество $U(2n, R)$ всех унитарных матриц порядка $2n$ образует группу относительно матричного умножения. Каждой унитарной матрице можно сопоставить множество из $(2n)^2$ ее *частичных сумм*

$$S_{ij}(a) = \sum_{l>0} a_{il}a'_{lj}.$$

Особенно нас будут интересовать частичные суммы *длинного типа* $S_{i,-i}(a)$. Отметим важное свойство таких частичных сумм, используемое нами далее.

Лемма 1. *Для любых двух матриц a и b из $U(2n, R)$ и каждого индекса i справедливо сравнение*

$$S_{i,-i}(ab) \equiv S_{i,-i}(a) + \sum_{k} a_{ik}S_{k,-k}(b)a'_{-k,-i} \pmod{\Lambda_i^m}.$$

Доказательство. Сначала заметим, что для всякой $c \in U(2n, R)$ и произвольных индексов i и j имеем

$$S_{ij}(c) = \sum_{l>0} c_{il}c'_{lj} = \sum_{l>0} \lambda^{\frac{\varepsilon(j)-\varepsilon(i)}{2}} \overline{c}'_{-l,-i}\overline{c}_{-j,-l} = \lambda^{\frac{\varepsilon(j)-\varepsilon(i)}{2}} \overline{\sum_{l<0} c_{-j,l}c'_{l,-i}},$$

откуда следует,что $S_{ij}(c) = -\lambda^{\frac{\varepsilon(j)-\varepsilon(i)}{2}} \overline{S_{-j,-i}(c)}$ при $i \neq j$ и $S_{ii}(c) = 1 - \overline{S_{-i,-i}(c)}$.

Для нашей частичной суммы имеем

$$S_{i,-i}(ab) = \sum_{l>0} \sum_{k,j} a_{ik}b_{kl}b'_{lj}a'_{j,-i} =$$

$$= \sum_{k,j} a_{ik}S_{kj}(b)a'_{j,-i} = \sum_{j\neq k} a_{ik}S_{kj}(b)a'_{j,-i} +$$

$$+ \sum_{k} a_{ik}S_{kk}(b)a'_{k,-i} + \sum_{k} a_{ik}S_{k,-k}(b)a'_{-k,-i}.$$

Остается заметить,что здесь первая сумма равна

$$\sum_{k>0} \sum_{j\neq\pm k} (a_{ik}S_{kj}(b)a'_{j,-i} + a_{i,-j}S_{-j,-k}(b)a'_{-k,-i}) =$$

$$= \sum_{k>0} \sum_{j\neq\pm k} (a_{ik}S_{kj}(b)a'_{j,-i} - \lambda^{-\varepsilon(i)}\overline{a_{ik}S_{kj}(b)a'_{j,-i}})$$

и, очевидно, принадлежит Λ_i^m, а вторая сумма – это

$$\sum_{k>0}(a_{ik}S_{kk}(b)a'_{k,-i} + a_{i,-k}S_{-k,-k}(b)a'_{-k,-i}) =$$

$$= \sum_{k>0}(a_{ik}a'_{k,-i} - \lambda^{-\varepsilon(i)}\overline{a_{i,-k}S_{-k,-k}(b)a'_{-k,-i}} + a_{i,-k}S_{-k,-k}(b)a'_{-k,-i}) \equiv$$

$$\equiv S_{i,-i}(a) \pmod{\Lambda_i^m}. \square$$

Под *гиперболической унитарной группой* степени $2n$ над форменным кольцом (R, Λ) мы понимаем группу

$$U(2n, R, \Lambda) = \{a \in U(2n, R) \mid S_{i,-i}(a) \in \Lambda_i \text{ при всех индексах}\}.$$

Легко заметить, что при $\Lambda = \Lambda^M$ условие на частичные суммы выполняется автоматически и потому

$$U(2n, R, \Lambda^M) = U(2n, R).$$

Различных инволюций на кольце R может быть, конечно, много; в частности, для первоначальной инволюции $\overline{}$ и обратимого $s \in R$ эндоморфизм $\omega \mapsto \widetilde{\omega} = s\overline{\omega}s^{-1}$ также является инволюцией, если произведение $s\overline{s}^{-1}$ центрально (например, это так при $s = \overline{s}$ или при $s = -\overline{s}$). Если Λ – форменный параметр кольца, ассоциированный со старой инволюцией и λ, то $M = s\Lambda$ – форменный параметр R, ассоциированный с новой инволюцией и $\mu = s\overline{s}^{-1}\lambda$. Про полученное указанным образом новое форменное кольцо (R, M) над R принято говорить, что оно получено из форменного кольца (R, Λ) *скэйлингом* при помощи s. Если форменное кольцо (R, M) получено из форменного кольца (R, Λ) скэйлингом с помощью s, то гиперболические унитарные группы над этими форменными кольцами сопряжены в полной линейной группе:

$$U(2n, R, M) = \begin{pmatrix} e & 0 \\ 0 & se \end{pmatrix} U(2n, R, \Lambda) \begin{pmatrix} e & 0 \\ 0 & s^{-1}e \end{pmatrix}$$

(через e здесь и далее обозначается единичная матрица соответствующего порядка).

2. Форменные сети и сетевые подгруппы

Вновь фиксируем форменное кольцо (R, Λ). Матрица $\sigma = (\sigma_{ij})$ из $(2n)^2$ двусторонних идеалов кольца R называется *сетью идеалов* порядка $2n$ в R, если $\sigma_{ij}\sigma_{jk} \leqslant \sigma_{ik}$ для всех индексов из Ω; эту сеть мы будем называть *унитарной D-сетью*, если для всех индексов $\sigma_{ii} = R$ и $\sigma_{ij} = \overline{\sigma}_{-j,-i}$.

Для унитарной D-сети σ и $i \in \Omega$ рассмотрим аддитивные подгруппы в R

$$\Gamma_i^m = \{\alpha - \lambda^{-\varepsilon(i)}\overline{\alpha} \mid \alpha \in \sigma_{i,-i}\} \quad \text{и} \quad \Gamma_i^M = \sigma_{i,-i} \cap \Lambda_i$$

– очевидно, что первая из них содержится во второй. Набор $\Gamma = (\Gamma_i)$ из $2n$ аддитивных подгрупп R мы называем *набором форменных сетевых параметров* для σ, если

$$\Gamma_i^m \leqslant \Gamma_i \leqslant \Gamma_i^M \quad \text{и} \quad \lambda^{\frac{\varepsilon(j)-\varepsilon(i)}{2}}\alpha\Gamma_j\overline{\alpha} \leqslant \Gamma_i$$

для всех индексов и всех $\alpha \in \sigma_{ij}$. В некоторых случаях набор форменных сетевых параметров определяется сетью однозначно – например, если при данном λ форменный параметр кольца определен однозначно или если на побочной диагонали сети все идеалы – нулевые. *Форменная* D-*сеть* над форменным кольцом (R,Λ) – это пара (σ,Γ), состоящая из унитарной D-сети σ и какого-нибудь набора Γ ее форменных сетевых параметров. Мы говорим, что форменная D-сеть (σ,Γ) *точна*, если для каждого идеала $\sigma_{i,-i}$, стоящего на побочной диагонали, выполняется равенство

$$\sigma_{i,-i} = \sum_{l\neq\pm i} \sigma_{il}\sigma_{l,-i} + \langle\Gamma_i\rangle,$$

где через $\langle\Gamma_i\rangle$ обозначен идеал, порожденный Γ_i. Отметим, что в ортогональной ситуации (инволюция тривиальна и $\lambda = 1$) точные форменные D-сети рассматривал в [4] Н. А. Вавилов, называя их ортогональными сетями.

Как показано в [7], с каждой форменной D-сетью (σ,Γ) порядка $2n$ связана подгруппа

$$U(\sigma,\Gamma) = \{a = (a_{ij}) \in U(2n,R,\Lambda) \mid a_{ij} \in \sigma_{ij} \quad \text{и} \quad S_{i,-i} \in \Gamma_i\}$$

группы $U(2n,R,\Lambda)$ – ее мы называем *форменной сетевой подгруппой* для данной форменной D-сети. Если $\Gamma_i = \Gamma_i^M$ для каждого индекса i, то форменная сетевая подгруппа совпадает с пересечением обычной сетевой подгруппы $G(\sigma)$ (см. [1])) и группы $U(2n,R,\Lambda)$.

С форменной D-сетью можно связывать и некоторые другие подгруппы группы $U(2n,R,\Lambda)$. Через $N_U(\sigma,\Gamma)$ мы обозначаем *нормализатор форменной сетевой подгруппы* $U(\sigma,\Gamma)$ в группе $U(2n,R,\Lambda)$. В [10], исследуя гиперболические унитарные группы над полями, мы ассоциировали с точной форменной D-сетью еще одну подгруппу группы $U(2n,R,\Lambda)$, называя ее надэлементарной форменной сетевой подгруппой, – эта подгруппа $U_0(\sigma,\Gamma)$ порождена всеми унитарными диагональными матрицами, всеми унитарными трансвекциями короткого корневого типа

$$T_{ij}(\alpha) = e + \alpha e_{ij} - \lambda^{\frac{\varepsilon(j)-\varepsilon(i)}{2}}\overline{\alpha}e_{-j,-i} \quad \text{с} \quad \alpha \in \sigma_{ij} \quad \text{при} \quad i \neq \pm j$$

и всеми унитарными трансвекциями длинного корневого типа

$$T_{i,-i}(\beta) = e + \beta e_{i,-i} \quad \text{с} \quad \beta \in \Gamma_i$$

(здесь и далее через e_{ij} обозначается матричная единица подходящего размера с 1 на месте (i,j) и 0 на остальных местах).

В заключение этого раздела отметим, что сама группа $U(2n, R, \Lambda)$ является своей наибольшей (относительно включения) форменной сетевой подгруппой; наименьшей форменной сетевой подгруппой служит подгруппа

$$\Delta(2n, R, \Lambda)$$

всех диагональных матриц группы $U(2n, R, \Lambda)$. Ясно, что эта последняя подгруппа порождается диагональными матрицами

$$d_i(\theta) = e + (\theta - 1)e_{ii} + (\overline{\theta}^{-1} - 1)e_{-i,-i}$$

при обратимых θ и зависит только от инволюции. Произвольную подгруппу $U(2n, R, \Lambda)$, содержащую $\Delta(2n, R, \Lambda)$, мы называем ее *наддиагональной подгруппой.*

3. Некоторые сведения о телах с инволюцией

Как и в [21, 5.2B], форменное кольцо (R, Λ) над телом R мы будем называть *нормализованным,* если $\Lambda = 0$ или $1 \in \Lambda$. Напомним, что равенство $\Lambda = 0$ означает коммутативность R, тривиальность инволюции и $\lambda = 1$; минимальный форменный параметр Λ^m в такой ситуации, конечно, тоже равен 0, а максимальный Λ^M совпадает с аддитивной группой

$$R^- = \{\alpha \in R \mid \alpha = -\overline{\alpha}\}.$$

Если же $1 \in \Lambda$, то $\lambda = -1$, форменный параметр Λ^M равен аддитивной группе неподвижных относительно инволюции элементов

$$R^0 = \{\alpha \in R \mid \alpha = \overline{\alpha}\},$$

а форменный параметр Λ^m – это аддитивная группа *следов*

$$\mathrm{Tr}\,(R) = \{\alpha + \overline{\alpha} \mid \alpha \in R\}.$$

Далее мы будем иметь дело в основном с нормализованными форменными кольцами, но это не приведет к потере общности; применяя скэйлинг, от любого форменного кольца (R, Λ) над телом можно перейти к нормализованному форменному кольцу: если $\Lambda \neq 0$ и s – произвольный ненулевой элемент из Λ, то скэйлинг при помощи s^{-1} дает нормализованное форменное кольцо $(R, s^{-1}\Lambda)$.

Если тело имеет характеристику 2, то подгруппы R^0 и R^- одинаковы; при $\operatorname{char} R \neq 2$ имеет место прямое разложение $R = R^0 \oplus R^-$. Для любого бесконечного тела группа R^0 бесконечна; если на бесконечном теле инволюция нетривиальна, то бесконечна и группа R^-. Для бесконечного тела с нетривиальной инволюцией бесконечной является и аддитивная группа следов $\operatorname{Tr}(R)$ (см. [21, 6.1.1] и [26, лемма 1.3]); отметим также, что если характеристика тела отлична от 2, то группа $\operatorname{Tr}(R)$ совпадает с R^0.

Как обычно, через R^* мы обозначаем мультипликативную группу всех обратимых элементов тела R. В связи с инволюцией, действующей на теле R, нам потребуется и другая мультипликативная группа – *группа унитарных элементов тела*

$$\mathcal{U}(R) = \{\theta \in R \mid \theta\overline{\theta} = 1\}.$$

Отметим, что все отличные от 1 элементы этой группы однозначно представимы в виде

$$\theta = 1 - \gamma^{-1}, \quad \text{где} \quad \gamma + \overline{\gamma} = 1.$$

При тривиальной инволюции на теле R (в коммутативном случае) такой γ существует и единственен только при $\operatorname{char} R \neq 2$, в этом случае порядок группы $\mathcal{U}(R)$ равен 2. Если инволюция действует нетривиально на бесконечном теле R (коммутативном или нет) и $\operatorname{char} R \neq 2$, то указанному выше условию удовлетворяют $\gamma = \frac{1}{2} + \alpha$ при $\alpha \in R^-$ и в этом случае группа $\mathcal{U}(R)$ бесконечна.

Центр тела мы будем обозначать $Z(R)$, или, если это не вызовет двусмысленности, просто Z. Мы *не* предполагаем тело конечно порожденным над своим центром, поэтому центр может оказаться достаточно малым (например, полем $\mathbb{F}_2$ из двух элементов). Упомянем в этой связи работу А. Клейна [24], где показано, что любое поле является центром некоторого тела с инволюцией.

Центр всегда инвариантен относительно инволюции, которая может быть на нем тождественной (в этом случае говорят об инволюции *первого рода*) или нет (инволюция *второго рода*). Для любого тела с инволюцией второго рода всякий элемент, не меняемый инволюцией, является следом. Отметим также, что если R – бесконечное тело характеристики 2 с инволюцией второго рода, то группа $\mathcal{U}(R)$ бесконечна: ее неединичные элементы представимы в виде $1 + (\gamma + \alpha)^{-1}$, где γ – центральный элемент, удовлетворяющий условию $\gamma + \overline{\gamma} = 1$, а α принадлежит R^0.

Форменный параметр бесконечного тела с нетривиальной инволюцией всегда бесконечен. Из сказанного выше ясно также, что для некоммутативного тела форменный параметр определен неоднозначно ($\Lambda^m \neq \Lambda^M$) только при инволюции первого рода и $\operatorname{char} R = 2$. Как и в [9], форменное кольцо (R, Λ) над телом R мы называем *хорошим,* если $\Lambda = \Lambda^m$; *нехорошими,* таким образом, оказываются только некоторые форменные кольца над телом характеристики 2 с инволюцией первого рода.

В случае, когда тело характеристики 2 конечно порождено над своим центром, принято говорить о типе инволюции первого рода (см., например, [25]). Игнорируя условие конечной порожденности и не обращаясь, разумеется, к понятию присоединенной инволюции, мы будем говорить, что инволюция имеет *симплектический тип*, если единица является следом, то есть $1 = \gamma + \overline{\gamma}$ для некоторого $\gamma \in R$, и *ортогональный тип* – в противном случае. Понятно, что в симплектическом случае группа $\mathcal{U}(R)$ бесконечна, а в ортогональном состоит только из 1 (в [19] инволюцию, соответствующую последней ситуации, П. Кон называет унитарно-тривиальной).

В предложении 2.6 из [25] для случая тела, конечно порожденного над своим центром, описан тип инволюции, получающейся при скэйлинге форменного кольца с помощью элемента из R^0. Это утверждение справедливо и в более общей ситуации:

Лемма 2. *Пусть R – некоммутативное тело характеристики 2 с инволюцией $\overline{}$ первого рода и для ненулевого s из R^0 новая инволюция $\widetilde{}$ определяется равенством $\widetilde{\omega} = s\overline{\omega}s^{-1}$. Тогда новая инволюция имеет симплектический тип тогда и только тогда, когда s является следом относительно старой инволюции, то есть $s = t + \overline{t}$ при некотором $t \in R$.*

Для доказательства достаточно заметить, что равенство $1 = \gamma + \widetilde{\gamma}$ эквивалентно условию $s = \gamma s + s\overline{\gamma} = \gamma s + \overline{\gamma s}$.

Если R – некоммутативное тело и α – произвольный его элемент, то через $\zeta_R(\alpha)$ мы будем обозначать *централизатор* этого элемента

$$\zeta_R(\alpha) = \{\beta \in R \mid \alpha\beta = \beta\alpha\}.$$

По лемме 8.5.4 из [14] централизатор любого элемента является бесконечным подтелом тела R. Если для α из R элемент $\overline{\alpha}$ является рациональной функцией от α с коэффициентами из центра нашего тела, то $\zeta_R(\alpha)$ инвариантен относительно инволюции. Отметим, что если при этом $\alpha \neq \overline{\alpha}$, то $\zeta_R(\alpha)$ – тело с инволюцией второго рода.

В заключение этого раздела сделаем одно замечание относительно форменных сетевых подгрупп. Если (σ, Γ) – точная форменная D-сеть над форменным кольцом, соответствующим некоммутативному телу R, то по теореме 2 из [10] группа $U_0(\sigma, \Gamma)$ совпадает с $U(\sigma, \Gamma)$, то есть $U(\sigma, \Gamma)$ порождается диагональными унитарными матрицами и содержащимися в этой группе унитарными трансвекциями. Отметим также, что в случае некоммутативного тела благодаря коммутационным соотношениям для унитарных трансвекций (они приведены, например, в [18]) условие точности форменной сети выглядит значительно проще, чем в общей ситуации – оно означает, что $\sigma_{i,-i} = \langle \Gamma_i \rangle$.

4. Сопряженность форменных сетевых подгрупп

Критерий вхождения унитарной матрицы в нормализатор форменной сетевой подгруппы для некоммутативного тела оказывается даже проще, чем в коммутативном случае. Следующая теорема – это перенос на некоммутативный случай теоремы 4 из [10].

Теорема 1. *Пусть R – некоммутативное тело с инволюцией, (R, Λ) – форменное кольцо над этим телом и пусть (σ, Γ) и (τ, B) – две точные форменные D-сети порядка $2n$ над (R, Λ). Для матрицы a из $U(2n, R, \Lambda)$ включение $aU(\sigma, \Gamma)a^{-1} \leqslant U(\tau, B)$ справедливо тогда и только тогда, когда при любых индексах для элементов матриц a и a^{-1} выполняются включения*

1) $a_{ik}\sigma_{kl}a'_{lj} \leqslant \tau_{ij}$,

2) $a_{ik}\Gamma_k a'_{-k,-i} \leqslant B_i$.

Доказательство. Достаточность указанных условий следует из того, что группа $U(\sigma, \Gamma)$ порождается диагональными матрицами и содержащимися в этой группе унитарными трансвекциями. Необходимость первого условия мы докажем сначала при $k = l$. Пусть $\tau_{ij} = 0$ (это возможно при $i \neq j$), но $a_{ik}a'_{kj} \neq 0$. Рассмотрим при обратимом θ матрицу

$$b = b(\theta) = ad_k(\theta)a^{-1} \in U(\tau, B)$$

– для нее $b_{ij} = 0$ при всех ненулевых θ. Ясно, что в таком случае $a_{i,-k}a'_{-k,j} \neq 0$. Беря $\theta \neq 0, -1$ и заменяя θ на $\theta + 1$, получаем $a_{ik}\theta a'_{kj} + a_{i,-k}((\overline{\theta} + 1)^{-1} - 1)a'_{-k,j} = 0$, что вместе с предыдущим равенством означает $a_{ik}a'_{kj} = a_{i,-k}(\overline{\theta}^{-1} - (\overline{\theta} + 1)^{-1})a'_{-k,j}$. Оказывается, что при указанных ограничениях на θ разность $\overline{\theta}^{-1} - (\overline{\theta}+1)^{-1}$ – постоянная ненулевая величина, обозначим ее через α. Легко заметить, что тогда $\theta(\theta + 1) = \alpha^{-1}$ для всех $\theta \neq 0, -1$; если фиксировать одно такое значение θ_0, то для $\theta \in \zeta_R(\theta_0)$ приведенное равенство может выполняться лишь при $\theta = \theta_0$ или $\theta = -\theta_0 - 1$, а это противоречит нашему предположению. Тем самым необходимость первого условия для $k = l$ установлена.

С использованием предыдущего для $k \neq \pm l$ необходимость первого условия легко доказывается рассмотрением матриц $aT_{kl}(\alpha)a^{-1}$ и $ad_k(\theta)T_{kl}(\alpha)a^{-1}$ при $\alpha \in \sigma_{kl}$ и $\theta \in R^*$. Столь же легко убедиться во включении $a_{ik}\Gamma_k a'_{-k,-i} \subseteq \tau_{i,-i}$ – для этого достаточно взять матрицу $aT_{k,-k}(\alpha)a^{-1}$ при $\alpha \in \Gamma_k$; из-за точности (σ, Γ) отсюда следует выполнение первого условия и для $k = -l$.

Докажем теперь необходимость второго условия, считая a_{ik} и Γ_k ненулевыми. В этой ситуации $\sigma_{k,-k} = R$ и потому в силу первого условия $\tau_{i,-i} = R$. Заметим, что тогда $\Lambda_i^m \leqslant B_i$. При любом $\alpha \in \Gamma_k$ матрица $b = aT_{k,-k}(\alpha)a^{-1}$ содержится в $U(\tau, B)$ и из-за этого $S_{i,-i} \in B_i$. Применяя к b лемму 1, учитывая включение

$$S_{i,-i}(a) + \sum_r a_{ir}S_{r,-r}(a^{-1})a'_{-r,-i} \in \Lambda_i^m$$

(оно следует также из леммы 1) и полагая $\gamma = \lambda^{-\varepsilon(k)}S_{-k,k}(a^{-1})$, обнаруживаем, что группе B_i принадлежит разность

$$a_{ik}(\alpha + \alpha\gamma\overline{\alpha})a'_{-k,-i} - a_{ik}(S_{kk}(a^{-1})\alpha - \lambda^{-\varepsilon(k)}\overline{S_{kk}(a^{-1})\alpha})a'_{-k,-i}.$$

Легко заметить, что вторая компонента этой разности принадлежит Λ_i^m, поэтому при всех $\alpha \in \Gamma_k$

$$a_{ik}(\alpha + \alpha\gamma\overline{\alpha})a'_{-k,-i} \in B_i. \tag{1}$$

Если $\operatorname{char} R \neq 2$, то из этого легко вывести $a_{ik}\alpha a'_{-k,-i} \in B_i$: заменяя в (1) α на $\frac{1}{2}\alpha$ и вычитая удвоенный результат из (1), получаем $a_{ik}\alpha\gamma\overline{\alpha}a'_{-k,-i} \in B_i$ (напомним, что B_i – аддитивная группа).

При $\operatorname{char} R = 2$ рассуждаем несколько иначе. Поскольку $\overline{\gamma} = -\lambda^{-\varepsilon(k)}\gamma$, тело $R_1 = \zeta_R(\gamma)$ инвариантно относительно инволюции.

Выберем $\beta \in R_1^0$ отличным от 0 и 1. Заменяя в (1) α на $\beta\alpha\beta$, получаем очевидными преобразованиями $a_{ik}(\alpha+\alpha\beta\gamma\beta\overline{\alpha})a'_{-k,-i} \in B_i$. Вместе с (1) это из-за $\operatorname{char} R = 2$ дает нам $a_{ik}(\gamma+\beta\gamma\beta)a'_{-k,-i} \in B_i$. Замена здесь β на $\beta+1$ приводит к $a_{ik}\beta\gamma\beta a'_{-k,-i} \in B_i$, откуда следует, что $a_{ik}\alpha\gamma\overline{\alpha}a'_{-k,-i} \in B_i$, что и доказывает наше утверждение. $\square$

Ранее мы отмечали в [7], что на множестве всех форменных сетей порядка $2n$ естественным образом действует группа W_n, состоящая из всех тех подстановок π степени $2n$, для которых $\pi(-i) = -\pi(i)$ при любых $i \in \Omega$: каждая такая подстановка сопоставляет форменной сети (σ, Γ) форменную сеть $(\sigma, \Gamma)^\pi = (\tau, B)$, определяемую равенствами $\tau_{ij} = \sigma_{\pi(i),\pi(j)}$ и $B_i = \lambda^{\frac{\varepsilon(\pi(i))-\varepsilon(i)}{2}}\Gamma_{\pi(i)}$ при всех индексах. Форменные сети, получаемые одна из другой указанным образом, принято называть *подобными.* Форменные сетевые подгруппы, соответствующие подобным форменным сетям, сопряжены в группе $U(2n, R, \Lambda)$ *матрицей подстановки* p_π (явный вид этой матрицы указан в [7]).

В [10, теорема 5] было доказано, что если R – поле, содержащее не менее 5 элементов, то сопряженность в гиперболической унитарной группе форменных сетевых подгрупп, соответствующих двум точным форменным D-сетям, эквивалентна подобию этих форменных сетей. Для переноса этого результата на некоммутативные тела нам достаточно установить следующее свойство матриц над телами, очевидное в коммутативном случае:

Лемма 3. *Пусть R – тело, m – натуральное число. Для произвольной матрицы a из $GL(m, R)$ найдется такая подстановка ρ степени m, что элементы $a_{i,\rho(i)}$ обратимы при всех $i = 1, \ldots, m$.*

Доказательство. Индукция по m. При $m = 2$ утверждение очевидно. Пусть a – обратимая матрица порядка $m > 2$. Обозначим через $a_1, \ldots, a_m$ строки матрицы a, а через $A_1, \ldots, A_m$ – ее столбцы. Нам потребуется также прямоугольная матрица $b = (A_1, \ldots, A_{m-1})$ – ее строки мы будем обозначать $b_1, \ldots, b_m$.

Предположим сначала, что в столбце A_m нет нулевых элементов. Понятно, что матрица b имеет ранг $m-1$, следовательно, некоторые ее $m-1$ строк с номерами $i_1, \ldots, i_{m-1}$ линейно независимы (слева); если $\{1, \ldots, m\} = \{i_1, \ldots, i_{m-1}, j\}$, то квадратная матрица $(m-1)$-ого порядка, полученная из a вычеркиванием j-ой строки и последнего столбца, обратима, а потому в силу индукционного предположения существует такая биекция $\rho : \{i_1, \dots, i_{m-1}\} \to \{1, \dots, m-1\}$, что все элементы $a_{i_1,1}, \dots, a_{i_{m-1},m-1}$ отличны от 0. Полагая дополнительно $\rho(j) = m$, получаем искомую подстановку.

Дальше считаем, что в столбце A_m нулевые элементы есть и что эти элементы стоят в строках с номерами $i_1, \dots, i_k$ $(0 < k < m)$. Из линейной независимости строк $a_{i_1}, \dots, a_{i_k}$ матрицы a следует, конечно, линейная независимость строк $b_{i_1}, \dots, b_{i_k}$ матрицы b. Поскольку все столбцы b линейно независимы (справа), выбранные нами строки содержатся в некотором максимальном линейно независимом множестве $b_{i_1}, \dots, b_{i_k}, \dots, b_{i_{m-1}}$ строк матрицы b. Вновь положим $\{1, \dots, m\} = \{i_1, \dots, i_{m-1}, j\}$. Из наших рассуждений следует, что при вычеркивании в матрице a ее j-ой строки и последнего столбца получается обратимая матрица порядка $m - 1$. Пользуясь индукционным предположением, находим биекцию $\rho : \{i_1, \dots, i_{m-1}\} \to \{1, \dots, m-1\}$, для которой все $a_{i_1,1}, \dots, a_{i_{m-1},m-1}$ обратимы. Остается вспомнить, что a_{jm} также обратим. □

Фактическим следствием доказанной леммы, как уже говорилось, является следующая теорема.

Теорема 2. *Пусть R – некоммутативное тело, (R, Λ) – форменное кольцо над R, (σ, Γ) и (τ, B) – две точные форменные D-сети порядка $2n$ над (R, Λ). Если для матрицы a из $U(2n, R, \Lambda)$ выполнено равенство*

$$aU(\sigma, \Gamma)a^{-1} = U(\tau, B),$$

то a может быть представлена в виде произведения $a = p_\pi b$, где $b \in N_U(\sigma, \Gamma)$, а π – некоторая подстановка из группы W_n.

5. Коммутативный случай и группа $U(2, R, \Lambda)$

При исследовании решетки наддиагональных подгрупп гиперболической унитарной группы над некоммутативным телом нам потребуется аналог теоремы Боревича в случае, когда R – поле. Напомним формулировку результата из [9, 10].

Теорема 3. *Пусть K – поле с инволюцией, содержащее ровно 8 или не менее 13 элементов, K^0 – подполе его элементов, не меняемых инволюцией, причем $\operatorname{card} K^0 \geqslant 7$. Для любого форменного* *кольца* (K,Λ) *и любой подгруппы* H*, содержащей все диагональные унитарные матрицы*

$$(\Delta(2n,K,\Lambda)\leqslant H\leqslant U(2n,K,\Lambda)),$$

существует такая единственная точная форменная D*-сеть* (σ,Γ) *порядка* $2n$ *над* (K,Λ)*, что*

$$U_0(\sigma,\Gamma)\leqslant H\leqslant N_U(\sigma,\Gamma).$$

Предположим на минуту, что для некоммутативного тела подгруппа H группы $U(2n,R,\Lambda)$ порождается всеми диагональными унитарными матрицами и еще одной матрицей, все элементы которой принадлежат некоторому подполю K тела R, инвариантному относительно инволюции. Тогда пересечение H' группы $U(2n,K,\Lambda\cap K)$ и нашей подгруппы H является, очевидно, наддиагональной подгруппой гиперболической унитарной группы над полем. Теорема 3 позволяет делать определенные выводы о свойствах H' (например, о наличии в этой группе унитарных трансвекций), если поле K достаточно велико. Наше следующее утверждение позволяет снять в этой ситуации ограничения на размер поля.

Лемма 4. *Пусть* R *– некоммутативное тело с инволюцией. Любое подполе* k *тела* R*, инвариантное относительно инволюции, содержится в некотором бесконечном подполе* K *тела* R*, инвариантном относительно инволюции.*

Доказательство. Пусть $k=\{\alpha_1,\dots,\alpha_n\}$ – конечное поле. Рассмотрим последовательность централизаторов $R_1=\zeta_R(\alpha_1), R_2=\zeta_{R_1}(\alpha_2),\dots,R_n=\zeta_{R_{n-1}}(\alpha_n)$ и вспомним, что все они являются бесконечными телами. Понятно также, что наше поле k содержится в центре каждого из них, а тело R_n к тому же инвариантно относительно инволюции. Для коммутативного R_n наше утверждение очевидно; если же R_n некоммутативно, то можно считать, что $R_n=R$, а k – подполе его центра Z. Далее достаточно показать, что k является собственным подполем некоторого поля k_1, содержащегося, разумеется, в R и инвариантного относительно инволюции. Для этого можно, воспользовавшись бесконечностью аддитивной группы R^0, выбрать какой-нибудь $\beta\in R^0$, не принадлежащий полю k, и взять в качестве k_1 поле, получающееся присоединением к k выбранного элемента: $k_1=k(\beta)$. □

Теперь мы готовы доказать, что для некоммутативного тела решетка наддиагональных подгрупп группы $U(2,R,\Lambda)$ устроена стандартно.

Теорема 4. *Пусть R – некоммутативное тело, (R,Λ) – форменное кольцо над R и*

$$\Delta(2,R,\Lambda)\leqslant H\leqslant U(2,R,\Lambda).$$

Тогда существует единственная точная форменная D-сеть (σ,Γ) второго порядка, для которой

$$U(\sigma,\Gamma)\leqslant H\leqslant N_U(\sigma,\Gamma).$$

Доказательство. Легко понять, что при доказательстве форменное кольцо мы можем считать нормализованным. Для $i=\pm 1$ положим

$$\Gamma_i=\{\alpha\in R^0\mid T_{i,-i}(\alpha)\in H\},\quad \sigma_{i,-i}=\langle\Gamma_i\rangle\quad \text{и}\quad \sigma_{ii}=R.$$

Понятно, что $\sigma=(\sigma_{ij})$ – унитарная D-сеть; набор $\Gamma=(\Gamma_1,\Gamma_{-1})$ мы сможем назвать набором форменных параметров сети σ, если докажем включения $\alpha\beta\alpha\in\Gamma_1$ и $\beta\alpha\beta\in\Gamma_{-1}$ при всех $\alpha\in\Gamma_1$ и $\beta\in\Gamma_{-1}$. Для проверки условия $\alpha\beta\alpha\in\Gamma_1$ при ненулевых α и β проведем скэйлинг форменного кольца (R,Λ) при помощи β^{-1}, перейдя к новой инволюции $\omega\mapsto\widetilde{\omega}=\beta^{-1}\overline{\omega}\beta$. Как уже говорилось ранее, новая унитарная группа $U(2,R,M)$, полученная в результате скэйлинга, сопряжена с $U(2,R,\Lambda)$ в полной линейной группе $GL(2,R)$: $U(2,R,M)=fU(2,R,\Lambda)f^{-1}$ при $f=e_{11}+\beta^{-1}e_{-1,-1}$. Рассмотрим в новой унитарной группе подгруппу $H_1=fHf^{-1}$. Понятно, что $\Delta(2,R,M)\leqslant H_1$ и подгруппе H_1 принадлежат унитарные трансвекции $T_{1,-1}(\alpha\beta)$ и $T_{-1,1}(1)$.

Произведение $\alpha\beta$ не меняется новой инволюцией: $\widetilde{\alpha\beta}=\alpha\beta$, поэтому тело $R_1=\zeta_R(\alpha\beta)$ и его центр Z_1 инвариантны относительно новой инволюции. Для $k=Z_1$ найдем какое-нибудь бесконечное подполе K, удовлетворяющее лемме 4, и обозначим через H_2 подгруппу группы H_1, порожденную всеми диагональными матрицами из $\Delta(2,K,M\cap K)$ и трансвекциями $T_{1,-1}(\alpha\beta)$ и $T_{-1,1}(1)$. Для наддиагональной подгруппы H_2 группы $U(2,K,M\cap K)$ по теореме 3 существует точная форменная D-сеть (τ,B) второго порядка над форменным кольцом $(K,M\cap K)$, для которой

$U(\tau, B) \leqslant H_2 \leqslant N_U(\tau, B)$. По теореме 4 из [10] вхождение трансвекций $T_{1,-1}(\alpha\beta)$ и $T_{-1,1}(1)$ в нормализатор означает, что $\alpha\beta \in B_1$ и $1 \in B_{-1}$. Поскольку (τ, B) – форменная сеть, имеем $\alpha\beta \cdot 1 \cdot \alpha\beta \in B_1$. Отсюда $T_{1,-1}(\alpha\beta\alpha\beta) \in H_1$ и $f^{-1}T_{1,-1}(\alpha\beta\alpha\beta)f = T_{1,-1}(\alpha\beta\alpha) \in \Gamma_1$, то есть $\alpha\beta\alpha \in \Gamma_1$. Условие $\beta\alpha\beta \in \Gamma_{-1}$ проверяется аналогично. Таким образом, (σ, Γ) – форменная D-сеть. Вполне очевидно, что она и только она удовлетворяет всем описанным в формулировке леммы условиям. □

Из-за единственности точную форменную D-сеть (σ, Γ), построенную в доказательстве теоремы 4, мы будем далее называть *форменной сетью, ассоциированной с данной наддиагональной подгруппой.* Далее мы покажем, что при любой степени унитарной гиперболической группы для любой ее наддиагональной подгруппы можно говорить об ассоциированной с этой подгруппой точной форменной D-сети.

6. Форменная сеть, ассоциированная с наддиагональной подгруппой

Пусть R – некоммутативное тело, (R, Λ) – форменное кольцо над R. Фиксируем произвольную наддиагональную подгруппу H унитарной группы ($\Delta(2n, R, \Lambda) \leqslant H \leqslant U(2n, R, \Lambda)$) и для любых индексов из множества Ω положим

$$\Gamma_i = \{\alpha \in \Lambda_i \mid T_{i,-i}(\alpha) \in H\},\ \sigma_{i,-i} = \langle \Gamma_i \rangle,\ \sigma_{i,i} = R$$

и

$$\sigma_{ij} = \{\alpha \in R \mid T_{ij}(\alpha) \in H\} \quad \text{при} \quad i \neq \pm j.$$

Следующее утверждение, частный случай которого при $n = 1$ доказан в теореме 4, является переносом на некоммутативный случай леммы 1 из [10].

Лемма 5. *Для приведенных выше матрицы $\sigma = (\sigma_{ij})$ и набора $\Gamma = (\Gamma_i)$ пара (σ, Γ) является точной форменной D-сетью порядка $2n$ над (R, Λ) и $U(\sigma, \Gamma) \leqslant H$. Если (τ, B) – другая точная форменная сеть, для которой $U(\tau, B) \leqslant H$, то $\tau_{ij} \leqslant \sigma_{ij}$ и $B_i \leqslant \Gamma_i$ при любых индексах.*

Доказательство. Мы не будем приводить подробных рассуждений (они почти дословно повторяют доказательство леммы 1 из [10]), а отметим только ключевые моменты. Как и в процессе доказательства теоремы 4, форменное кольцо можно считать нормализованным. Сначала следует проверить, что σ – сеть идеалов. Здесь некоторые сложности имеются только с включениями $\sigma_{i,-i}\sigma_{-i,j} \leqslant \sigma_{ij}$ и $\sigma_{ij}\sigma_{j,-j} \leqslant \sigma_{i,-j}$ при $i \neq \pm j$. Для проверки первого включения (второе проверяется аналогично) достаточно показать, что при ненулевых Γ_i и $\sigma_{-i,j}$ идеал σ_{ij} равен R. Если $\operatorname{char} R \neq 2$, то для этого достаточно при ненулевом $\alpha \in \Gamma_i$ взять коммутаторы $[T_{i,-i}(\alpha), T_{-i,j}(1)]$ и $[[T_{i,-i}(\alpha), T_{-i,j}(1)], T_{-i,j}(1)]$. В случае $\operatorname{char} R = 2$ для $\theta \in R^*$ рассматриваем матрицы $a(\theta) = [T_{i,-i}(\theta\alpha\overline{\theta}), T_{-i,k}(\overline{\theta}^{-1})]$ и используем равенство $a(\theta_1)a(\theta_2) = T_{ij}((\theta_1 + \theta_2)\alpha)$.

Из остальных утверждений нашей леммы в доказательстве нуждается только включение $\alpha\beta\alpha \in \Gamma_i$ при ненулевых $\alpha \in \Gamma_i$ и $\beta \in \Gamma_{-i}$. Для этого в [10] мы использовали редукцию к случаю $n = 1$. Мы рассматривали подгруппу H_i группы H, состоящую их тех матриц a, все внедиагональные элементы a_{kl} которых равны 0 при $(k,l) \neq (i,-i), (-i,i)$. Затем мы брали гомоморфизм $H_i \to U(2, R, \Lambda^M)$, сопоставляющий матрице a матрицу второго порядка

$$a^{(i)} = \begin{pmatrix} a_{ii} & a_{i,-i} \\ a_{-i,i} & a_{-i,-i} \end{pmatrix}.$$

Если F_i – образ H_i относительно указанного гомоморфизма, то в [10] для получения нужного включения мы использовали предложение 3 из [23]. Все эти рассуждения для некоммутативного тела можно буквально повторить, но вместо предложения 3 из [23] сослаться на уже доказанную нами теорему 4. □

Далее, естественно, нам предстоит доказать, что если H – наддиагональная подгруппа группы $U(2n, R, \Lambda)$ и (σ, Γ) – ассоциированная с группой H в силу леммы 5 точная форменная D-сеть, то каждая матрица из H нормализует форменную сетевую подгруппу $U(\sigma, \Gamma)$. Для этого по теореме 1 следует проверить, что группа H содержит достаточно много унитарных трансвекций. Поскольку скэйлинг форменного кольца означает сопряжение матрицы при помощи некоторой диагональной, везде далее форменное кольцо мы можем считать нормализованным.

7. Извлечение трансвекций в группе $U(2n,R,\Lambda)$ при наличии в матрице нулевого элемента

Везде в этой части работы R – некоммутативное тело с инволюцией, (R,Λ) – нормализованное форменное кольцо над R, $n \geqslant 2$, H – фиксированная наддиагональная подгруппа $U(2n,R,\Lambda)$, (σ,Γ)–ассоциированная с H точная форменная D-сеть.

Как в [1, 9, 10], мы начнем с проверки части условий теоремы 1 для достаточно простых матриц – таких, у которых в некоторой строке почти все элементы равны 0.

Лемма 6. *Если для матрицы $a \in H$ найдется такой индекс r, что $a_{rk}=0$ при всех $k \neq r$, то $a_{ir} \in \sigma_{ir}$ при любых $i \neq \pm r$ и $S_{-r,r}(a^{-1}) \in \Gamma_{-r}$.*

Доказательство. Сразу отметим, что в условиях нашей леммы $a'_{rk}=0$ при всех $k \neq r$, то есть из всех элементов $(-r)$-ого столбца матрицы a ненулевым является только $a_{-r,-r}$. Сначала покажем, что $a_{ir} \in \sigma_{ir}$ при любых $i \neq \pm r$. Разобьем доказательство на несколько частей.

Пусть сначала равны 0 все внедиагональные элементы, кроме $a_{-r,r}$, a_{kr} и $a_{-r,-k}$ для некоторого $k \neq \pm r$; все диагональные элементы можно считать равными 1. Возьмем в R элемент θ, отличный от 0 и 1. Легко подсчитать, что ненулевыми внедиагональными элементами матрицы $b = ad_k(\theta)a^{-1}$ могут быть только $b_{kr} = (1-\theta)a_{kr}$ и $b_{-r,-k}$. Понятно, что при умножении на подходящую диагональную унитарную матрицу b превращается в унитарную трансвекцию $T_{kr}(\alpha a_{kr})$ при ненулевом α. Отсюда следует $a_{kr} \in \sigma_{kr}$; включения $a_{ir} \in \sigma_{ir}$ при $i \neq k, \pm r$ тривиальны.

Теперь пусть нулю равны все внедиагональные элементы, кроме пяти:

$$a_{kr},\ a_{-r,-k},\ a_{-k,r},\ a_{-r,k} \ \text{ и } \ a_{-r,r}$$

($k \neq \pm r$ – фиксированный индекс). Вновь считаем единичными все диагональные элементы. Из всех доказываемых включений нетривиальными являются только два – $a_{kr} \in \sigma_{kr}$ и $a_{-k,r} \in \sigma_{-k,r}$; достаточно проверить первое из них, поскольку k и $-k$ равноправны. Заменяя при необходимости a на $d_k^{-1}(a_{kr})ad_k(a_{kr})$, можно считать $a_{kr}=1$. При обратимом θ будем рассматривать матрицы $b = b(\theta) = ad_k(\theta)d_r(\overline{\theta}^{-1})a^{-1}$. Легко подсчитать, что, как и матрица a, матрица b имеет не более пяти ненулевых внедиагональных элементов, причем $b_{kr} = \overline{\theta}^{-1} - \theta$ и $b_{-k,r} = a_{-k,r}\overline{\theta}^{-1} - \overline{\theta}^{-1}a_{-k,r}$. Если $\theta \in \zeta_R(a_{-r,k})$, то $b_{-k,r} = b_{-r,k} = 0$; остается заметить, что для всех ненулевых элементов указанного централизатора равенство $\theta\overline{\theta} = 1$ невозможно (см. [21, 6.1.A]), поэтому наше утверждение следует из предыдущей части доказательства.

Предположим теперь, что ненулевые внедиагональные элементы матрицы a стоят только в ее $(-r)$-ой строке и r-ом столбце и для некоторого $k \neq \pm r$ имеем $a_{kr} \neq 0$. При обратимом $\theta \in R$ рассмотрим матрицу $b = ad_k(\theta)a^{-1}$. Легко заметить, что эта матрица удовлетворяет условиям предыдущего пункта и $b_{kr} = a_{kr}(\theta - 1)a'_{rr}$.

Пусть, наконец, a – любая матрица, удовлетворяющая условиям леммы. Для $\theta \in R^*$ рассматриваем матрицу $b = ad_r(\theta)a^{-1}$ – ее ненулевые внедиагональные элементы стоят только в $(-r)$-ой строке и r-ом столбце и $b_{kr} = a_{kr}(\theta - 1)a'_{rr}$ при $k \neq \pm r$, поэтому можно сослаться на предыдущую часть доказательства.

Доказательство $S_{-r,r}(a^{-1}) \in \Gamma_{-r}$ проведем в 3 шага. Сначала предположим, что $a_{ir} = 0$ при всех $i \neq \pm r$; тогда $a_{-r,i} = 0$ для таких i и $S_{-r,r}(a^{-1}) = \pm a'_{-r,r}a_{rr}$. При $\theta \in R^*$ рассмотрим матрицу $b = ad_r(\theta)a^{-1}$ – при $i \neq \pm r$ ее диагональные элементы равны 1, а из внедиагональных нетривиальным может быть только $b_{-r,r} = a_{-r,r}(\theta - 1)a'_{rr} + a_{-r,-r}(\overline{\theta}^{-1} - 1)a'_{-r,r}$. Это значит, что $d_r(b_{rr}^{-1})b = T_{-r,r}(\alpha)$ при $\alpha = b'_{-r,-r}b_{-r,r}$. В нашей ситуации $\beta = a'_{-r,r}a_{rr} \in R^0$, поэтому подтело $R_1 = \zeta_R(\beta)$ инвариантно относительно инволюции. Если брать $\theta \in R_1^0$, то $\alpha = \overline{a}_{rr}^{-1}(1 - \theta^2)a'_{-r,r}$, откуда получаем $(\theta^2 - 1)a'_{-r,r}a_{rr} \in \Gamma_{-r}$. Из такого включения легко получить то, что нам нужно: при $\operatorname{char} R \neq 2$ берем $\theta \neq 0, \pm 1$ и тогда $\theta S_{-r,r}(a^{-1})\theta \in \Gamma_{-r}$; в случае $\operatorname{char} R = 2$ достаточно вспомнить, что $\theta^2 - 1 = (\theta - 1)^2$.

Теперь покажем, что $a'_{-r,r}a_{-r,r} \in \Gamma_{-r}$, если матрица a удовлетворяет условию леммы. Мы уже доказали, что группе H принадлежит матрица

$$b = \prod_{i \neq \pm r} T_{ir}(-a_{ir}a_{rr}^{-1})a.$$

Ее r-ый столбец и $(-r)$-ая строка состоят почти сплошь из нулей, поэтому $S_{-r,r}(b^{-1}) = \pm b'_{-r,r}b_{rr} \in \Gamma_{-r}$, что и доказывает наше включение.

Теперь для матрицы a, удовлетворяющей условию леммы, положим

$$c = \prod_{\substack{i\neq\pm r\\ \varepsilon(i)=\varepsilon(r)}} T_{ir}(-a_{ir}a_{rr}^{-1})a.$$

Из предыдущего рассуждения имеем $c'_{-r,-r}c_{-r,r} \in \Gamma_{-r}$. Остается подсчитать, что

$$c'_{-r,-r}c_{-r,r} = \pm S_{-r,r}(a^{-1}).\square$$

Прежде чем переходить к следующей лемме об извлечении трансвекций, установим простой факт, касающийся разрешимости в некоммутативном теле одного специфического уравнения.

Лемма 7. *Если для матрицы $a \in U(2n, R, \Lambda)$ при некоторых индексах r и k элементы $a_{r,\pm k}$ отличны от 0, то для существования в теле R элемента $\theta \neq 0, 1$, удовлетворяющего условию*

$$a_{rk}(\theta-1)a'_{k,-r} + a_{r,-k}(\overline{\theta}^{-1}-1)a'_{-k,-r} = 0, \tag{2}$$

необходимо и достаточно, чтобы произведение $a_{rk}^{-1}a_{r,-k}$ принадлежало $\mathrm{Tr}\,(R)$. При выполнении этого условия уравнение (2) имеет в теле R бесконечно много решений.

Доказательство. Положим $a_{rk}^{-1}a_{r,-k} = \alpha$. Тогда уравнение (2) можно записать в виде

$$\theta - 1 = \alpha(\overline{\theta}^{-1}-1)\overline{\alpha}^{-1}. \tag{3}$$

После применения инволюции получаем

$$\overline{\theta} - 1 = \alpha^{-1}(\theta^{-1}-1)\overline{\alpha}.$$

Из этих двух равенств следует, что

$$\theta - 1 = (1-\theta^{-1})\overline{\alpha}\overline{\theta}^{-1}\overline{\alpha}^{-1},$$

а это из-за $\theta \neq 1$ эквивалентно соотношению

$$\theta\alpha\overline{\theta} = \alpha. \tag{4}$$

Заметим, что одновременно (3) и (4) могут выполняться только при $\alpha \in R^0$, причем в этом случае уравнения (3) и (4) эквивалентны. Если ввести новую инволюцию $\widetilde{\ }$, равенством $\widetilde{\omega} = \alpha\overline{\omega}\alpha^{-1}$, то уравнение (4) превращается в условие $\theta\widetilde{\theta} = 1$. Остается вспомнить, что относительно новой инволюции группа $\mathcal{U}(R)$ конечна только в том случае, когда характеристика тела равна 2, инволюция тривиальна на центре и имеет ортогональный тип (лемма 2), то есть при $\alpha \notin \mathrm{Tr}(R)$. □

Следующая лемма посвящена матрицам, содержащим хотя бы один нулевой элемент. Она аналогична лемме 6 из [9] и лемме 4 из [10].

Лемма 8. *Предположим, что для матрицы $a \in H$ при некоторой паре индексов r и k имеем $a_{rk} = 0$. Тогда*

1) *$a_{ik}a'_{kr}$, и $a_{i,-k}a'_{-k,r}$ принадлежат σ_{ir} для всех $i \neq \pm r$;*
2) *$a_{-r,k}S_{k,-k}(a^{-1})a'_{-k,r}$, и $a_{-r,-k}S_{-k,k}(a^{-1})a'_{kr}$ принадлежат Γ_{-r}.*

Доказательство. Полагая $b(\theta) = ad_{-k}(\theta)a^{-1}$, рассмотрим для обратимых $\theta, \eta, \chi \in R$ матрицу

$$c = c(\theta, \eta, \chi) = b(\theta)d_r(\chi)b(\eta^{-1}).$$

Из-за очевидного равенства $b_{r,-r}(\theta) = 0$ при всех $\theta \in R^*$ для каждого $j \neq r$ имеем

$$c_{rj} = b_{rj}(\theta\eta^{-1}) + b_{rr}(\theta)(\chi - 1)b_{rj}(\eta^{-1}) =$$
$$= (a_{r,-k}(\theta\eta^{-1} - 1) + (1 + a_{r,-k}(\theta - 1)a'_{-k,r})(\chi - 1)a_{r,-k}(\eta^{-1} - 1))a'_{-k,j}.$$

Если нам удастся подобрать θ, η, χ так, что коэффициент при $a'_{-k,j}$ окажется равным нулю, то к матрице c для такой тройки может быть применена лемма 6. Легко подсчитать, что в таком случае наши три параметра должны быть связаны соотношением

$$\begin{aligned}(1 + a_{r,-k}(\theta - 1)a'_{-k,r})\chi a_{r,-k}(\eta^{-1} - 1) =\\ = a_{r,-k}(\theta - 1)(a'_{-k,r}a_{r,-k}(\eta^{-1} - 1) - \eta^{-1}).\end{aligned} \tag{5}$$

К сожалению, в общей ситуации элементы c_{ir} матрицы c весьма сложно связаны с интересующими нас произведениями $a_{ik}a'_{kr}$ и $a_{i,-k}a'_{-k,r}$, поэтому мы разобьем доказательство на несколько частей и будем использовать лемму 6 в связи с матрицей c только для некоторых достаточно простых в вычислительном плане случаев. Нам удобны будут при этом обозначения

$$\mu = a'_{-k,r}a_{r,-k} \quad \text{и} \quad \nu = a'_{kr}a_{r,-k}.$$

1) Начнем с рассмотрения частного случая $\mu = 1$. Выберем различные θ и η так, чтобы они были отличными от 0 и 1. В нашей ситуации соотношение (5) эививалентно равенству

$$\chi = a_{r,-k}(\theta^{-1}-1)(\eta^{-1}-1)^{-1}a'_{-k,r},$$

причем $\chi \neq 0, 1$. По лемме 6 при каждом $i \neq \pm r$

$$c_{ir} = a_{ik}(\overline{\theta}^{-1} - \overline{\eta}^{-1})a'_{kr} + a_{i,-k}(\theta + \theta^{-1} - \eta - \eta^{-1})(\eta - 1)^{-1}a'_{-k,r} +$$

$$+ a_{ik}((\overline{\theta}^{-1} - 1)\nu(\theta^{-1} - \eta^{-1}) - (\overline{\eta}^{-1} - \overline{\theta}^{-1})\overline{\nu})(\eta - 1)^{-1}a'_{-k,r} \in \sigma_{ir}. \quad (6)$$

Фиксируем i и заметим, что включение $a_{i,-k}a'_{-k,r} \in \sigma_{ir}$ очевидно при $a_{ik}a'_{kr} = 0$ (для произвольного θ достаточно выбрать $\eta \in \zeta_R(\theta)$ так, чтобы $\eta \neq 0, 1, \theta, \theta^{-1}$), поэтому дальше произведение $a_{ik}a'_{kr}$ мы считаем ненулевым (отметим, что в этой ситуации $\nu \neq 0$). Предположим, что утверждение леммы для данного i неверно и $\sigma_{ir} = 0$; тогда при $\theta \neq 0, 1$ и $\eta = \theta^{-1}$ из (6) имеем

$$(\nu + \overline{\nu})\theta - \overline{\theta}(\nu + \overline{\nu}) = \overline{\theta}\nu\theta - \nu.$$

Нетрудно заметить, что при $R_1 = \zeta_R(\nu + \overline{\nu})$ для всех ненулевых элементов $\theta \in R_1^0$ оказывается выполненным тождество $\theta\nu\theta = \nu$. Понятно, что из такого тождества следует $\theta\nu + \nu\theta + \nu = 0$ при всех $\theta \neq 0, -1$ из R_1^0, откуда легко получается противоречие с $\nu \neq 0$: достаточно взять θ_1 и θ_2 так, чтобы $\theta_2 \neq \theta_1, \theta_1 - 1$. Тем самым первая часть леммы в рассматриваемом случае доказана.

При доказательстве второй части леммы сначала предположим, что $\sigma_{-r,r} = 0$. В этой ситуации первое из доказываемых включений тривиально, а второе можно переписать в виде $a_{-r,k}\nu a'_{-k,r} = 0$. Допустим, что $\nu \neq 0$. Даваемое в нашем случае леммой 6 включение $S_{-r,r}(c^{-1}) \in \Gamma_{-r}$ означает, что $c_{-r,r} = 0$; это условие при $\eta = \theta^{-1}$ с помощью несложных, но довольно длинных вычислений можно преобразовать в равенство

$$(\overline{\theta} + 1)\overline{\nu}(1 - \theta) = (\overline{\theta} - 1)\nu(1 + \theta), \quad (7)$$

справедливое для всех θ. Легко показать, что такое тождество возможно лишь при $\nu + \overline{\nu} = 0$ – для этого достаточно θ заменить на $\theta + 1$. Заметим также, что наша ситуация может возникнуть только при $\operatorname{char} R = 2$ и $\nu \in R^0$: для $\theta \in \zeta_R(\nu) = R_2$ равенство (7) означает $2(\theta - \overline{\theta})\nu = 0$ и потому при $\operatorname{char} R \neq 2$ инволюция на теле R_2 оказалась бы тривиальной, хотя сам ν – элемент этого тела, меняющийся при инволюции. Для получения противоречия в оставшемся случае достаточно взять $\theta \in R_2^0$ и рассмотреть равенство $c_{-r,r} = 0$ при $\eta \neq \theta, \theta^{-1}$, принадлежащем $\zeta_{R_2}(\theta)^0$.

Дальше мы считаем $\sigma_{-r,r} = R$ – это означает, что достаточно рассмотреть случай $\operatorname{char} R = 2$. Используя лемму 1, несложно проверить, что

$$S_{-r,r}(c^{-1}) \equiv$$
$$\equiv S_{-r,r}(b(\eta\theta^{-1})) + b_{-r,r}(\eta)(\chi^{-1} - 1)S_{r,-r}(b(\theta^{-1}))(\overline{\chi}^{-1} - 1)b_{-r,r}(\eta^{-1}) +$$
$$+ b_{-r,-r}(\eta)(\overline{\chi} - 1)S_{-r,r}(b(\theta^{-1}))(\chi - 1)b_{rr}(\eta^{-1}) \pmod{\Lambda^m}.$$

Проводя в правой части полученного сравнения некоторые преобразования и учитывая лемму 6, заключаем, что при

$$\alpha = \overline{\nu}(\theta^{-1} - \eta^{-1}) + (\overline{\eta} - 1)^{-1}(\overline{\theta}^{-1} - \overline{\eta}^{-1})\overline{\nu}(\theta^{-1} - 1) + (\overline{\eta}^{-1} - 1)\nu(\theta^{-1} - \eta^{-1})$$

и

$$\beta = (\overline{\eta} - 1)^{-1}(\overline{\theta} + \overline{\theta}^{-1} - \overline{\eta} - \overline{\eta}^{-1})$$

для всех допустимых θ и η имеем

$$\alpha S_{k,-k}(a^{-1})\overline{\alpha} + \beta S_{-k,k}(a^{-1})\overline{\beta} \in \Gamma_{-r}.$$

Второе утверждение нашей леммы поэтому совершенно очевидно при $a_{-r,-k} = 0$ и дальше мы считаем $\nu \neq 0$. При $\eta = \theta^{-1}$ имеем $\beta = 0$ и

$$\alpha = (\overline{\nu}\theta + \overline{\theta}\overline{\nu} + (\overline{\theta} - 1)\nu(\theta - 1))(\theta^{-1} - 1);$$

для окончания доказательства остается установить, что $\alpha \neq 0$ для некоторого допустимого θ. Если бы это было не так, то для всех $\theta \neq 0, 1$ мы имели бы тождество $\overline{\theta}\nu + \nu\theta + \nu = 0$, а оно противоречит условию $\nu \neq 0$.

2) Рассмотрим теперь ситуацию, когда $\mu = 0$. Понятно, что $b_{r,-r}(\theta) = 0$ и $b_{rr}(\theta) = 1$ при любом обратимом θ. Матрица $b(\theta)$ удовлетворяет условию предыдущего пункта и поэтому для каждого $i \neq \pm r$ и любого $\theta \in R^*$ имеем

$$a_{ik}(\theta - 1)a'_{kr} + a_{i,-k}(\overline{\theta}^{-1} - 1)a'_{-k,r} \in \sigma_{ir}.$$

Если оба произведения $a_{ik}a'_{kr}$ и $a_{i,-k}a'_{-k,r}$ обратимы (иначе первое утверждение нашей леммы тривиально), но $\sigma_{ir} = 0$, то для всех обратимых $\theta \neq 0,1$ из $R_1 = \zeta_R(a'_{kr}(a'_{-k,r})^{-1})$ произведение $(\theta-1)^{-1}(\overline{\theta}^{-1}-1)$ постоянно, из чего легко следует тождество $\theta\overline{\theta}=1$ в R_1^*, а это противоречит бесконечности R_1. Первое утверждение леммы доказано. При $\Gamma_{-r}=0$ оба включения из второго утверждения тривиальны; при $\Gamma_{-r}\neq 0$ и $\operatorname{char} R = 2$ оставшиеся включения следуют из рассмотрения условия $S_{-r,r}(b(\theta)) \in \Gamma_{-r}$.

3) Разумеется, везде далее в доказательстве леммы мы будем считать, что $\mu \neq 0,1$. Разберемся теперь с $\nu = 0$, то есть предположим, что $a'_{kr}=0$. Выберем $\theta \neq \eta$ отличными от 0,1 и $1-\mu^{-1}$ и найдем χ из уравнения (5) – легко понять, что это уравнение разрешимо, а ограничения на θ и η означают, что $\chi \neq 0,1$. Как уже говорилось в самом начале, для таких значений θ,η,χ матрица c удовлетворяет условию леммы 6. Легко подсчитать, что если $i \neq \pm r$ и $a_{i,-k}\neq 0$, то $c_{ir}\neq 0$ при $\theta \in \zeta_R(\mu)=R_1$ и $\eta \in \zeta_{R_1}(\theta)$, удовлетворяющем дополнительному ограничению $\eta \neq \theta^{-1}$. Этим доказана первая часть леммы. Вторая часть устанавливается так же, как и в случае $\mu = 1$.

Везде далее в доказательстве мы полагаем $\nu \neq 0$.

4) Предположим дополнительно, что $2\mu \neq 1$ и $(\nu+\overline{\nu})\mu \neq \nu$. Легко подсчитать, что при $\theta = 1-\mu^{-1}$ справедливо равенство $b_{rr}(\theta)=0$. Матрица $b = b(1-\mu^{-1})$ удовлетворяет поэтому условию второй части доказательства ($\mu' = b'_{-r,r}b_{r,-r}=0$). Для получения всех включений леммы в рассматриваемом случае достаточно воспользоваться обратимостью b'_{rr} и $b'_{-r,r}$, следующей из неравенств для μ и ν.

5) Пусть теперь в дополнение к условиям $\mu \neq 0,1$ и $2\mu \neq 1$ выполняется также равенство $(\nu+\overline{\nu})\mu = \nu$. Покажем, что тогда для некоторого $\theta \in R^*$ произведения $\mu(\theta) = b'_{rr}(\theta)b_{rr}(\theta)$ и $\nu(\theta) = b'_{-r,r}(\theta)b_{rr}(\theta)$ отличны от 0, причем $\mu(\theta)\neq 1$, $2\mu(\theta)\neq 1$ и

$$(\nu(\theta)+\overline{\nu(\theta)})\mu(\theta) \neq \nu(\theta)$$

(поскольку $b_{r,-r}(\theta)=0$ при всех $\theta \in R^*$, это будет означать, что для выбранного θ матрица $b(\theta)$ удовлетворяет условиям предыдущего пункта доказательства, из чего легко следует утверждение леммы).

Неравенства $\mu(\theta)\neq 0,1$ обеспечить просто – достаточно брать $\theta \neq 1, (1-\mu^{-1})^{\pm 1}$. Чуть сложнее дело обстоит с ограничением $2\mu(\theta)\neq 1$. Для $\theta \in \zeta_R(\mu) = R_1$ условие $2\mu(\theta)=1$ эквивалентно квадратному уравнению

$$\theta^2 + x\theta + 1 = 0,$$

где x – легко вычисляемый элемент центра R_1. Если в R_1 такое уравнение разрешимо и θ_1 – один из его корней, то в $R_2 = \zeta_{R_1}(\theta_1)$ это уравнение имеет не более двух корней θ_1 и θ_1^{-1}. Таким образом, в некотором бесконечном подтеле R_2 тела R_1 найдется бесконечно много θ, для которых $\mu(\theta) \neq 0, 1$ и $2\mu(\theta) \neq 1$. Предположим далее, что для всякого допустимого $\theta \in R_2$ имеем $(\nu(\theta) + \overline{\nu(\theta)})\mu(\theta) = \nu(\theta)$. По лемме 7 тогда

$$b_{-r,r}(\theta)b'_{rr}(\theta) + b_{-r,-r}(\theta)b'_{-r,r}(\theta) = 0.$$

Из-за $\theta\mu = \mu\theta$ это условие можно переписать в виде

$$a_{-r,k}(\overline{\theta}^{-1} - 1)(\overline{\theta} - 1)(\overline{\mu} - 1)a'_{kr} + a_{-r,-k}(\theta - 1)(\theta^{-1} - 1)(\mu - 1)a'_{-k,r} +$$

$$+ a_{-r,k}(\overline{\theta}^{-1} - 1)(\nu - \overline{\nu})(\theta^{-1} - 1)a'_{-k,r} = 0.$$

Заметив, что для каждого допустимого θ элемент θ^{-1} также допустим, приходим к равенству

$$\overline{\theta}(\nu - \overline{\nu})\theta = (\nu - \overline{\nu}). \tag{8}$$

На допустимые элементы $\theta \in R_2$ у нас имеется конечное число ограничений, поэтому θ можно выбрать так, чтобы допустимым был также $\theta + 1$, а это означает, что из (8) следует равенство

$$(\nu - \overline{\nu})\theta + \overline{\theta}(\nu - \overline{\nu}) + \nu - \overline{\nu} = 0. \tag{9}$$

Вновь воспользуемся бесконечностью R_2 и выберем $\eta \in R_2$ так, чтобы допустимыми были η, $\eta + 1$, $\theta + \eta$ и $\theta + \eta + 1$. Понятно, что, заменяя θ в (9) последовательно на η и $\theta + \eta$, получаем $\nu = \overline{\nu}$, что противоречит условию $2\mu \neq 1$ при $(\nu + \overline{\nu})\mu = \nu$.

6) Нам осталось доказать лемму в случае $2\mu = 1$ при $\operatorname{char} R \neq 2$, а для этого достаточно найти $\theta \in R^*$, для которого $\mu(\theta) \neq 0$, 1, $\frac{1}{2}$ и $\nu(\theta) \neq 0$ (обозначения для $\mu(\theta)$ и $\nu(\theta)$ такие же, как в предыдущем пункте). Понятно, что $\mu(\theta) \neq 0, 1$, если $\theta \neq \pm 1$. О неравенстве $\nu(\theta) \neq 0$ следует беспокоиться только при $a_{-r,k}a'_{kr} + a_{-r,-k}a'_{-k,r} = 0$: в этом случае можно рассмотреть инвариантное относительно инволюции подтело $R_1 = \zeta_R(a^{-1}_{-r,k}a_{-r,-k})$ и брать

$\theta \in R_1^0$. Наконец, условие $\mu(\theta) = \frac{1}{2}$ эквивалентно уравнению $\theta^2 + 1 = 0$: если это уравнение в R_1^0 имеет решение θ_1, то достаточно положить $R_2 = \zeta_{R_1}(\theta_1)$ и брать $\theta \in R_2^0$ так, чтобы $\theta \neq \pm\theta_1$. $\square$

Далее нам хотелось бы доказать, что если матрица a содержит хотя бы один нулевой элемент, то при всех индексах имеются включения

$$a_{il}a'_{lj} \in \sigma_{ij} \quad \text{для} \quad i \neq \pm j \quad \text{и} \quad a_{il}S_{l,-l}(a^{-1})a'_{-l,-i} \in \Gamma_i. \qquad (10)$$

Если $a_{rk} = 0$, то леммой 8 эти включения установлены только для $j = r$ и $l = \pm k$. Следующий шаг в наших рассуждениях – доказательство включений (10) для $j = -r$ и $l = \pm k$.

Лемма 9. *Если для матрицы $a \in H$ при некоторых индексах r и k имеем $a_{rk} = 0$, то $a_{ik}a'_{k,-r} \in \sigma_{i,-r}$ при всех $i \neq \pm r$ и $a_{r,-k}S_{-k,k}(a^{-1})a'_{k,-r} \in \Gamma_r$.*

Доказательство. Разумеется, все три элемента $a_{r,-k}$, $a_{-r,k}$ и $a_{-r,-k}$ можно считать ненулевыми. Пусть $i \neq \pm r$ и $a_{ik} \neq 0$. Если $a_{-i,-k} = 0$, то первое включение – непосредственное следствие леммы 8; при $a_{-i,-k} \neq 0$ воспользуемся очевидным равенством $\sigma_{ir} = R$ и выберем $\alpha \in R$ таким, что для матрицы $b = T_{ir}(\alpha)a$ выполняется равенство $b_{-r,-k} = 0$, – понятно, что наше первое включение следует из применения леммы 8 к матрице b. При доказательстве второго включения считаем $S_{-k,k}(a^{-1}) \neq 0$. Это значит, что для некоторого положительного $i \neq \pm r$ имеем $a'_{-k,i}a_{ik} \neq 0$, откуда следует $\sigma_{r,-r} = R$. Остается использовать даваемое леммой 8 включение $a_{-r,-k}S_{-k,k}(a^{-1})a'_{kr} \in \Gamma_{-r}$ и вспомнить, что $\beta\Gamma_{-r}\overline{\beta} \subseteq \Gamma_r$ для любого $\beta \in \sigma_{r,-r}$ по определению форменной сети. $\square$

8. Извлечение трансвекций в группе $U(4, R, \Lambda)$ при наличии в матрице нулевого элемента

В этой части работы мы продолжаем считать R некоммутативным телом с инволюцией, (R, Λ) – нормализованным форменным кольцом над R. Через H обозначена фиксированная наддиагональная подгруппа $U(4, R, \Lambda)$, а через (σ, Γ)– ассоциированная с H точная форменная D-сеть.

Этот раздел работы мы начнем с усиления лемм 8 и 9 и покажем, что если в матрице a на месте (r, k) стоит нулевой элемент, то включения (10) справедливы при $j = \pm r$ и любом индексе l.

Лемма 10. *Если для матрицы $a \in H$ при некоторых индексах r и k имеем $a_{rk} = 0$, то для любого индекса l*

1) $a_{il}a'_{lr} \in \sigma_{ir}$, *и* $a_{il}a'_{l,-r} \in \sigma_{i,-r}$ *при всех* $i \neq \pm r$;
2) $a_{rl}S_{l,-l}(a^{-1})a'_{-l,-r} \in \Gamma_r$ *и* $a_{-r,l}S_{l,-l}(a^{-1})a'_{-l,r} \in \Gamma_{-r}$.

Доказательство. Фиксируем индекс l и заметим, что в силу предыдущих лемм можно считать $l \neq \pm k$ и $a_{\pm r,\pm l} \neq 0$. В этой ситуации второе утверждение нашей леммы можно переформулировать так: $S_{l,-l}(a^{-1}) \in \Gamma_r \cap \Gamma_{-r}$. При доказательстве этого включения без дополнительных оговорок сумму $S_{l,-l}(a^{-1})$ мы будем считать ненулевой. Само доказательство разделим на несколько шагов.

1) Предположим вначале, что произведение $a_{r,-k}a'_{-k,r}$ отлично от 0. Заметим, что в таком случае ненулевыми являются произведения $a'_{lr}a_{r,-k}$ и $a'_{l,-r}a_{-r,k}$, а потому $\sigma_{lk} = \sigma_{l,-k}$ совпадают с R в силу двух предыдущих лемм ($a'_{-k,-r} = 0$).

Докажем включения первого пункта. Пусть $a_{il} \neq 0$ для некоторого $i \neq \pm r$. Рассмотрим матрицу $b = aT_{l,-k}(\alpha)$, выбрав $\alpha \in R^*$ так, чтобы элемент $b_{i,-k} = a_{i,-k} + a_{il}\alpha$ был ненулевым; тогда $b_{i,-k}b'_{-k,r} \in \sigma_{ir} = R$ из-за $b_{rk} = a_{rk} = 0$ и $b'_{-k,r} = a'_{-k,r} \neq 0$. Равенство $\sigma_{i,-r} = R$ следует из леммы 9 при ненулевом a_{ik}, поэтому будем считать $a_{ik} = 0$. Выберем $\beta \in R^*$ так, чтобы для матрицы $c = aT_{lk}(\beta)$ элемент $c_{-r,k}$ был нулевым; тогда $c_{ik}c'_{k,-r}$ принадлежит $\sigma_{i,-r}$, причем $c_{ik} = a_{il}\beta \neq 0$ и $c'_{k,-r} = a'_{k,-r} \neq 0$. Этим первая часть леммы доказана.

При доказательстве второй части леммы рассмотрим матрицу $b = aT_{k,-l}(\alpha)$, выбирая $\alpha \in R^*$ так, чтобы элемент $b_{-r,-l}$ был нулевым. Тогда в силу двух предыдущих лемм и обратимости элементов $a_{\pm r,l}$ пересечению $\Gamma_r \cap \Gamma_{-r}$ принадлежит сумма

$$S_{l,-l}(b^{-1}) = S_{l,-l}(a^{-1}) + S_{lk}(a^{-1})\alpha + \overline{S_{lk}(a^{-1})\alpha} \pm \overline{\alpha}S_{-k,k}(a^{-1})\alpha. \quad (11)$$

В силу леммы 9 последнее слагаемое наверняка принадлежит Γ_r из-за $a_{r,-k} \neq 0$. Этой же группе Γ_r принадлежит и сумма двух средних слагаемых в правой части (11): если $S_{lk}(a^{-1}) \neq 0$, то $a'_{lt}a_{tk} \neq 0$ для некоторого индекса $t \neq \pm r$, откуда в силу уже доказанных включений получаем $\sigma_{r,-r} = R$ и поэтому сумма наших двух слагаемых принадлежит Γ_r^m. Таким образом, сумма $S_{l,-l}(a^{-1})$ принадлежит Γ_r. Аналогично проверяется, что она содержится в Γ_{-r}, если элемент $a_{-r,-k}$ обратим. Поэтому дальше можно считать $a_{-r,-k}=0$. В этом случае искомое включение легко получается из рассмотрения матрицы $c=aT_{-k,-l}(\beta)$ при таком $\beta\in R^*$, что $c_{r,-l}=0$.

2) Докажем теперь наше утверждение, если $a_{r,-k}=0$, но произведение $a_{-r,k}a'_{kr}$ обратимо. Воспользуемся тем, что $a_{rp}a'_{pr}\neq 0$ для некоторого индекса p ($p\neq\pm k$). Если $a_{r,-p}=0$, то матрица a удовлетворяет условиям предыдущей части доказательства, поэтому элемент $a_{r,-p}$ считаем обратимым. Из-за $a'_{-k,-r}=0$ по лемме 8 имеем $a'_{-p,-r}a_{-r,-k}\in\sigma_{-p,-k}=R$, поэтому при любом $\alpha\in R^*$ группе H принадлежит матрица $b=aT_{kp}(\alpha)$, причем $b_{rk}=0$ и $b'_{-k,r}b_{r,-k}\neq 0$, то есть матрица b удовлетворяет условиям предыдущей части доказательства. Если $a_{il}\neq 0$ для некоторого $i\neq\pm r$, то, накладывая на α конечное число ограничений, можно сделать обратимыми b_{il}, b'_{lr} и $b'_{l,-r}$, откуда следует первое утверждение леммы. Для доказательства второго добавим к уже имеющимся ограничениям на α еще одно так, чтобы обратимым был $b_{-r,l}$. В этой ситуации $S_{l,-l}(b^{-1})\in\Gamma_r\cap\Gamma_{-r}$. Легко понять, что при $l\neq -p$ это означает включение $S_{l,-l}(a^{-1})\in\Gamma_r\cap\Gamma_{-r}$; случай $l=-p$ рассматривается так же, как в доказательстве второй части леммы в предыдущем пункте.

3) Пусть теперь $a_{-r,k}=0$, но $a'_{kr}a_{r,-k}\neq 0$. Из-за $a'_{-k,r}=0$ имеем $a'_{lr}a_{r,-k}\in\sigma_{l,-k}=R$ и $a'_{-l,r}a_{r,-k}\in\sigma_{-l,-k}=R$. При доказательстве первой части леммы можно считать, что для некоторого $i\neq\pm r$ все четыре элемента $a_{\pm i,\pm l}$ обратимы, но $a_{ik}=0$ (в противном случае утверждение следует из $a_{ik}a'_{kr}\in\sigma_{ir}$ и $a_{ik}a'_{k,-r}\in\sigma_{i,-r}$). Поскольку речь идет о группе степени 4, то в этой ситуации $a'_{k,-i}a_{-i,k}=1$. Рассматривая матрицу $b=aT_{kl}(\alpha)$ для такого $\alpha\in R^*$, что $b_{-i,l}=0$, получаем

$$b_{-r,-l}b'_{-l,-i}\in\sigma_{-r,-i}=R\quad\text{и}\quad b_{r,-l}b'_{-l,-i}\in\sigma_{r,-i}=R.$$

что и требуется.

При доказательстве второй части леммы фиксируем индекс p, для которого $a'_{kp}a_{pk}\neq 0$ ($p\neq\pm r$). Понятно, что тогда $\sigma_{pr}=\sigma_{p,-r}=R$. Заметим, что элемент $a_{-p,k}$ можно считать нулевым: в противном случае достаточно рассмотреть матрицу $c=T_{pr}(\beta)a$, выбрав $\beta\in R^*$ так, чтобы $c_{-r,l}$ был обратимым. Вновь вспомним о том, что речь идет о матрице степени 4: в этой ситуации a_{pk} оказывается единственным ненулевым элементом k-ого столбца, а $a_{-p,-k}$ – единственным ненулевым элементом $(-p)$-ой строки нашей матрицы; отсюда следует, что $S_{l,-l}(a^{-1}) = \pm a'_{lr}a_{r,-l}$. Из-за малого числа элементов в множестве индексов либо $p = \pm l$, либо $p = \pm k$. В первом случае, как легко подсчитать, единичным является хотя бы один из двух идеалов σ_{rp} или $\sigma_{-r,p}$; при $p = -k$ оба этих идеала равны R. Несложно показать, что при $\sigma_{rp} = R$ второе утверждение нашей леммы следует из рассмотрения матрицы $f = T_{rp}(\gamma)a$, а при $\sigma_{-r,p} = R$ – из рассмотрения $f = T_{-r,p}(\gamma)a$ (в обоих случаях γ подбирается так, чтобы для f выполнялись условия первой части доказательства). Поэтому дальше считаем $p = k$.

Применим достаточно стандартный прием, редуцирующий ситуацию к группе меньшей степени, и рассмотрим в связи с этим множество

$$H_1 = \{g \in H \mid g_{ik} = 0 \quad \text{для всех} \quad i \neq k\}.$$

Понятно, что H_1 – подгруппа H, содержащая $\Delta(4, R, \Lambda)$, и что $a \in H_1$. Для $g \in H_1$ обозначим через $\Psi(g)$ матрицу второго порядка, получающуюся из g вычеркиванием ее строк и столбцов с номерами $\pm k$. Легко проверить, что Ψ – эпиморфизм H_1 на подгруппу H_2 группы $U(2, R, \Lambda)$, содержащую $\Delta(2, R, \Lambda)$. По теореме 4 существует точная форменная D-сеть (τ, B) порядка 2, для которой $U(\tau, B) \leqslant H_2 \leqslant N_U(\tau, B)$. В силу теоремы 1 отсюда следует, что $S_{l,-l}(\Psi(a)^{-1}) \in B_1 \cap B_{-1}$, то есть для некоторых матриц $g_1, g_2 \in H_1$ имеем $\Psi(g_1) = T_{1,-1}(S_{l,-l}(a^{-1}))$ и $\Psi(g_2) = T_{-1,1}(S_{l,-l}(a^{-1}))$. Остается заметить, что каждая из матриц g_1 и g_2 удовлетворяет условиям первой части доказательства: $g_{r,-r}g_{-r,r} = 0$ и $g_{rr}g_{-r,-r} = 1$.

До сих пор мы предполагали, что в четверке $a_{\pm r,\pm k}$ имеется хотя бы два ненулевых элемента; предположим теперь, что ненулевой элемент есть только один. Заменяя при необходимости r на $-r$ или k на $-k$, можно считать, что $a_{rk} = a_{r,-k} = a_{-r,k} = 0$, но $a_{-r,-k} \neq 0$. В этом случае можно воспользоваться равенством $\sigma_{l,-k} = R$ (оно следует из применения к матрице a^{-1} леммы 8), заметив, что при очевидном конечном множестве ограничений на α матрица $aT_{l,-k}(\alpha)$ удовлетворяет условиям предыдущей части доказательства.

5) Пусть теперь нулевыми являются все элементы четверки $a_{\pm r,\pm k}$. Покажем, что в этом случае наша матрица a имеет еще не менее двух нулевых элементов.

Из-за равноправия r и $-r$ можно считать, что $\varepsilon(r) = \varepsilon(l)$. Обозначим через p отличный от r индекс, для которого $\varepsilon(p) = \varepsilon(l)$, и предположим, что $a_{pl} \neq 0$. Легко подобрать матрицу $d \in \Delta(4, R, \Lambda)$ так, чтобы для $f = da$ выполнялись равенства $f_{pl} = f_{rl} = 1$. Если $f_{r,-l} = \alpha$ и $f_{-r,l} = \beta$, то из унитарности f следует, что

$$f_{-r,l} = 1 + \beta\alpha \quad \text{и} \quad f_{p,-l} = \alpha,$$

а это противоречит равенству $\sum\limits_t f_{rt} f'_{tr} = 0$. Поэтому $a_{pl} = 0$; из $\sum\limits_t a_{pt} a'_{t,-r} = 0$ тогда следует, что элемент $a_{p,-l}$ – также нулевой.

Из того, что элементы a_{pl} и $a_{p,-l}$ равны 0, следует первое утверждение леммы; понятно также, что в таком случае

$$S_{l,-l}(a^{-1}) = \pm a'_{lr} a_{r,-l} = \pm a'_{l,-r} a_{-r,-l}.$$

Заметим, что если хотя бы один из элементов $a_{-p,\pm l}$ отличен от 0, то $\sigma_{-p,-r} = R$, а потому второе утверждение легко получить, рассматривая матрицу $c = T_{rp}(\gamma)a$ и подбирая γ так, чтобы для матрицы c выполнялись условия одного из предыдущих пунктов доказательства. Следовательно, дальше все элементы четверки $a_{\pm p,\pm l}$ можно считать нулевыми.

Понятно, что здесь нам снова придется использовать редукцию к группе меньшей степени. На этот раз в качестве H_1 возьмем подгруппу всех тех матриц из H, для которых в строках и столбцах с номерами $\pm p$ ненулевыми являются только диагональные элементы, в качестве гомоморфизма Ψ – вычеркивание строк и столбцов с номерами $\pm p$; через H_2 вновь обозначим $\Psi(H_1)$, а через (τ, B) – точную форменную D-сеть, ассоциированную с H_2. Нам достаточно показать, что $S_{l,-l}(a^{-1}) \in B_1 \cap B_2$. Для определенности индексы l, r и p будем считать положительными.

Легко понять, что подгруппа H_1 содержит все матрицы $b = b(\theta) = ad_l(\theta)a^{-1}$ для обратимых θ, поэтому группе B_1 принадлежат все произведения $b_{rr} b'_{rr} b_{r,-r} b'_{-r,-r}$ и $b_{r,-r} b'_{-r,r} b_{rr} b'_{r,-r}$. Из-за

$$b_{rr} b'_{rr} b_{r,-r} b'_{-r,-r} = (1 - b_{r,-r} b'_{-r,r}) b_{r,-r} b'_{-r,-r} =$$

$$= b_{r,-r} b'_{-r,-r} - b_{r,-r} b'_{-r,r} b_{r,-r} b'_{-r,-r} = b_{r,-r} b'_{-r,-r} + b_{r,-r} b'_{-r,r} b_{rr} b'_{r,-r}$$

оказывается, что $b_{r,-r} b'_{-r,-r} \in B_1$. Пусть $\nu = a_{rl}^{-1} a_{r,-l}$ и $R_1 = \zeta_R(\nu)$. Вследствие очевидного равенства $a_{rl} a'_{l,-r} + a_{r,-l} a'_{-l,-r} = 0$ элемент ν принадлежит R^0, поэтому R_1 – бесконечное тело, инвариантное относительно инволюции, а R_1^0 – бесконечная группа. Несложно подсчитать, что при $\theta \in R_1^0$ условие $b_{r,-r}b'_{-r,-r} \in B_1$ означает, что

$$a_{rl}(\theta - \theta^{-1})a'_{l,-r}a_{-r,-l}(\theta - \theta^{-1})a'_{-l,-r} \in B_1.$$

Выбирая $\theta \neq \pm 1$, получаем тогда $S_{l,-l}(a^{-1}) \in B_1$. Включение $S_{l,-l}(a^{-1}) \in B_2$ проверяется аналогично. □

Теперь мы готовы доказать включения (10) для произвольных индексов:

Лемма 11. *Если для матрицы $a \in H$ при некоторых индексах r и k имеем $a_{rk} = 0$, то для любого индекса l имеем*

1) $a_{il}a'_{lj} \in \sigma_{ij}$ *при всех* $i \neq \pm j$;
2) $a_{il}S_{l,-l}(a^{-1})a'_{-l,-i} \in \Gamma_i$ *при любых* i.

Доказательство. Первое утверждение является непосредственным следствие предыдущей леммы: если $i \neq \pm j$, то либо $i = \pm r$, либо $j = \pm r$. При доказательстве второго для $i \neq \pm r$ считаем ненулевыми $S_{l,-l}(a^{-1})$ и все элементы четверки $a_{\pm i,\pm l}$. Более того, в силу предыдущей леммы можно считать, что в строках с номерами $\pm i$ вообще нет нулей – иначе вновь можно сослаться на лемму 10. Поскольку в строках с номерами $\pm r$ ненулевые элементы наверняка есть, в силу предыдущих лемм для ассоциированной сети все идеалы $\sigma_{\pm i,\pm r}$ – единичные, а поскольку сеть унитарна и имеет порядок 4, то все идеалы сети совпадают с R. Фиксируем какой-нибудь индекс p, для которого $a_{rp} \neq 0$, положим $\alpha = -a_{ip}a_{rp}^{-1}$ и возьмем матрицу $c = T_{ir}(\alpha)a$. Тогда $c_{ip} = 0$ и поэтому $c_{il}S_{l,-l}(c^{-1})c'_{-l,-i} \in \Gamma_i$. Здесь $c_{il} = a_{il} + \alpha a_{rl}$, причем элемент a_{rl} можно считать нулевым: в противном случае утверждение следует из

$$a_{rl}S_{l,-l}(a^{-1})a'_{-l,-r} \in \Gamma_r \quad \text{и} \quad a_{il}a_{rl}^{-1} \in \sigma_{ir}.$$

Для окончания доказательства используем $S_{l,-l}(c^{-1}) \in \Gamma_i$ и $\sigma_{i,-i} = R$. □

Включения (10), как мы только что установили, выполнены для тех матриц из H, которые содержат хотя бы один нулевой элемент. Покажем теперь, что эти же включения справедливы и для произвольной матрицы из H, если эта подгруппа содержит какую-нибудь одну нетривиальную трансвекцию короткого типа.

Лемма 12. *Если $\sigma_{rk} = R$ при некоторых индексах $r \neq \pm k$, то для любой матрицы $a \in H$ и произвольного индекса l имеем*

1) $a_{il}a'_{lj} \in \sigma_{ij}$ *при всех* $i \neq \pm j$;
2) $a_{il}S_{l,-l}(a^{-1})a'_{-l,-i} \in \Gamma_i$ *при любых* i.

Доказательство. Все элементы матрицы a будем, конечно, считать ненулевыми. Покажем с использованием предыдущей леммы, что в этой ситуации все идеалы D-сети σ совпадают с R.

Рассмотрим матрицу $b = T_{rk}(\alpha)a$, выбрав α так, что $b_{rk} = 0$. Тогда для любого индекса l имеем $b_{kl}b'_{lr} = a_{kl}a'_{lr}$ и по предыдущей лемме $\sigma_{kr} = R$. Далее находим индексы l_1 и l_2, для которых b_{rl_1} и b_{-k,l_2} обратимы, то есть отличны от 0 произведения $b_{rl_1}b'_{l_1,-k}$ и $b_{-k,l_2}b'_{l_2r}$. Из этого следует $\sigma_{r,-k} = \sigma_{-k,r} = R$. Но тогда $\sigma_{ij} = R$ при всех $i \neq \pm j$ из-за унитарности σ. Остается заметить, что и стоящие на побочной диагонали идеалы совпадают с R из-за включения $\sigma_{ij}\sigma_{j,-i} \leqslant \sigma_{i,-i}$ в определении сети.

Из доказанного и определения форменной D-сети следует, что в нашей ситуации для всех индексов i форменные параметры Γ_i одинаковы. Поэтому для доказательства второго утверждения нашей леммы достаточно установить, что $S_{l,-l}(a^{-1})$ принадлежит какому-нибудь из них – например, Γ_k. Для этого достаточно применить к матрице b вторую часть леммы 11 и использовать равенство $\sigma_{k,-k} = R$. □

Из теоремы 3 и леммы 4 следует, что условие леммы 12 выполнены, например, в следующей ситуации, близкой к коммутативной

Лемма 13. *Если подгруппа H содержит матрицу a, все элементы которой отличны от 0 и принадлежат некоторому подполю, инвариантному относительно инволюции, то идеал σ_{rk} совпадает с R для некоторых индексов $r \neq \pm k$.*

В заключение этого раздела работы мы покажем, что для переноса теоремы 4 на случай группы четвертой степени остается проверить выполнение условия леммы 12.

Лемма 14. *Если выполнено одно из двух условий*

1) *каждая матрица из H содержит хотя бы один нулевой элемент или*

2) *$\sigma_{st} = R$ для некоторых индексов $s \neq \pm t$ и при этом подгруппа H содержит хотя бы одну матрицу, все элементы которой отличны от 0,*

то (σ, Γ) – единственная точная форменная D-сеть, удовлетворяющая условию

$$U(\sigma, \Gamma) \leqslant H \leqslant N_U(\sigma, \Gamma). \tag{12}$$

Доказательство. Включение $H \leqslant N_U(\sigma, \Gamma)$ означает, что для произвольной матрицы $a \in H$ выполнены нормализаторные условия теоремы 1. При $k = l$ для проверки первого условия этой теоремы достаточно показать, что если a содержит нулевой элемент и при некоторых индексах произведение $a_{ik}a'_{k,-i}$ отлично от 0, то $\sigma_{i,-i} = R$. Предположим, что $\sigma_{i,-i}$ равен 0. В лемме 11 мы доказали включение $a_{ik}S_{k,-k}(a^{-1})a'_{-k,-i} \in \Gamma_i$ – из него тогда следует $S_{k,-k}(a^{-1}) = 0$. В то же время, для каждого $p \neq \pm i$ имеем по той же лемме $a_{ik}a'_{kp} \in \sigma_{ip}$ и $a_{ik}a'_{k,-p} \in \sigma_{i,-p}$, причем $\sigma_{ip}\sigma_{i,-p} \in \sigma_{i,-i}$, а потому $a'_{kp}a_{p,-k} = 0$ для всех таких p. Но тогда $S_{k,-k}(a^{-1}) = \pm a'_{ki}a_{i,-k}$; значит $a'_{ki} = 0$. Рассматривая включения $a_{i,-k}S_{-k,k}(a^{-1})a'_{k,-i} \in \Gamma_i$, $a_{i,-k}a'_{-k,p} \in \sigma_{ip}$ и $a_{i,-k}a'_{-k,-p} \in \sigma_{i,-p}$, показываем аналогичным образом, что $a_{-i,k} = 0$. Далее используем соотношение $\sum\limits_m a'_{km}a_{mk} = 1$ и выберем индекс $m \neq \pm k$ так, чтобы $a'_{km}a_{mk} \neq 0$. Понятно, что желаемое противоречие следует из очевидных включений $a_{mk}a'_{k,-i} \in \sigma_{m,-i}$ и $a_{ik}a'_{km} \in \sigma_{im}$.

Для проверки первого условия теоремы 1 в случае $k \neq \pm l$ и $\sigma_{kl} = R$ достаточно рассмотреть матрицы $aT_{kl}(\alpha)$ при различных $\alpha \in R$. В случае $k = -l$ и $\sigma_{k,-k} = R$ форменный параметр Γ_k отличен от 0 и потому доказательство сводится к рассмотрению матриц $aT_{k,-k}(\beta)$ при различных $\beta \in \Gamma_k$. Второе условие $a_{ik}\Gamma_k a'_{-k,-i} \leqslant \Gamma_i$ теоремы 1 при $a_{i,-k} \neq 0$ нетрудно доказать применением вторых частей лемм 11 и 12 к матрицам $aT_{k,-k}(\beta)a^{-1}$ с $\beta \in \Gamma_k$; при $a_{i,-k} = 0$ матрицу a следует заменить произведением $aT_{k,-k}(\beta)$ с ненулевым $\beta \in \Gamma_k$.

Единственность точной форменной D-сети, удовлетворяющей условию (12), очевидна. □

Итак, далее нам остается показать, что если наддиагональная подгруппа содержит хотя бы одну матрицу, все элементы которой отличны от 0, то эта подгруппа содержит и какую-то нетривиальную трансвекцию короткого корневого типа.

9. Извлечение трансвекций с помощью матриц, подобных диагональным

По традиции работы с наддиагональными подгруппами в линейных группах теперь следует использовать тот факт, что вместе с матрицей a наша подгруппа содержит и все произведения ada^{-1} для диагональных матриц d.

В этом разделе мы продолжаем считать, что R – некоммутативное тело с инволюцией, (R,Λ) – нормализованное форменное кольцо над ним. Под H понимается фиксированная наддиагональная подгруппа группы $U(4,R,\Lambda)$, под a – фиксированная матрица из H, не содержащая нулевых элементов. Как и ранее, точную форменную D-сеть, ассоциированную с H, мы обозначаем (σ,Γ).

Идея использовать матрицы ada^{-1} связана, конечно, с тем, что некоторые из таких матриц имеют нулевые элементы, а это дает шанс на извлечение искомой трансвекции. В первую очередь в качестве матриц d мы будем брать простейшие диагональные матрицы $d_l(\theta)$ при обратимых θ. Фиксируем индекс l и положим

$$b(\theta)=ad_l(\theta)a^{-1}.$$

При этом, разумеется, возникает потребность в исследовании уравнений $b_{rk}(\theta)=0$, в частности, хорошо бы иметь необходимые и достаточные условия на коэффициенты, при которых такое уравнение имеет решение $\theta\neq 1$. Для $k=-r$ такие условия сформулированы в лемме 7. Для $k\neq\pm r$ частичный ответ на наш вопрос дает следующее утверждение.

Лемма 15. *Если для $k\neq\pm r$ выполнено условие*

$$a_{rl}a'_{lk}+a_{r,-l}a'_{-l,k}=0,$$

то уравнение $b_{rk}(\theta)=0$ имеет решение $\theta\neq 1$ тогда и только тогда, когда произведение $a_{rl}^{-1}a_{r,-l}$ либо не принадлежит R^0, либо содержится в $\mathrm{Tr}\,(R)$.

Доказательство. Положим $a_{rl}^{-1}a_{r,-l}=\alpha$; тогда в нашей ситуации уравнение $b_{rk}(\theta)=0$ можно переписать в виде

$$\theta\alpha\overline{\theta}=\alpha.$$

Из доказательства леммы 7 следует, что при $\alpha\in R^0$ такое уравнение имеет нетривиальное решение только в случае $\alpha\in\mathrm{Tr}\,(R)$.

Если же $\alpha \notin R^0$, то нетривиальным решением нашего уравнения является, очевидно, $\theta = \overline{\alpha}\alpha^{-1}$. □

К сожалению, для $k \neq \pm r$ мы не можем дать столь же простой ответ на вопрос о существовании нетривиального решения соответствующего уравнения при $a_{rl}a'_{lk} + a_{r,-l}a'_{-l,k} \neq 0$. Можно было бы привести пару известных нам достаточных условий нетривиальной разрешимости упомянутого уравнения, но одно из этих условий связано с коммутационным соотношением для коэффициентов, другое – с алгебраичностью коэффициентов над центром, поэтому эффективное использование такого рода условий представляется сомнительным. Еще более бесперспективным делом кажется исследование уравнения $b_{rr}(\theta) = 0$. Все это означает, что при использовании леммы 11 для матрицы $b(\theta)$ нам придется работать не с самими решениями, а с их призраками. Применять же получающиеся при этом факты можно будет в случае удачного стечения обстоятельств.

Предварим формулировку следующей леммы замечанием о применяемом в ней обозначении. Понимая определитель в смысле Дьедонне, мы будем называть

$$\Delta_{ij}^{kl}(a) = \begin{vmatrix} a_{ik} & a_{il} \\ a_{jk} & a_{jl} \end{vmatrix}$$

минором второго порядка матрицы a (в [4, 9, 10] такие миноры использовались для коммутативной ситуации). Напомним несколько тривиальных обстоятельств, которые далее будут использоваться. Во-первых, равенство $\Delta_{ij}^{kl}(a) = 0$ эквивалентно условию $a_{jk}a_{ik}^{-1} = a_{jl}a_{il}^{-1}$. Во-вторых, вследствие унитарности матрицы a условие $\Delta_{ij}^{kl}(a) = 0$ эквивалентно условию $\Delta_{-k,-l}^{-i,-j}(a^{-1}) = 0$. В-третьих, при $k \neq l$ из-за линейной независимости справа k-ого и l-ого столбцов нашей матрицы $\Delta_{ij}^{kl}(a) \neq 0$ для некоторой пары индексов $i \neq j$.

Лемма 16. *Пусть для некоторых индексов r и k уравнение $b_{rk}(\theta) = 0$ имеет решение $\theta \neq 1$ и пусть $i \neq \pm r$. Предположим также, что выполнено одно из следующих двух условий*

1) $k = -r$ *или*
2) *по крайней мере один из двух миноров $\Delta_{i,-i}^{l,-l}(a)$ или $\Delta_{r,-r}^{l,-l}(a)$ отличен от* 0.

Тогда H содержит нетривиальную трансвекцию короткого типа.

Доказательство. Предположим сначала, что $b_{r,-r}(\theta)=0$ для некоторого $\theta\neq 1$. Заметим, что по лемме 7 таких θ существует бесконечно много и для всех них

$$b_{rr}(\theta)=1+a_{rl}(\theta-1)\mu$$

при некотором μ, не зависящем от θ. Уравнение $b_{rr}(\theta)=0$ имеет, очевидно, не более одного решения, поэтому найдется такой $\theta\neq 1$, что $b_{r,-r}(\theta)=0$ и при этом $b_{rr}(\theta)b'_{rr}(\theta)\neq 0$. Легко понять, что для такого θ четверка элементов $b_{\pm i,\pm r}(\theta)$ не может состоять только из нулей – иначе все миноры $\Delta^{l,-l}_{mj}(a)$ при любых m и j были бы нулевыми. Поэтому наше утверждение является следствием леммы 11.

Пусть теперь $k\neq -r$ и уравнение $b_{j,-j}(\eta)=0$ имеет только тривиальное решение при любом индексе j. И в этом случае четверка элементов $b_{\pm i,\pm r}(\theta)$ не может состоять только из нулей – иначе оба упомянутых в условии минора были бы нулевыми. Поэтому мы опять можем сослаться на лемму 11. □

Конечно, ограничительное условие на миноры в лемме 16 является весьма неприятным. Позднее мы его снимем, но сначала с помощью только что доказанной леммы несколько ослабим условие леммы 13 и покажем, что подгруппа H содержит нетривиальную трансвекцию короткого типа, если в какой-нибудь ее матрице, не содержащей нулевых элементов, все элементы двух симметричных столбцов (или двух симметричных строк) принадлежат одному подполю, инвариантному относительно инволюции.

Лемма 17. *Предположим, что для некоторого индекса l все элементы l-ого и $(-l)$-ого столбцов матрицы a коммутируют друг с другом и со всеми элементами l-ой и $(-l)$-ой строк матрицы a^{-1}. Тогда H содержит нетривиальную короткую трансвекцию.*

Доказательство. Легко понять, что при выполнении указанного условия все элементы l-ого и $(-l)$-ого столбцов матрицы a содержатся в некотором инвариантном относительно инволюции подполе K, содержащем также и центр нашего тела R. По лемме 4 поле K можно считать бесконечным. Для любого $\theta\in K^*$ все элементы матрицы $b(\theta)$ принадлежат полю K. Понятно, что если для некоторого $\theta \in K^*$ все элементы матрицы $b(\theta)$ отличны от 0, то наше утверждение следует из леммы 13. Будем поэтому считать, что для каждого θ хотя бы один элемент $b_{ij}(\theta)$ матрицы $b(\theta)$ равен 0 (индексы i и j, конечно, зависят от θ). При $r \neq \pm k$ оба минора $\Delta^{l,-l}_{r,-r}(a)$ и $\Delta^{l,-l}_{k,-k}(a)$ можно считать нулевыми – иначе наше утверждение следует из леммы 16.

Из-за бесконечности K в нем можно выбрать обратимый θ, для которого $\theta\overline{\theta} \neq 1$. Заметим, что для такого θ элемент $b_{k,-k}(\theta)$ не может быть нулевым ни при каком k. Если для выбранного θ имеем $b_{ij}(\theta) \neq 0$ при всех $i \neq j$ и $b_{kk}(\theta) = 0$ для некоторого k, то наше утверждение следует из включения $b_{ij}(\theta)b'_{j,-j}(\theta) \in \sigma_{i,-j}$ при $i \neq \pm j$. Предположим поэтому, что $i \neq \pm j$ и $b_{ij}(\theta) = 0$. Тогда из-за коммутативности K и условия $\theta\overline{\theta} \neq 1$ имеем $b_{ij}(\eta) \neq 0$ для всех $\eta \in K^*$, отличных от θ и 1. В частности, $b_{ij}(\theta^{-1}) \neq 0$; остается использовать включение $b_{ij}(\theta^{-1})b'_{j,-j}(\theta^{-1}) \in \sigma_{i,-j}$. □

Следующее утверждение позволит нам в дальнейших рассуждениях считать ненулевыми все частичные суммы длинного типа для матриц, не содержащих нулевых элементов.

Лемма 18. *Если $S_{r,-r}(a) = 0$ для некоторого индекса r, то H содержит нетривиальную короткую трансвекцию.*

Доказательство. Умножая при необходимости нашу матрицу справа на подходящую диагональную, будем считать, что $a_{r1} = a_{r2} = 1$ (частичные суммы при таком умножении не меняются). Для обратимого θ нам потребуются матрицы

$$d(\theta) = \prod_{l>0} d_l(\theta) \quad \text{и} \quad g(\theta) = ad(\theta)a^{-1}.$$

Легко заметить, что $g_{r,-r}(\theta) = 0$ для всех θ. Поэтому $g'_{rr}(\theta)g_{rk}(\theta) \in \sigma_{rk}$ в силу леммы 11. Остается показать, что для некоторых θ и k произведение $g'_{rr}(\theta)g_{rk}(\theta)$ отлично от 0.

Положим $a_{r,-1} = \alpha$ (тогда $a_{r,-2} = -\alpha$) и $a'_{-1,r} - a'_{-2,r} = \beta$. Несложный подсчет показывает, что при $k \neq \pm r$

$$g_{rk}(\theta) = (\alpha - \theta\alpha\overline{\theta})\overline{\theta}^{-1}(a'_{-1,k} - a'_{-2,k}).$$

Равенства $a'_{-1,k} = a'_{-2,k}$ и $a'_{-1,-k} = a'_{-2,-k}$ одновременно выполняться не могут – в противном случае из $\sum_t a_{rt}a'_{tk} = \sum_t a_{rt}a'_{t,-k} = 0$ мы имели бы $a'_{1k} + a'_{2k} = a'_{1,-k} + a'_{2,-k} = 0$, а это противоречит

$\sum\limits_t a_{kt}a'_{tk} = 1$. Поэтому если $\theta\alpha\overline{\theta} \neq \alpha$, то хотя бы один из двух элементов $g_{rk}(\theta)$ или $g_{r,-k}(\theta)$ отличен от 0. Вычисляя второй сомножитель нашего произведения, получаем

$$g'_{rr}(\theta) = \theta^{-1}(1 - (\alpha - \theta\alpha\overline{\theta})\beta).$$

Таким образом, нам следует показать, что для некоторого обратимого θ произведение

$$(\alpha - \theta\alpha\overline{\theta})(1 - (\alpha - \theta\alpha\overline{\theta})\beta)$$

отлично от 0. Понятно, что при $\beta = 0$ интересующее нас произведение бывает ненулевым: в качестве θ достаточно взять α, если $\alpha \notin \mathcal{U}(R)$, и отличный от 0 и 1 элемент $\zeta_R(\alpha)^0$ в противном случае. При $\beta \neq 0$ рассуждение чуть длиннее. Положим $R_1 = \zeta_R(\alpha)$ и рассмотрим два случая.

Если R_1 инвариантно относительно инволюции, то будем в качестве θ брать элементы R_1^0, отличные от 0 и ± 1. По понятным причинам можно считать, что хотя бы один выбранный элемент (например, θ_1) является решением уравнения $g'_{rr}(\theta) = 0$, то есть $\theta_1^2 = 1 - \alpha^{-1}\beta^{-1}$. Возьмем тогда бесконечное и инвариантное относительно инволюции тело $R_2 = \zeta_{R_1}(\theta_1)$. Легко понять, что для любого $\theta \in R_2^0$, отличного от 0, ± 1 и $\pm\theta_1$, интересующее нас произведение отлично от нуля.

Если R_1 не инвариантно относительно инволюции, выберем $\theta \in R_1$ так, чтобы $\overline{\theta}$ не принадлежал R_1. Отметим, что $\theta\overline{\theta} \neq 1$, поэтому $\alpha - \theta\alpha\overline{\theta} \neq 0$. Если для выбранного θ имеется равенство $\theta\overline{\theta} = 1 - \alpha^{-1}\beta^{-1}$, то $(\theta+1)(\overline{\theta}+1) \neq 1 - \alpha^{-1}\beta^{-1}$ – в противном случае оказалось бы, что $0 = (\theta+1)(\overline{\theta}+1) - \theta\overline{\theta} = \theta + \overline{\theta} + 1$, а это противоречит $\overline{\theta} \notin R_1$. Таким образом, и в этом случае интересующее нас произведение можно сделать ненулевым. □

Теперь мы можем снять ограничение на миноры в лемме 16 и свести дальнейшие рассуждения к ситуации, когда наша подгруппа H порождается всеми диагональными унитарными матрицами и еще одной матрицей a, все элементы и все частичные суммы длинного типа которой отличны от 0, причем для любого индекса l матрица $b = ad_l(\theta)a^{-1}$ не имеет ненулевых элементов ни при каком обратимом θ, отличном от 1.

Лемма 19. *Если при некоторых индексах r и k уравнение $b_{rk}(\theta) = 0$ имеет решение $\theta \neq 1$, то H содержит нетривиальную короткую трансвекцию.*

Доказательство. Пусть частичные суммы $S_{j,-j}(a)$ и $S_{j,-j}(a^{-1})$ отличны от 0. В силу леммы 16 мы можем считать, что при каждом индексе j уравнение $b_{j,-j}(\theta)=0$ имеет только тривиальное решение, оба минора $\Delta^{l,-l}_{r,-r}(a)$ и $\Delta^{l,-l}_{i,-i}(a)$ равны 0 и для некоторого $\theta\neq 1$ все элементы $b_{\pm i,\pm r}(\theta)$ – нулевые. Фиксируем такой θ. Для доказательства нашего утверждения достаточно показать, что в четверке $b_{\pm r,\pm i}(\theta)$ есть ненулевой элемент.

Допустим противное и для каждого индекса j положим $\mu_j=a^{-1}_{j,-l}a_{jl}$ (условие на миноры означают равенства $\mu_i=\mu_{-i}$ и $\mu_r=\mu_{-r}$ но $\mu_i\neq\mu_r$ из-за $\Delta^{l,-l}_{ir}(a)\neq 0$). Если оба элемента $b_{ir}(\theta)$ и $b_{-r,-i}(\theta)$ равны 0, то

$$\mu_i(\theta-1)=(\overline{\theta}^{-1}-1)\overline{\mu}_r \quad \text{и} \quad \mu_i(\theta^{-1}-1)=(\overline{\theta}-1)\overline{\mu}_r, \tag{13}$$

откуда легко следует, что $\mu_i=\overline{\theta}\mu_i\theta$ и $\mu_r=\overline{\theta}\mu_r\theta$. Следствием этих условий и (13) является равенство $\mu_i=\overline{\mu}_r$ (отметим, что в таком случае $\mu_i\notin R^0$.). Совершенно очевидно тогда равенство $a_{il}a'_{lr}+a_{i,-l}a'_{-l,r}=0$, а оно в наших условиях значит, что

$$a_{jl}a'_{ls}+a_{j,-l}a'_{-l,s}=0, \tag{14}$$

при любых индексах $j\neq\pm s$.

Легко понять, что свойство (14) сохраняется при умножении матрицы a (слева или справа) на любую диагональную унитарную матрицу; поэтому дальше можно считать элементы a_{11}, a_{12} и a_{21} нашей матрицы равными 1. Если провести скэйлинг форменного кольца, то для естественного образа матрицы a в гиперболической унитарной группе над новым форменным кольцом свойство (14) также будет выполнено. Нам удобно провести скэйлинг при помощи элемента, обратного к $S_{-1,1}(a^{-1})$: это позволит в дополнение к предыдущим условиям на матрицу считать $S_{-1,1}(a^{-1})=1$. Положим далее $a_{-1,1}=\alpha$, тогда $a_{-2,1}=-(\alpha+1)$; при $a_{1,-1}=\beta$ имеем $a_{2,-1}=\overline{\beta}$, $a_{-2,-1}=-(\alpha+1)\overline{\beta}$, $a_{-1,-1}=\alpha\beta$. Заметим,что из соотношения $\sum\limits_t a'_{1t}a_{t1}=1$ легко следует соотношение $(\alpha-\overline{\alpha})(\beta-\overline{\beta})=1$, поэтому $\alpha,\beta\notin R^0$. Пусть, наконец, $a_{1,-2}=\gamma$, $a_{-1,2}=\delta$ и $a_{-2,2}=\nu$; тогда из $\sum\limits_t a_{1t}a'_{t2}=0$ получаем $a_{-2,-2}=\nu\overline{\gamma}$, а из-за $\sum\limits_t a_{-1,t}a'_{t2}=0$ имеем $a_{-1,-2}=\delta\gamma$. Таким образом, наша матрица и обратная к ней имеют вид

$$a = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \gamma & \beta \\ 1 & * & * & \overline{\beta} \\ -(\alpha+1) & * & * & -(\alpha+1)\overline{\beta} \\ \alpha & \delta & \delta\gamma & \alpha\beta \end{pmatrix}$$

и

$$a^{-1} = \begin{pmatrix} \overline{\beta}\overline{\alpha} & -\beta(\overline{\alpha}+1) & -\beta & -\overline{\beta} \\ \overline{\gamma}\overline{\delta} & * & * & -\overline{\gamma} \\ -\overline{\delta} & * & * & 1 \\ -\overline{\alpha} & \overline{\alpha}+1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Несложно увидеть, что тогда из соотношения $\sum\limits_t a_{1t}a'_{t1} = 1$ следует $\alpha = \delta$, что противоречит соотношению $\sum\limits_t a_{-1,t}a'_{t,-1} = 1$ из-за $S_{1,-1}(a) \in R^0$. Полученное противоречие и доказывает нашу лемму. $\square$

10. Извлечение трансвекций при наличии следовой частичной суммы длинного типа

В этом разделе работы мы покажем, что группа H содержит нетривиальную трансвекцию короткого типа, если хотя бы для одной матрицы из ненулевых элементов, содержащейся в H, какая-нибудь ее частичная сумма длинного типа является следом. *Мы продолжаем считать (R, Λ) нормализованным форменным кольцом над некоммутативным телом с инволюцией R, H – наддиагональной подгруппой группы $U(4, R, \Lambda)$, (σ, Γ) – ассоциированной с ней точной форменной D-сетью, a – матрицей из H, не содержащей нулевых элементов. Мы считаем также, что для произвольного индекса l и матриц $b(\theta) = ad_l(\theta)a^{-1}$ и $c(\theta) = a^{-1}d_l(\theta)a$ ни одно из уравнений $b_{rk}(\theta) = 0$ и $c_{rk}(\theta) = 0$ не имеет решений, отличных от 1, ни при каких r и k. Предположим дополнительно, что все частичные суммы $S_{i,-i}(a)$ и $S_{i,-i}(a^{-1})$ отличны от 0 при любом индексе i, причем для некоторого индекса r частичная сумма $S_{r,-r}(a)$ принадлежит множеству $\mathrm{Tr}\,(R)$.*

Обозначим через m тот единственный отличный от r индекс, для которого $\varepsilon(m) = \varepsilon(r)$. Можно считать, что $a_{rr} = a_{rm} = a_{mr} = 1$, умножая в противном случае матрицу a слева или справа на подходящие диагональные матрицы; отметим, что после описанного умножения матрица продолжает удовлетворять всем поставленным выше условиям, в частности, $S_{r,-r}(a)$ продолжает оставаться ненулевым следом. Далее проведем скэйлинг нашего форменного кольца, введя новую инволюцию $\widetilde{\omega} = s\overline{\omega}s^{-1}$ при $s = (S_{r,-r}(a))^{\varepsilon(r)}$. Ясно, что для естественного образа a_1 нашей матрицы a в новой унитарной группе оказывается $S_{r,-r}(a_1) = 1$, а все остальные поставленные ограничения сохраняются. Особо отметим тот факт, что поскольку скэйлинг проводился при помощи следа, 1 является следом относительно новой инволюции независимо от характеристики тела.

Поскольку речь идет об извлечении нетривиальной трансвекции короткого типа в нашей группе, можно считать, что 1 принадлежит множеству следов относительно исходной инволюции (и поэтому группа $\mathcal{U}(R)$ бесконечна), а для нашей матрицы a выполнены все перечисленные выше условия. Положим для определенности $r = 1$ (остальные случаи рассматриваются аналогично). Другими словами, *далее в этом разделе в дополнение к ранее поставленным условиям мы будем считать, что*

$$1 = x + \overline{x} \tag{15}$$

при некотором $x \in R$, а матрицы a и обратная к ней записываются в виде

$$a = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1-\alpha & \alpha \\ 1 & \beta & \gamma & \delta \\ \kappa & \mu & \nu & \xi \\ \pi & \rho & \tau & \omega \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad a^{-1} = \begin{pmatrix} \overline{\omega} & \overline{\xi} & -\overline{\delta} & -\overline{\alpha} \\ \overline{\tau} & \overline{\nu} & -\overline{\gamma} & 1+\overline{\alpha} \\ -\overline{\rho} & \overline{\mu} & \overline{\beta} & 1 \\ -\overline{\pi} & -\overline{\kappa} & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Для $\theta \in \mathcal{U}(R)$ мы будем рассматривать матрицы

$$g(\theta) = ad(\theta)a^{-1}.$$

и, разумеется,воспользуемся тем, что $g_{1,-1}(\theta) = 0$ для всех θ. Остальные элементы первой строки матрицы $g(\theta)$ равны

$$g_{11}(\theta) = \theta + (\alpha\theta - \theta\alpha)(\overline{\rho} - \overline{\pi})$$

$$g_{12}(\theta) = (\alpha\theta - \theta\alpha)(\overline{\mu} - \overline{\kappa})$$

$$g_{1,-2}(\theta) = (\alpha\theta - \theta\alpha)(1 - \overline{\beta}).$$

Положим далее

$$R_1 = \zeta_R(\alpha)$$

и предположим на некоторое время, что элемент θ из $\mathcal{U}(R)$ не принадлежит телу R_1. Легко понять, что тогда хотя бы один из элементов $g_{12}(\theta)$ или $g_{1,-2}(\theta)$ отличен от 0: в противном случае мы имели бы $\beta = 1$ и $\mu = \kappa$, откуда вследствие соотношений $\sum_l a'_{-1,l}a_{l1} = \sum_l a'_{-2,l}a_{l1} = 0$ получилось бы невозможное для обратимой матрицы равенство $\rho = \pi$. Поэтому сомнение в существовании искомой трансвекции возникает только в случае, когда для нашего элемента θ имеются также равенства $g_{11}(\theta) = g'_{11}(\theta) = 0$ – в противном случае можно воспользоваться леммой 11. В этой ситуации мы получаем равенства

$$(\overline{\theta}\alpha\theta - \alpha)(\overline{\rho} - \overline{\pi}) = (\theta\alpha\overline{\theta} - \alpha)(\overline{\rho} - \overline{\pi}) = -1. \tag{16}$$

Первое утверждение этой части работы означает, что описанное выше подтело R_1 можно дальше считать достаточно близким к центру всего тела R.

Лемма 20. *Если R^- не содержится в R_1, то H содержит нетривиальную короткую трансвекцию.*

Доказательство. Мы выберем $y \notin R_1$ так, чтобы тело $R_2 = \zeta_R(y)$ было инвариантным относительно инволюции, причем мы хотим, чтобы R_2 содержало достаточно много унитарных элементов, не принадлежащих R_1 (отметим, что в такой ситуации инволюция на центре R_2 должна действовать нетривиально). После этого мы покажем, что в бесконечной группе $\mathcal{U}(R_2)$ существует элемент θ, не принадлежащий R_1 и не удовлетворяющий соотношению (16). Поскольку для общего случая выкладки оказываются весьма громоздкими, рассуждения разобьем на части в зависимости от характеристики R.

Сначала разберемся с телом характеристики $\neq 2$. Возьмем в качестве y произвольный элемент из $R^- \setminus R_1$. Понятно, что $R_2 = \zeta_R(y)$ – тело с инволюцией второго рода. Для каждого $z \in R_2^0$ элемент $\theta_z = (1 + yz)(1 - yz)^{-1}$ унитарен; понятно, что $\theta_{z_1} = \theta_{z_2}$ только при $z_1 = z_2$. Ясно также, что θ_z принадлежит подтелу R_1 тогда и только тогда, когда $yz \in R_1$. В частности, из-за $y \notin R_1$ в R_1 не попадает θ_1; поэтому можно считать, что для него выполнено условие (16), из которого следуют равенства $\theta_1\alpha\overline{\theta}_1 = \overline{\theta}_1\alpha\theta_1$. Понятно, что в таком случае $\theta_1^2 \in R_1$, откуда получаем

$$(1 + y^2)\alpha y = y\alpha(1 + y^2). \tag{17}$$

При $\operatorname{char} R \neq 3$ отсюда легко получить противоречие с $y \notin R_1$: достаточно воспользоваться очевидным условием $2y \notin R_1$ и в предыдущем рассуждении заменить θ_1 на θ_2 – тогда наряду с (17) имеем $(1+4y^2)\alpha y = y\alpha(1+4y^2)$ и потому $y\alpha = \alpha y$.

Пусть теперь $\operatorname{char} R = 3$ и $1+y^2 \neq 0$. Понятно, что тогда $y^2 \notin R_1$ – в противном случае из (17) следовало бы, что $y\alpha = \alpha y$. Положим $z = y^2(1+y^2)^{-1}$ и заметим, что z принадлежит R_2^0 и отличен от 0 и ± 1. Легко понять, что $yz \notin R_1$ (в противном случае из-за (17) мы имели бы $y^2 \in R_1$). Поэтому можно полагать, что θ_z удовлетворяет равенству (16), из которого получаем $\theta_z\theta_1 \in R_1$. Нетрудно подсчитать, что тогда

$$(1-y^2)y\alpha(1+y^2+y^4) = (1+y^2+y^4)\alpha(1-y^2)y. \qquad (18)$$

Но $1+y^2+y^4 = (1-y^2)^2$ при $\operatorname{char} R = 3$ и тогда (17) и (18) противоречат $y \notin R_1$.

В случае $1+y^2 = 0$ при $\operatorname{char} R = 3$ выберем $t \in R_2^0$ так, чтобы он был отличен от 0 и ± 1. В тройке t, $t+1$ и $t+2$ все элементы отличны от 0 и ± 1, а разность двух любых элементов этой тройки принадлежит центру. Поэтому по крайней мере два элемента тройки yt, $y(t+1)$ и $y(t+2)$ не входят в R_1. Из-за $\operatorname{char} R = 3$ это означает, что для некоторого элемента z из R_2^0, отличного от 0 и ± 1, оба произведения yz и $y(z+1)$ не содержатся в R_1. Разумеется, можно считать, что тогда θ_z и θ_{z+1} удовлетворяют (16), а потому $\theta_1\theta_z$ и $\theta_1\theta_{z+1}$ принадлежат R_1. Опускаем подробности дальнейших вычислений – и в этом случае получается противоречие с $y \notin R_1$.

Пусть теперь $\operatorname{char} R = 2$ и x удовлетворяет условию (15). При $x \notin R_1$ положим $y = x$, если же $x \in R_1$, то положим $y = x + v$, взяв $v \in R^0 \setminus R_1$ (напомним, что $R^0 = R^-$ в нашем случае). Таким образом $y \notin R_1$ и $y + \overline{y} = 1$. Понятно, что $R_2 = \zeta_R(y)$ – тело с инволюцией второго рода. Каждый отличный от 1 элемент группы $\mathcal{U}(R_2)$ однозначно может быть представлен в виде $\theta_z = (y+z)(\overline{y}+z)^{-1}$ при некотором $z \in R^0$. Понятно, что $\theta_z \in R_1$ тогда и только тогда, когда $y+z$ коммутирует с α. Для $z = 0$ это не так, поэтому будем считать, что θ_0 удовлетворяет условию (16), откуда получаем $y^2 \in R_1$. Выберем далее $z \in R_2^0$ так, чтобы он был отличен от 0 и 1, а сумма $y+z$ не содержалась в R_1 – такой выбор, очевидно, возможен при $R_2^0 \subseteq R_1$; если же существует $u \in R_2^0$, не входящий в R_1, то для $R_3 = \zeta_{R_2}(u)$ и любого $t \in R_3^0$

хотя бы одна из сумм $y + tu$ или $y + (t+1)u$ не принадлежит R_1. Понятно, что в этой ситуации можно считать, что θ_z^2, $\theta_z\theta_0$ и $\theta_z^{-1}\theta_0$ принадлежат R_1, то есть оказывается, что z^2 коммутирует с α, z коммутирует с $\alpha y + y\alpha$ и при этом

$$(y^2 + y)(\alpha z + z\alpha) = (z^2 + z)(\alpha y + y\alpha). \tag{19}$$

Отметим, что в таком случае $z \notin R_1$.

Теперь наша ситуация несколько напоминает случай характеристики 3. Понятно, что сумма $z + z^{-1}$ принадлежит R_2^0, отлична от 0, 1, z и $z+1$ и не коммутирует с α. Предположим, что сумма $y + z + z^{-1}$ также не коммутирует с α и повторим наши рассуждения. Это значит, что в (19) можно z заменить на $z+z^{-1}$, откуда после небольших преобразований получаем равенство $(z+1)^2(\alpha y + y\alpha) = 0$, противоречащее $y \notin R_1$. Поэтому дальше можно считать $y + z + z^{-1} \in R_1$; в таком случае $y + z^{-1}$ не коммутирует с α (отметим, что z^{-1} отличен от 0, 1, z, $z+1$, $z+z^{-1}$ и $z+z^{-1}+1$). Вновь повторяя наши рассуждения, приходим к включению $\theta_z\theta_{z^{-1}} \in R_1$, из которого следует равенство $\theta_0 = (z+1)^3 z^{-1}$. Понятно, что такое равенство невозможно, поскольку его правая часть принадлежит R^0, а левая является унитарным элементом, отличным от 1. Наша лемма полностью доказана. □

Таким образом, *дальше в этом разделе можно считать, что α коммутирует со всеми элементами из R^-, в частности, с $\alpha - \overline{\alpha}$, а это значит, что тело*

$$R_2 = \zeta_R(\alpha) \cap \zeta_R(\overline{\alpha})$$

бесконечно и инвариантно относительно инволюции. Группа $\mathcal{U}(R_2)$ унитарных элементов этого тела, очевидно, бесконечна. Отметим, что в таком случае элемент α не принадлежит R^0 – иначе уравнение $a_{11}(\theta - 1)a'_{1,-1} + a_{1,-1}(\overline{\theta}^{-1} - 1)a'_{-1,-1} = 0$ имело бы бесконечное множество нетривиальных решений, а это противоречит поставленному в начале этого раздела условию. Еще одно замечание касается тела R, имеющего характеристку 2: наше новое условие означает, что α коммутирует со всеми элементами из R^0, а согласно лемме Ж. Дьедонне из [20] некоммутативное тело характеристики 2 порождается своими элементами, неподвижными относительно инволюции; поэтому при характеристике 2 наш элемент α принадлежит центру.

Докажем теперь часто используемый в дальнейшем факт, являющийся вариацией на тему унитарного аналога теоремы Брауэра–Картана–Хуа (подробности обсуждения этого вопроса приведены в заключительной главе [22]).

Лемма 21. *Пусть t – элемент некоммутативного тела с инволюцией R, не принадлежащий R^0, причем t и $\overline{t}$ коммутируют. Если некоторый элемент y из R коммутирует со всеми унитарными элементами тела $T = \zeta_R(t) \cap \zeta_R(\overline{t})$, то y принадлежит центру тела T.*

Доказательство. Пусть сначала $\operatorname{char} R \neq 2$ и $s = t - \overline{t}$. Воспользовавшись тем, что y коммутирует с унитарным элементом $\theta_1 = (1+s)(1-s)^{-1}$ из T, получаем $ys = sy$. Далее при $\theta_2 = t\overline{t}^{-1}$ используем равенство $y\theta_2 = \theta_2 y$, получая $yt = ty$ и $y \in T$. Если u – произвольный элемент из T^0, то $\theta_3 = (u+s)(u-s)^{-1} \in \mathcal{U}(T)$, поэтому $yu = uy$. Наконец, если v – произвольный элемент из T^-, то $\theta_4 = (1+v)(1-v)^{-1} \in \mathcal{U}(T)$ и поэтому $yv = vy$. Остается теперь сослаться на аддитивное разложение $T = T^0 \oplus T^-$.

Далее рассмотрим случай $\operatorname{char} R = 2$ и положим $s = t(t+\overline{t})^{-1}$ (ясно, что тогда $s + \overline{s} = 1$). Сначала используем коммутирование y с $\theta_1 = s\overline{s}^{-1} \in \mathcal{U}(T)$, получая $ys = sy$. Беря

$$\theta_2 = (t + \overline{t} + s)(t + \overline{t} + \overline{s})^{-1} \in \mathcal{U}(T),$$

получаем $y(t+\overline{t}) = (t+\overline{t})y$, откуда следует $y \in T$. Если $z \in T^0$, то y коммутирует с

$$\theta_3 = (z+s)(z+\overline{s})^{-1} \in \mathcal{U}(T)$$

и потому $yz = zy$. Осталось заметить, что в этом случае либо тело T коммутативно и тогда наше утверждение очевидно, либо при некоммутативном T наше утверждение является следствием леммы Дьедонне. □

Вернемся к матрице $g(\theta)$, у которой все внедиагональные элементы первой строки равны 0 для любого $\theta \in \mathcal{U}(R_2)$, и вычислим другие ее элементы:

$$g_{21}(\theta) = (\beta\theta - \theta\beta)(\overline{\tau} + (1+\overline{\alpha})\overline{\rho}) - (\delta\theta - \theta\delta)(\overline{\pi} - \overline{\rho})$$

$$g_{-2,1}(\theta) = \kappa g_{21}(\theta) + ((\mu - \kappa\beta)\theta(\overline{\tau} + (1+\overline{\alpha})\overline{\rho}) - (\xi - \kappa\delta)\theta(\overline{\pi} - \overline{\rho}))$$

$$g_{-1,1}(\theta) = -\theta\overline{\rho} + \pi g_{21}(\theta) + ((\rho - \pi\beta)\theta(\overline{\tau} + (1+\overline{\alpha})\overline{\rho}) - (\omega - \pi\delta)\theta(\overline{\pi} - \overline{\rho}))$$

$$g_{2,-2}(\theta) = -(\beta\theta - \theta\beta)(\overline{\gamma} + (1+\overline{\alpha})\overline{\beta}) + (\delta\theta - \theta\delta)(1 - \overline{\beta})$$

$$g_{22}(\theta) = \theta + (\beta\theta - \theta\beta)(\overline{\nu} + (1+\overline{\alpha})\overline{\mu}) - (\delta\theta - \theta\delta)(\overline{\kappa} - \overline{\mu}).$$

Разумеется, если для некоторого $\theta \in \mathcal{U}(R_2)$ хоть один из элементов $g_{21}(\theta)$ или $g_{-2,1}(\theta)$ отличен от 0, то наличие в H интересующей нас трансвекции следует из леммы 8, поэтому дальше эти два элемента матрицы $g(\theta)$ можно считать нулевыми при всех θ. Это условие нам удобнее формулировать в несколько ином виде, вводя обозначения

$$q = \overline{\tau} + (1+\overline{\alpha})\overline{\rho} \quad \text{и} \quad r = \overline{\pi} - \overline{\rho};$$

тогда *далее можно считать, что при всяком* $\theta \in \mathcal{U}(R_2)$

$$(\beta\theta - \theta\beta)q = (\delta\theta - \theta\delta)r \quad \text{и} \quad (\mu - \kappa\beta)\theta q = (\xi - \kappa\delta)\theta r. \tag{20}$$

Заметим, что, используя соотношения между элементами матриц a и a^{-1}, несложно показать, что введенные нами элементы q и r удовлетворяют условиям

$$(1-\beta)q - (\alpha - \delta)r = 1,$$

$$(\mu - \kappa\beta)q - (\xi - \kappa\delta)r = 0,$$

$$(\rho - \pi\beta)q - (\omega - \pi\delta)r = \overline{\rho}.$$

Предположим теперь, что при выполнении условий (20) элемент $g_{-1,1}(\theta)$ оказался ненулевым для некоторого $\theta \in \mathcal{U}(R_2)$. По лемме 8 имеем $g_{-1,1}(\theta)g'_{11}(\theta) \in \Gamma_{-1}$ и поэтому форменный параметр Γ_{-1} содержит $\mathrm{Tr}(R)$, а наша группа H содержит матрицу $h = aT_{-1,1}(\alpha^{-1}\overline{\alpha}^{-1})$ (поскольку 1 является следом в R, для всех $z \in R$ произведения $z\overline{z}$ также принадлежат $\mathrm{Tr}(R)$). Заметим, что $S_{1,-1}(h) = 0$, а потому в этой ситуации наличие в H искомой трансвекции следует из леммы 18. Следовательно, можно считать, что $g_{-1,1}(\theta) = 0$ для всех $\theta \in \mathcal{U}(R_2)$. Другими словами, *далее мы будем предполагать, что для всех* $\theta \in \mathcal{U}(R_2)$ *выполнено равенство*

$$\theta\overline{\rho} = (\rho - \pi\beta)\theta q - (\omega - \pi\delta)\theta r. \tag{21}$$

Понятно, что наши q и r одновременно не могут быть равными 0. Разберемся с ситуацией, когда нулю равен один из этих элементов.

Лемма 22. *Если $qr = 0$, то H содержит нетривиальную короткую трансвекцию.*

Доказательство. Пусть сначала $q = 0$, то есть $\tau + \rho(1 + \alpha) = 0$. Из-за условия (20) тогда δ коммутирует со всеми элементами группы $\mathcal{U}(R_2)$ и потому δ принадлежит центру Z_2 тела R_2 по лемме 21. Понятно, что $\overline{r} = \pi - \rho$ также принадлежит Z_2, так как в нашей ситуации $(\alpha - \delta)r = -1$. Из условия (21) следует, что $\rho \in Z_2$. Но тогда, как легко понять, этому же полю Z_2 принадлежат π, τ и ω, а это значит, что матрица a^{-1} удовлетворяет условиям леммы 17; при $q = 0$ наше утверждение установлено.

При $r = 0$ предыдущее рассуждение повторяется почти дословно: понятно, что ρ и β принадлежат Z_2, поэтому π, q, τ и ω также содержатся в Z_2, то есть вновь применима лемма 17. □

Далее оба элемента q и r мы считаем ненулевыми и полагаем

$$s = rq^{-1}.$$

Из ранее приведенных условий следуют равенства

$$1 - \beta - (\alpha - \delta)s = q^{-1}$$

$$\beta\theta - \theta\beta = (\delta\theta - \theta\delta)s$$

$$(\mu - \kappa\beta)\theta = (\xi - \kappa\delta)\theta s$$

$$\theta\overline{\rho}q^{-1} = (\rho - \pi\beta)\theta - (\omega - \pi\delta)\theta s$$

при любом $\theta \in \mathcal{U}(R_2)$. Заметим, что разность $\mu - \kappa\beta$ отлична от 0 – иначе мы имели бы $\mu = \kappa\beta$ и $\xi = \kappa\delta$, откуда вследствие соотношений $\sum\limits_l a_{2l}a'_{l,-1} = \sum\limits_l a_{-2,l}a'_{l,-1} = 0$ получилось бы невозможное для обратимой матрицы равенство $\nu = \kappa\gamma$. Поэтому два последние из указанных условий означают, что s и $\overline{\rho}q^{-1}$ принадлежат полю Z_2. Легко понять, что если полю Z_2 принадлежит также элемент δ, то β, q, ρ, π, τ и ω также содержатся в Z_2, а в этом случае H содержит нетривиальную трансвекцию короткого типа по лемме 17. Таким образом, нам осталось рассмотреть последний случай:

Лемма 23. *Если δ не принадлежит полю Z_2, то H содержит нетривиальную короткую трансвекцию.*

Доказательство. Рассмотрим три разные ситуации.

1) Пусть сначала $\delta\overline{\delta} = \overline{\delta}\delta$ и δ коммутирует с α. В этом случае наши аргументы почти полностью совпадает с доказательством леммы 22. Положим $R_3 = \zeta_{R_1}(\delta) \cap \zeta_{R_1}(\overline{\delta})$ – это бесконечное тело с инволюцией второго рода имеет центр Z_3, содержащий Z_2. Понятно, что β коммутирует с любым $\theta \in \mathcal{U}(R_3)$ и поэтому принадлежит Z_3. Рассуждая так же, как и в доказательстве леммы 22, показываем, что полю Z_3 принадлежат все элементы первой и последней строк матрицы a, а затем ссылаемся на лемму 17.

2) Пусть теперь $\delta\overline{\delta} = \overline{\delta}\delta$ и $\delta \notin R_1$. Сразу поясним, что речь в этом случае идет о теле характеристики, отличной от 2 (иначе α централен). Мы будем рассуждать в стиле доказательства леммы 20. Нам потребуется бесконечное и инвариантное относительно инволюции тело

$$R_4 = \zeta_R(\delta) \cap \zeta_R(\overline{\delta})$$

(отметим, что $\overline{\delta} \notin R_1$ из-за введенного ранее условия $R^- \subseteq R_1$). Понятно, что $\delta \neq \overline{\delta}$ (иначе -1 была бы корнем уравнения $a_{21}(\theta-1)a'_{1,-2} + a_{2,-1}(\overline{\theta}^{-1}-1)a'_{-1,-2} = 0$, а это противоречит условию в начале раздела); ясно также, что $\delta \neq -\overline{\delta}$ из-за $R^- \subseteq R_1$ и поэтому $\delta^2 \neq \overline{\delta}^2$. Следовательно, на центре Z_4 тела R_4 инволюция действует нетривиально и группа $\mathcal{U}(R_4)$ бесконечна. Как понятно из доказательства леммы 20, нам достаточно установить, что найдутся такие θ_1 и θ_2 из $\mathcal{U}(R_4) \setminus R_1$, что $\overline{\theta}_1\alpha\theta_1 \neq \overline{\theta}_2\alpha\theta_2$.

При $z \in R_4^0$ положим

$$\eta_z = (z+\delta)(z+\overline{\delta})^{-1}$$

– эти элементы принадлежат $\mathcal{U}(R_4)$. Понятно, что η_0 не входит в R_1, поэтому при $\eta_0^2 \notin R_1$ можно взять $\theta_1 = \eta_0$ и $\theta_2 = \overline{\eta}_0$. Значит можно считать $\eta_0^2 \in R_1$, то есть $\alpha \in \zeta_R(\delta^2) \cap \zeta_R(\overline{\delta}^2)$. Легко понять, что η_1 также не содержится в R_1, причем $\eta_1 \neq \eta_0, \overline{\eta}_0$ – иначе $\delta + \overline{\delta} = -1$ и $\delta \in R_1$. Легко подсчитать, что в таком случае произведение $\eta_1\eta_0$ не принадлежит R_1, следовательно, можно взять $\theta_1 = \eta_0$ и $\theta_2 = \overline{\eta}_0$.

3) Нам осталось разобраться со случаем $\delta\overline{\delta} \neq \overline{\delta}\delta$. В этой ситуации разность $y = \delta - \overline{\delta}$, содержащаяся в R_2, не коммутирует с δ. Положим

$$R_5 = \zeta_{R_2}(y)$$

и отметим, что на центре этого бесконечного тела инволюция действует нетривиально. Покажем, что найдутся такие θ_1 и θ_2 в группе $\mathcal{U}(R_5)$, что ни один из них не коммутирует с δ и $\overline{\theta}_1\delta\theta_1 \neq \overline{\theta}_2\delta\theta_2$. Как и при доказательстве леммы 20, во избежание громоздких выкладок рассуждения поставим в зависимость от характеристики тела.

При $\operatorname{char} R \neq 2$ отличные от 1 элементы $\mathcal{U}(R_5)$ могут быть записаны в виде

$$\eta_z = (1 + yz)(1 - yz)^{-1}$$

при $z \in R_5^0$. Понятно, что η_1 не коммутирует с δ и что можно при этом считать η_1^2 коммутирующим с δ. Как видим, начало наших рассуждений практически совпадает с соответствующим куском доказательства леммы 20; дальнейшие выкладки можно также проводить по схеме доказательства упомянутой леммы, поэтому мы их опускаем.

При $\operatorname{char} R = 2$ рассуждаем несколько иначе. В этом случае, как было показано ранее, элемент α централен и поэтому $R_2 = R$. При $z \in R_5^0$ рассмотрим унитарные элементы

$$\eta_z = (z + \alpha)(z + \overline{\alpha})^{-1}.$$

Понятно, что η_z коммутирует с δ тогда и только тогда, когда $z\delta = \delta z$. Элемент η_y не коммутирует с δ, поэтому можно считать, что η_y^2 коммутирует с δ, а это означает $y^2\delta = \delta y^2$. Далее воспользуемся тем, что y^{-1} также не коммутирует с δ; следовательно, мы можем считать, что с δ коммутирует произведение $\eta_y\eta_{y^{-1}}$. Легко проверить, что в таком случае δ коммутирует с произведением $y(1 + \alpha\overline{\alpha})$, а это возможно только при $\alpha\overline{\alpha} = 1$. Остается воспользоваться очевидным неравенством $(y + y^{-1})\delta \neq \delta(y + y^{-1})$: это позволяет считать произведение $\eta_y\overline{\eta}_{y+y^{-1}}$ коммутирующим с δ, что означает условие $y^2(y + 1)\delta = \delta y^2(y + 1)$, несовместимое с $y\delta \neq \delta y$.

Заметим теперь, что если $\theta \in \mathcal{U}(R_2)$ не коммутирует с δ, то θ не коммутирует также с β, причем

$$(\delta\theta - \theta\delta)^{-1}(\beta\delta - \delta\beta) = s.$$

Используя это равенство, прямыми и довольно длинными вычислениями можно показать, что

$$g_{2,-2}(\theta)(\xi - \kappa\delta) = \delta\theta - \theta\delta \quad \text{и} \quad g_{22}(\theta) = \theta - (\delta\theta - \theta\delta)(\xi - \kappa\delta)^{-1}\kappa$$

(напомним, что ранее мы установили обратимость разности $\xi - \kappa\delta$). Сказанное, разумеется, справедливо, если в качестве θ берется θ_1, $\overline{\theta}_1$, θ_2 или $\overline{\theta}_2$. Если бы мы имели $g_{22}(\theta_1) = g_{22}(\theta_2) = 0$, то произведения $\overline{\theta}_1\delta\theta_1$ и $\overline{\theta}_2\delta\theta_2$ оказались бы одинаковыми, а это не так. Поэтому для некоторого $\theta \in \mathcal{U}(R_2)$, не коммутирующего с δ, элемент $g_{22}(\theta)$ отличен от 0. Матрица $g(\theta)$ не имеет, конечно, нулевых строк, а потому хотя бы один из элементов $g_{-2,2}(\theta)$ или $g_{-2,-2}(\theta)$ также не равен 0. По лемме 11 произведения

$$g_{22}(\theta)g'_{2,-2}(\theta)g_{-2,-2}(\theta)g'_{-2,-2}(\theta) \quad \text{и} \quad g_{2,-2}(\theta)g'_{-2,-2}(\theta)g_{-2,2}(\theta)g'_{2,-2}(\theta)$$

принадлежат форменному параметру Γ_2, причем одно из этих произведений не равно 0. Следовательно, в нашей группе H содержится унитарная трансвекция длинного типа $T_{2,-2}(1)$. Для окончания доказательства леммы 23 достаточно взять матрицу

$$f = aT_{2,-2}(1)$$

и, заметив, что $S_{1,-1}(f) = 0$, применить к этой матрице лемму 18. $\square$

Простым следствием рассуждений этого раздела и леммы 14 является стандартность описания решетки наддиагональных подгрупп унитарной группы степени 4 в хорошем случае:

Теорема 5. *Пусть R – некоммутативное тело, (R, Λ) – хорошее форменное кольцо над R и*

$$\Delta(4, R, \Lambda) \leqslant H \leqslant U(4, R, \Lambda).$$

Тогда существует единственная точная форменная D-сеть (σ, Γ) порядка 4, для которой

$$U(\sigma, \Gamma) \leqslant H \leqslant N_U(\sigma, \Gamma).$$

В заключение автор считает приятным долгом выразить свою искреннюю благодарность Н. А. Вавилову за внимание к работе и полезные обсуждения.

Литература

1. З. И. Боревич, *Описание подгрупп полной линейной группы, содержащих группу диагональных матриц.* —Зап. научн. семин. ЛОМИ **64** (1976), 12–29.

2. З. И. Боревич, Н. А. Вавилов, *Подгруппы полной линейной группы над полулокальным кольцом, содержащие группу диагональных матриц.* — Тр. МИАН СССР **148** (1978), 43–57.
3. Н. А. Вавилов, *О подгруппах полной линейной группы над полулокальным кольцом, содержащих группу диагональных матриц.* — Вестн. ЛГУ **1** (1981), 10–15.
4. Н. А. Вавилов, *О подгруппах расщепимых ортогональных групп* I, II. — Сиб. мат. ж. **29:3** (1988), 12–25; Зап. научн. семин. ПОМИ **265** (1999), 42–63.
5. Н. А. Вавилов, *Подгруппы групп Шевалле, содержащие максимальный тор.* — Тр. Ленингр. Мат. Об-ва **1** (1990), 64–109.
6. Н. А. Вавилов, Е. В. Дыбкова, *Подгруппы полной симплектической группы, содержащие группу диагональных матриц.* —Зап. научн. семин. ЛОМИ **103** (1980), 31–47.
7. Е. В. Дыбкова, *О сетевых подгруппах в гиперболической унитарной группе.* — Алгебра и анализ **9:4** (1997), 79–86.
8. Е. В. Дыбкова, *О сопряженности сетевых подгрупп в гиперболической унитарной группе над полем.* — Вестн. С.-Петербург. ун-та, Сер. 1 **22** (1997), 10–12.
9. Е. В. Дыбкова, *Наддиагональные подгруппы гиперболической унитарной группы для хорошего форменного кольца над полем.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **236** (1997), 87–96.
10. Е. В. Дыбкова, *Форменные сети и решетка наддиагональных подгрупп симплектической группы над полем характеристики* 2. — Алгебра и анализ **10:4** (1998), 113–129.
11. А. Е. Залесский, *Линейные группы.* — Успехи мат. наук **36:6** (1981), 56–107.
12. А. Е. Залесский, *Линейные группы.* — В кн.: Итоги науки. Алгебра, геометрия, топология **21** (1983), 135–182.
13. А. Е. Залесский, *Линейные группы.* — В кн.: Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления **37** (1989), 114–228.
14. П. Кон, *Свободные кольца и их связи.* Мир, М. (1975).
15. С. Л. Крупецкий, *О подгруппах унитарной группы над локальным полем.* — Зап. научн. семин. ЛОМИ **94** (1979), 81–103.
16. С. Л. Крупецкий, *Промежуточные подгруппы в унитарной группе над телом кватернионов.* — Зап. научн. семин. ЛОМИ **116** (1982), 96–101.
17. A. Bak, *On modules with quadratic forms.* — Lecture Notes in Math. **108** (1969), 55–66.
18. A. Bak, N. Vavilov, *Structure of hyperbolic unitary groups* I. *Elementary subgroups.* — Algebra Colloq. **7:2** (2000), 159–196.
19. P. M. Cohn, *Skew fields. Theory of general division rings. Encyclopedia of Mathematics and its Applications.* **57** Cambridge Univ. Press, Cambridge (1995).
20. J. Dieudonné, *On the structure of unitary groups.* — Trans. Amer. Math. Soc. **72** (1952), 367–385.
21. A. J. Hahn, O. T. O'Meara, *The classical groups and K-theory.* Springer, Berlin et al. (1989).

22. I. N. Herstein, *Rings with involution.* The University of Chicago Press, Chicago, Ill. London, Chicago Lectures in Mathematics (1976).
23. O. King, *On the subgroup structure of the symplectic group in characteristic two.* — J. London Math. Soc. **43:2** (1991), 91–95.
24. A. A. Klein, *Involutorial division rings with arbirary centers.* — Proc. Amer. Math. Soc. **34** (1972), 38–42.
25. M. A. Knus, A. Merkurjev, M. Rost, J. P. Tignol, *The book of involutions.* — Coll. Publ. Amer. Math. Soc. **44** (1998).
26. Li Shangzhi, *A new type of classical groups over skew-fields of characteristic* 2. —J. Algebra **138** (1991), 399–419.
27. N. A. Vavilov, *Intermediate subgroups in Chevalley groups.* — Proc. Conf. Groups of Lie type and their Geometries (Como–1993), Cambridge Univ. Press (1995), pp. 233–280.

Dybkova E. V. On overdiagonal subgroups of the hyperbolic unitary group for a skew field.

In the hyperbolic unitary group over a skew field we study the lattice of subgroups containing all diagonal unitary matrices. We have proved for the group of degree 4 that if a form parameter is minimal, this lattice has the standard description in terms of form net subgroups.

С.-Петербургский
государственный
университет

Поступило 1 апреля 2002 г.