Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 289, 2002 г.

С. А. Евдокимов*, **И. Н. Пономаренко****

КОЛЬЦА КОНЕЧНЫХ ПРОЕКТИВНЫХ ПЛОСКОСТЕЙ И ИХ ИЗОМОРФИЗМЫ

1. *Проективной плоскостью* называется тройка, состоящая из множества точек, множества прямых и отношения инцидентности между точками и прямыми, такого, что любые две различные точки (соотв. прямые) инцидентны единственной прямой (соотв. точке) и существуют четыре различные точки, никакие три из которых не инцидентны одной и той же прямой. Под изоморфизмом проективных плоскостей понимается биекция, переводящая точки (соотв. прямые) одной плоскости в точки (соотв. прямые) другой плоскости и сохраняющая отношение инцидентности. Если множества точек и прямых конечны, то проективная плоскость называется конечной. В этом случае существует целое число $q \geqslant 2$, такое, что каждая точка (соотв. прямая) инцидентна точно $q+1$ прямой (соотв. точке) и число точек равно числу прямых и совпадает с q^2+q+1 (см. [3]). Число q называется *порядком* проективной плоскости. Если $q = p^d$, где p – простое число, то проективная плоскость, множествами точек и прямых которой являются соответственно множества всех одномерных и двумерных подпространств трёхмерного линейного пространства над полем Галуа порядка q, а инцидентность определяется включением, называется *плоскостью Галуа* порядка q. Плоскости Галуа это в точности те конечные проективные плоскости, для которых справедлива теорема Дезарга (см. [3]). Неизвестно, существуют или нет проективные плоскости порядка, отличного от степени простого числа.

С каждой конечной проективной плоскостью $\mathcal{P}$ связан (неориентированный) граф $\Gamma = \Gamma(\mathcal{P})$, множество вершин которого V есть дизъюнктное объединение множеств точек и прямых плоскости $\mathcal{P}$, а множество ребер R состоит из пар вершин, инцидентных друг другу. Известно, что Γ – дистанционно-регулярный дву-

*Поддержано грантом РФФИ, 01-01-00219.
**Поддержано грантами РФФИ, 99-01-00098, 01-01-00219.

дольный граф с $2(q^2+q+1)$ вершинами, диаметра 3 и степени $q+1$, где q – порядок плоскости $\mathcal{P}$. Положим

$$R_i = \{(u,v) \in V^2 : \ d_\Gamma(u,v) = i\}, \quad i = 0,\dots,3, \tag{1}$$

где $d_\Gamma(u,v)$ – расстояние между вершинами u и v в графе Γ. Ясно, что $R_1 = R$. Подкольцо $W = W(\mathcal{P})$ полного матричного кольца $\mathrm{Mat}_V = \mathrm{Mat}_V(\mathbb{Z})$, порожденное матрицей смежности $A = A(R)$ отношения R, обладает $\mathbb{Z}$-базисом $\mathcal{M}(W) = \{A(R_i)\}_{i=0}^{3}$, состоящим из симметрических $\{0,1\}$-матриц. Отсюда следует, что W – коммутативное клеточное кольцо на V со стандартным базисом $\mathcal{M}(W)$ (см. [8, 7]); мы называем его кольцом проективной плоскости $\mathcal{P}$.

2. Следуя [5, 6, 7], для натурального числа m и произвольного клеточного кольца W на V обозначим через $\widehat{W}^{(m)}$ наименьшее по включению клеточное подкольцо кольца Mat_{V^m}, содержащее m-ую тензорную степень W^m кольца W и матрицу смежности I_m диагонального отношения $\{(v,\dots,v) \in V^m : \ v \in V\}$. Клеточное кольцо $\widehat{W}^{(m)}$ называется *m-расширенным кольцом* кольца W. Ясно, что $\widehat{W}^{(1)} = W$. Первый результат настоящей работы (теорема 1 ниже) состоит в вычислении стандартного базиса кольца $\widehat{W}^{(2)}$, где W – кольцо произвольной конечной проективной плоскости $\mathcal{P}$.

В обозначениях пункта 1 определим тернарное отношение $R_4 \subset V^3$, состоящее из всех троек попарно различных точек (соотв. прямых) плоскости $\mathcal{P}$, инцидентных одной и той же прямой (соотв. точке), и кватернарное отношение $R_5 \subset V^4$, состоящее из всех четверок (v_1,v_2,v_3,v_4), таких, что после подходящей перестановки v_1,v_2 (соотв. v_3,v_4) – различные точки (соотв. прямые) плоскости $\mathcal{P}$, причём прямая, инцидентная v_1 и v_2, и точка, инцидентная v_3 и v_4, также инцидентны. Отметим, что каждое отношение R_i, $i \in \{0,\dots,5\}$, инвариантно относительно любых перестановок координат. Далее, для каждого элемента $\overline{v} = (v_1,\dots,v_4)$ из V^4 и подмножества $s = \{s_1,\dots,s_l\}$, $s_1 < \cdots < s_l$, множества $\{1,\dots,4\}$ определим целое число $d(\overline{v},s)$ равное $i+1$, если $(v_{s_1},\dots,v_{s_l}) \in R_i$ для некоторого $i \in \{0,\dots,5\}$, и равное 0 в противном случае. Множество всех формальных сумм вида

$$S(\overline{v}) = \sum_{s \subset \{1,\dots,4\}} d(\overline{v},s)s, \quad \overline{v} \in V^4,$$

обозначим через $\mathcal{S}(\mathcal{P})$. Каждой сумме $S \in \mathcal{S}(\mathcal{P})$ отвечает отношение, состоящее из всех $\overline{v} \in V^4$, для которых $S(\overline{v}) = S$. Отождествляя естественным образом множество V^4 с $(V^2)^2$, будем рассматривать его как бинарное отношение на V^2; матрицу смежности этого отношения, принадлежащую Mat_{V^2}, обозначим через A_S.

Теорема 1. *Пусть W – кольцо конечной проективной плоскости $\mathcal{P}$ и $\widehat{W} = \widehat{W}^{(2)}$. Тогда $\mathcal{M}(\widehat{W}) = \{A_S : S \in \mathcal{S}(\mathcal{P})\}$ и структурные константы кольца W относительно базиса $\mathcal{M}(\widehat{W})$ зависят только от порядка плоскости $\mathcal{P}$.*

Набросок доказательства. Используя утверждение (1) леммы 6.2 из [7], можно показать, что $A_S \in \widehat{W}$ для всех $S \in \mathcal{S}(\mathcal{P})$. С другой стороны, нетрудно видеть, что множество $\{A_S : S \in \mathcal{S}(\mathcal{P})\}$ замкнуто относительно транспонирования, состоит из ортогональных по Адамару $\{0,1\}$-матриц, в сумме дающих матрицу, из всех единиц, а его линейная оболочка содержит матрицу I_2 и кольцо W^2. Таким образом, в силу минимальности кольца $\widehat{W}$ достаточно проверить, что любое произведение $A_S A_T$, где $S, T \in \mathcal{S}(\mathcal{P})$, является $\mathbb{Z}$-линейной комбинацией матриц из этого множества и вычислить коэффициенты соответствующих разложений. Это может быть сделано прямым вычислением. •

3. В связи с изучением групп ранга 3 в работе [4] для сильно-регулярных графов было введено понятие t-условия, которое затем было обобщено на произвольные раскрашенные графы в [8] (см. также [7]). По определению все сильно-регулярные графы удовлетворяют 3-условию, однако известно лишь несколько серий сильно-регулярных графов, удовлетворяющих 5-условию и не являющихся графами ранга 3 (см. [9]). Более того, до настоящего времени не было известно ни одного дистанционно-регулярного графа, удовлетворяющего 6-условию, но не являющегося дистанционно-транзитивным в смысле [2] (примеры раскрашенных графов, удовлетворяющих t-условию с произвольно большим t, но не индуцированных множеством 2-орбит группы перестановок, были построены в [7], однако эти графы не являются дистанционно-регулярными). Теорема 1 позволяет указать некоторое семейство дистанционно-регулярных раскрашенных графов диаметра 3, которые, не являясь дистанционно-транзитивными, удовлетворяют 6-условию. Назовем *раскрашен-*

ным графом проективной плоскости $\mathcal{P}$ раскрашенный граф её клеточного кольца $W(\mathcal{P})$, т.е граф с множеством вершин V и цветными классами R_i, $i = 0, \dots, 3$.

Теорема 2. *Раскрашенный граф любой конечной проективной плоскости удовлетворяет 6-условию.*

Доказательство. Пусть $\mathcal{P}$ – проективная плоскость и $W \leqslant \mathrm{Mat}_V$ – её клеточное кольцо. Тогда, используя явный вид стандартного базиса кольца $\widehat{W} = \widehat{W}^{(2)}$, найденный в теореме 1, нетрудно проверить, что

$$f(R_i) \in \mathcal{M}(\widehat{W}), \quad i = 0, \dots, 3,$$

где $f : \mathrm{Mat}_V \to \mathrm{Mat}_{V^2}$ – вложение, индуцированное отображением $V \to V^2$, переводящим v в (v, v). В терминах работы [7] это в точности означает, что кольцо W является 2-замкнутым. Поэтому в силу теоремы 6.4 той же работы мы заключаем, что раскрашенный граф клеточного кольца W удовлетворяет 6-условию, что и требовалось доказать. $\bullet$

Как было отмечено в пункте 1, граф любой проективной плоскости $\mathcal{P}$ является дистанционно-регулярным графом диаметра 3. Кроме того, как доказано в [7], этот граф дистанционно-транзитивен тогда и только тогда, когда $\mathcal{P}$ является плоскостью Галуа. Таким образом, теорема 2 дает бесконечное семейство дистанционно-регулярных графов диаметра 3, удовлетворяющих 6-условию, но не являющихся дистанционно-транзитивными. В частности, беря в качестве $\mathcal{P}$ плоскость Холла порядка 9 (см. [3]), мы получаем пример такого графа на 182 вершинах.

4. Следуя [5], назовём клеточные кольца $W \leqslant \mathrm{Mat}_V$ и $W' \leqslant \mathrm{Mat}_{V'}$ *слабо изоморфными*, если существует изоморфизм матричных колец $\varphi : W \to W'$, сохраняющий адамарово умножение. Любой такой изоморфизм называется *слабым изоморфизмом* из W в W'. Пусть m – натуральное число. Назовем слабый изоморфизм $\psi : \widehat{W}^{(m)} \to \widehat{W'}^{(m)}$ *m-расширением* изоморфизма φ, если

$$\psi(I_m) = I'_m \quad \text{и} \quad \psi(A) = \varphi^m(A) \quad \text{для всех} \quad A \in W^m,$$

где φ^m – слабый изоморфизм из W^m в $(W')^m$, индуцированный φ. Слабый изоморфизм называется *m-изоморфизмом*, если он имеет m-расширение. Свойства m-изоморфизмов были детально изучены в [6, 7].

Теорема 3. *Кольца конечных проективных плоскостей одного и того же порядка 2-изоморфны.*

Набросок доказательства. Пусть $W = W(\mathcal{P})$ и $W' = W(\mathcal{P})$, где $\mathcal{P}$ и $\mathcal{P}'$ – проективные плоскости одного и того же порядка. Тогда нетрудно видеть, что отображение $\varphi : W \to W'$, индуцированное биекцией $\mathcal{M}(W) \to \mathcal{M}(W')$, переводящей $A(R_i)$ в $A(R_i')$, $i = 0, \dots, 3$, является слабым изоморфизмом. С другой стороны, из теоремы 1 следует, что множества $\mathcal{S}(\mathcal{P})$ и $\mathcal{S}(\mathcal{P}')$ равны и соответствующая биекция $\mathcal{M}(\widehat{W}) \to \mathcal{M}(\widehat{W'})$, где $\widehat{W} = \widehat{W}^{(2)}$ и $\widehat{W'} = \widehat{W'}^{(2)}$, индуцирует некоторый слабый изоморфизм $\psi : \widehat{W} \to \widehat{W'}$. Поскольку, как нетрудно видеть, ψ является 2-расширением φ, последний является 2-изоморфизмом. $\bullet$

5. Клеточные кольца W на V и W' на V' называются *сильно-изоморфными*, если $W^g = W'$ для некоторой биекции $g : V \to V'$, называемой *сильным изоморфизмом* из W в W'. Отметим, что клеточные кольца проективных плоскостей $\mathcal{P}$ и $\mathcal{P}'$ сильно изоморфны тогда и только тогда, когда плоскость $\mathcal{P}$ изоморфна $\mathcal{P}'$ или двойственной к ней плоскости. Легко видеть, что каждый сильный изоморфизм индуцирует слабый изоморфизм. Более того, можно доказать (см. [6, теорема 4.5 и формула (7)], что

$$\mathrm{Isow}_1(W, W') \supset \ldots \supset \mathrm{Isow}_n(W, W') = \ldots = \mathrm{Isow}_\infty(W, W'), \qquad (2)$$

где $\mathrm{Isow}_m(W, W')$ – множество всех m-изоморфизмов из W в W', $\mathrm{Isow}_\infty(W, W')$ – множество всех слабых изоморфизмов из W в W', индуцированных сильными изоморфизмами, и n – мощность множества V. Клеточное кольцо W называется *m-отделимым*, если $\mathrm{Isow}_m(W, W') = \mathrm{Isow}_\infty(W, W')$ для любого клеточного кольца W'. Из формулы (2) следует, что m-отделимое кольцо является l-отделимым для всех $l \geqslant m$. Положим

$$s(W) = \min\{m : \ W \text{ является } m\text{-отделимым}\}$$

и назовём это число *числом отделимости* кольца W. Следующая теорема усиливает результат из [7] о том, что для любой плоскости Галуа число отделимости её кольца не превосходит 6.

Теорема 4. *Пусть $W = W(\mathcal{P})$ – кольцо проективной плоскости $\mathcal{P}$ порядка q. Тогда $s(W) = 1$, если любая проективная плоскость порядка q изоморфна $\mathcal{P}$ или двойственной к ней плоскости, и $s(W) \geqslant 3$*

в противном случае. Более того, если $\mathcal{P}$ – плоскость Галуа, то в последнем случае $s(W) = 3$.

Набросок доказательства. Отметим прежде всего, что если W' – клеточное кольцо, слабо изоморфное W, то, очевидно, W' является кольцом некоторой проективной плоскости $\mathcal{P}'$ порядка q. Более того, $\mathrm{Isow}(W, W') = \{\varphi\}$, где φ – единственный слабый изоморфизм, переводящий матрицу $A(R_i)$ плоскости $\mathcal{P}$ в соответствующую матрицу $A(R'_i)$ плоскости $\mathcal{P}'$, $i = 0, \ldots, 3$. В частности, если кольца W и W' сильно изоморфны, то любой сильный изоморфизм из W в W' индуцирует φ. Таким образом, если любая плоскость порядка q изоморфна $\mathcal{P}$ или двойственной к ней плоскости, то $s(W) = 1$. В противном случае кольца W и W' не являются сильно-изоморфными, и поэтому из теоремы 3 следует, что $s(W) \geqslant 3$.

Как было отмечено в пункте 1, плоскость $\mathcal{P}$ является плоскостью Галуа тогда и только тогда, когда для неё справедлива теорема Дезарга. Согласно [3, Ch.4.1] это эквивалентно тому, что любая центральная пара трегольников плоскости $\mathcal{P}$ является осевой парой и наоборот. Последнее свойство выражается в виде утверждения о том, что некоторая определённая матрица $A(\mathcal{P})$ из Mat_{V^3} равна нулю. Используя утверждение (1) леммы 6.2 из [7], можно показать, что $A(\mathcal{P}) \in \widehat{W}^{(3)}$, а с помощью утверждения (2) той же леммы проверить, что если W' – кольцо проективной плоскости $\mathcal{P}'$ и введённый выше слабый изоморфизм φ является 3-изоморфизмом, то $\varphi(A(\mathcal{P})) = A(\mathcal{P}')$. Но тогда $A(\mathcal{P}') = 0$ и, значит, в плоскости $\mathcal{P}'$ выполнена теорема Дезарга, откуда следует, что $\mathcal{P}'$ – плоскость Галуа. Поскольку все плоскости Галуа одного порядка изоморфны, найдётся изоморфизм из $\mathcal{P}$ в $\mathcal{P}'$. Любой такой изоморфизм, очевидно, является сильным изоморфизмом из W в W', индуцирующим φ. Таким образом, $\varphi \in \mathrm{Isow}_\infty(W, W')$, откуда следует, что $s(W) \leqslant 3$. $\bullet$

Пусть q – степень простого числа. Известно, что, при $q \leqslant 8$ существует единственная с точностью до изоморфизма проективная плоскость порядка q. Это далеко не так при составном $q \geqslant 9$. Вопрос о существовании проективной плоскости простого порядка, не изоморфной плоскости Галуа, является открытой проблемой [1].

Литература

1. A. Beutelspacher, *Projective planes*, Handbook of incidence geometry. — North-Holland, Amsterdam, 1995, 107–136.
2. A. E. Brouwer, A. M. Cohen, A. Neumaier, *Distance-Regular graphs.* — Springer, Berlin, 1989.
3. P. Dembowski, *Finite Geometries.* — Springer, Berlin, 1968.
4. D. G. Higman, *Characterization of families of rank 3 permutation graphs by the subdegree I, II.* — Arch. Math., **21** (1970), 151–156; 353–361.
5. S. A. Evdokimov, M. Karpinski, I. N. Ponomarenko, *On a New High Dimensional Weisfeiler-Leman Algorithm.* — Journal of Algebraic Combinatorics, **10** (1999), 29–45.
6. S. A. Evdokimov, I. N. Ponomarenko, *On highly closed cellular algebras and highly closed isomorphisms.* — Electronic Journal of Combinatorics, **6** (1999), #R18.
7. S. Evdokimov, I. Ponomarenko, *Separability Number and Schurity Number of Coherent Configurations.* — Electronic Journal of Combinatorics, **7** (2000), #R31.
8. I. A. Faradžev, M. H. Klin, M. E. Muzychuk, *Cellular rings and groups of automorphisms of graphs.* — In: I.A. Faradžev et al. (eds): Investigations in algebraic theory of combinatorial objects, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1994, 1–152.
9. S. Reichard, *A criterion for the t-vertex condition of graphs.* — J. Combin. Theory Ser. A, **90** (2000), 304–314.

Evdokimov S.A., Ponomarenko I.N. Rings associated to finite projective planes and their isomorphisms.

In this paper we announce an explicit form of the standard basis of the 2-extended ring associated to the cellular ring generated by the incidence graph of a finite projective plane. This enables us to find the first example of a distance-regular graph satisfying the 6-condition which is not a distance-transitive one. One more corollary of the result obtained is that the cellular rings of any two projective planes of the same order are 2-isomorphic. This implies that if there exist at least two nonisomorphic and nondual to each other projective planes of a given order, then the separability number of any projective plane of this order is greater or equal to 3 and, moreover, it is equal to 3 for a Galois plane.

С.-Петербургский институт
информатики и автоматизации РАН

E-mail: evdokim@pdmi.ras.ru

Поступило 13 ноября 2002 г.

С.-Петербургское отделение
математичекого института
им. В. А. Стеклова РАН

E-mail: inp@pdmi.ras.ru