Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 289, 2002 г.

**Н. С. Семенов**

# О ГУРВИЦЕВОСТИ ГРУПП ВЕЙЛЯ

## Введение

В настоящей работе мы доказываем, что коммутант группы Вейля типа $\mathrm{D}_n$ является гурвицевой группой для всех достаточно больших $n$.

Напомним, что конечная группа $G$ называется гурвицевой, если она (2,3,7)-порождена, то есть если она порождается инволюцией $x$ и элементом $y$ порядка 3, произведение $xy$ которых имеет порядок 7. Изучению гурвицевых групп посвящена обширная литература (см., например, [3]), однако до самого последнего времени было известно очень мало примеров гурвицевых групп большого ранга. Замечательным исключением был результат Г. Хигмена и М. Кондера [2], утверждающий, что все знакопеременные группы $\mathrm{A}_n$, $n \geq 168$, гурвицевы. Совсем недавно А. Луккини, М. К. Тамбурини и Дж. Уилсон, используя результат Хигмена-Кондера, доказали, что почти все классические группы над конечным полем достаточно больших рангов гурвицевы. В действительности, ими получены гораздо более общие результаты, связанные с (2,3,7)-порождением элементарных групп $\mathrm{E}(n, R)$ над конечно-порожденными кольцами (см. [8–10]). Методы их работ основаны на диаграммах Хигмена–Кондера.

В настоящей работе мы замечаем, что незначительное видоизменение рассуждения Луккини–Тамбурини–Уилсона, позволяет получить результат о гурвицевости коммутанта $\mathrm{W}(\mathrm{D}_n)$. Кроме того, мы получаем некоторые результаты о порождении коммутанта группы Вейля системы корней типа $\mathrm{B}_n$.

## §1. Система корней $\mathrm{B}_l$

Обозначим через $\mathrm{W}(\mathrm{B}_l)$, $\mathrm{W}(\mathrm{D}_l)$ группы Вейля систем корней типа $\mathrm{B}_l$ и $\mathrm{D}_l$ соответственно. Через $\mathrm{S}_l$, $\mathrm{A}_l$, $\mathrm{C}_2$ и $\mathrm{N}(l, \mathbb{Z})$ обозначим симметрическую группу степени $l$, знакопеременную группу степени $l$, циклическую группу порядка 2 и группу целочисленных мономиальных матриц порядка $l$.

Следующая лемма хорошо известна.

**Лемма 1.** *Имеют место следующие изоморфизмы:*

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{W}(\mathrm{B}_l) \simeq \mathrm{S}_l \leftthreetimes \mathrm{C}_2^l \simeq \mathrm{N}(l, \mathbb{Z}),\\
&[\mathrm{W}(\mathrm{B}_l), \mathrm{W}(\mathrm{B}_l)] \simeq \mathrm{A}_l \leftthreetimes \mathrm{C}_2^l,\\
&\mathrm{W}(\mathrm{D}_l) \simeq \mathrm{S}_l \leftthreetimes \mathrm{C}_2^{l-1},\\
&[\mathrm{W}(\mathrm{D}_l), \mathrm{W}(\mathrm{D}_l)] \simeq \mathrm{A}_l \leftthreetimes \mathrm{C}_2^{l-1}\,.
\end{aligned}
$$

**Доказательство.** Известно (см. [1]), что группа $\mathrm{W}(\mathrm{B}_l)$ задается образующими $s_1, \ldots, s_l$ и соотношениями:

$$
\begin{gathered}
s_i^2 = 1; \quad (s_i s_j)^2 = 1, \quad |i-j| > 1;\\
(s_i s_{i+1})^3 = 1, \quad i \neq l-1, l; \quad (s_{l-1} s_l)^4 = 1,
\end{gathered}
$$

а ее порядок равен $2^l(l!)$. Легко видеть, что этим условиям удовлетворяют следующие элементы $\mathrm{S}_{2l}$ — группы перестановок на множестве $\{-l, \ldots, -1,\ 1, \ldots, l\}$:

$$
\begin{gathered}
s_1 = (12)(-2,-1),\ s_2 = (23)(-3,-2), \ldots,\\
s_{l-1} = (l-1, l)(-l, -l+1),\ s_l = (l, -l).
\end{gathered}
$$

Таким образом, подгруппа в $\mathrm{S}_{2l}$, порожденная этими перестановками, изоморфна $\mathrm{W}(\mathrm{B}_l)$.

Теперь рассмотрим элементы $\mathrm{N}(l, \mathbb{Z}) : s_1', \ldots, s_{l-1}'$ — матрицы перестановки, соответствующие перестановкам $(12), \ldots, (l-1, l)$ соответственно, и $s_l'$ — матрицу, отличающуюся от единичной только минус единицей в позиции $(l, l)$. Непосредственно проверяется, что построенное таким образом соответствие $s_i \leftrightarrow s_i'$ задает изоморфизм $\mathrm{W}(\mathrm{B}_l) \simeq \mathrm{N}(l, \mathbb{Z})$. Остальные изоморфизмы хорошо известны (см. [1]).

**Определение.** *Группа $G$ называется $(2,3,n)$-порожденной, если она является эпиморфным образом группы*

$$
\langle X, Y \mid X^2 = Y^3 = (XY)^n = 1 \rangle.
$$

*Группа $G$ называется $(2,3)$-порожденной, если она порождается инволюцией и элементом третьего порядка.*

**Лемма 2.** *Пусть* $\mathrm{A}_l$ *действует на множестве* $\Omega$ *из* $l$ *элементов. Если* $\mathrm{A}_l$ *порождается элементами* $x, y$ *такими, что* $x^2 = y^3 = 1$, *и существует слово* $w(x, y) = 1$, *в которое* $x$ *входит нечетное число раз, меньшее* $l$, *и множество элементов множества* $\Omega$, *которые остаются на месте под действием перестановки* $x$, *непусто, то группа* $[\mathrm{W}(\mathrm{B}_l), \mathrm{W}(\mathrm{B}_l)]$ *является* $(2, 3)$*-порожденной.*

**Доказательство.** Представим элементы $\mathrm{A}_l$ матрицами перестановок стандартным образом. Заменим какую-нибудь единицу на диагонали в матрице $x$ на минус единицу и обозначим новую матрицу через $\overline{x}$. Равенство $w(x, y) = 1$ переходит в равенство $w(\overline{x}, y) =$ нечетному числу смен знаков, то есть диагональной матрице, у которой на диагонали стоят $\pm 1$, причем минус единиц нечетное число.

Легко видеть, что в группе $G = \langle \overline{x}, y \rangle$ содержатся все четные матрицы-перестановки, быть может со знаками. Следовательно, в этой группе содержится матрица, которая отличается от единичной наличием одной минус единицы где-то на главной диагонали, и, таким образом, в $G$ содержится и вся группа $\mathrm{A}_l \leftthreetimes \mathrm{C}_2^l$.

**Лемма 3.** *Если* $\mathrm{A}_l$ *не* $(2, 3)$*-порождена (т.е.* $l = 6, 7, 8$*), то группы* $[\mathrm{W}(\mathrm{B}_l), \mathrm{W}(\mathrm{B}_l)]$, $[\mathrm{W}(\mathrm{D}_l), \mathrm{W}(\mathrm{D}_l)]$ *не* $(2, 3)$*-порождены.*

**Доказательство.** Лемма следует из того, что при переходе к факторгруппам свойство $(2, 3)$-порождаемости сохраняется.

**Следствие.** *При* $l \geqslant 168$ *группа* $[\mathrm{W}(\mathrm{B}_l), \mathrm{W}(\mathrm{B}_l)]$ *является* $(2, 3, 14)$*-порожденной.*

## §2. Система корней $\mathrm{D}_l$

Напомним вкратце замечательную конструкцию Хигмена–Кондера [2].

Рассмотрим следующую группу:

$$\overline{\Delta} = \langle X, Y, T \mid X^2 = Y^3 = (XY)^7 = T^2 = (XT)^2 = (YT)^2 = 1 \rangle,$$

а также подгруппу $\Delta$ в $\overline{\Delta}$, порожденную $X$ и $Y$. Кондер явно строит эпиморфизмы из $\overline{\Delta}$ в симметрическую группу $\mathrm{S}_n$ и из $\Delta$ в знакопеременную группу степени $n$ при всех достаточно больших $n$. А именно, он строит несколько "базисных" диаграмм, которые описывают транзитивные перестановочные представления $\overline{\Delta}$ и затем объясняет, как их склеивать и получать дальнейшие представления $\overline{\Delta}$. Склейка представлений осуществляется посредством так называемых ручек. Ручка — это пара $a, b$ различных элементов некоторого множества $U$, на котором транзитивно действует $\overline{\Delta}$, таких, что $X$ оставляет их на месте, а $Y$ и $T$ отображают $a$ в $b$. Нам понадобятся лишь 17 диаграмм Кондера, а именно диаграммы $G$, $E$, $A$ и $H_d$ из работы [2], где $d \in D$,

$$D = \{36, 42, 57, 77, 115, 135, 136, 142, 144, 165, 180, 187, 195, 216\}.$$

Легко видеть, что числа из множества $D$ образуют полный набор целочисленных представителей по модулю 14. Таким образом, любое достаточно большое целое число $n$ можно представить в виде

$$n = 42a + 14b + d,\ a \geqslant 1,\ b \in \{0, 1, 2\},\ d \in D.$$

Степени представлений, соответствующих диаграммам $G$, $E$, $A$ и $H_d$ равны соответственно 42, 28, 14 и $d$.

Пусть $\Omega$ — множество из $n$ элементов, где число $n$ допускает представление в виде $n = 42a + 14b + d$, как выше. Так, $\Omega$ можно представить как дизъюнктное объединение $G_1, \ldots, G_a$ $a$ копий $G$ и копии $H_d$, а если $b \neq 0$, то также копии либо $E$, либо $A$. Мы обозначим элементы $\Omega$ через $v_1, \ldots, v_n$ так, что

$$G_r = \{v_i \mid 42(r-1) + 1 \leqslant i \leqslant 42r\},\ r \leqslant a,$$

$$H_d = \{v_i \mid 42a + 14b + 1 \leqslant i \leqslant n\}.$$

Также мы предполагаем, что $v_i \mapsto v_{42+i}$ индуцирует изоморфизм $\overline{\Delta}$-множеств $G_r$, и ручки в $G_r$ следующие:

$$v_{2+42(r-1)}, v_{3+42(r-1)};\ v_{14+42(r-1)}, v_{15+42(r-1)};\ v_{32+42(r-1)}, v_{33+42(r-1)}.$$

Отметим, что диаграммы $E$, $A$ и $H_d$ содержат по одной ручке. Так, с помощью этих ручек мы объединяем все диаграммы и получаем транзитивное действие $\overline{\Delta}$ на $\Omega$: мы полагаем

$$v_{32+42(r-1)}X = v_{2+42r},\ v_{33+42(r-1)}X = v_{3+42r},\ 1 \leqslant r < a,$$

а также склеиваем $G_a$ с $H_d$ с помощью ручки $v_{32+42(a-1)}$, $v_{33+42(a-1)}$ и используем ручку $v_{14+42(a-1)}$, $v_{15+42(a-1)}$ для связи с $A$ или $E$. Подробнее эта процедура описана в работе [10].

Пусть $\mathrm{Alt}(\Omega)$ — группа четных перестановок на множестве $\Omega$. Кондер явно указывает 2 элемента $\xi$ и $y$ из $\mathrm{Alt}(\Omega)$, которые являются образами $X$ и $Y$ относительно эпиморфизма из $\Delta$ в $\mathrm{Alt}(\Omega)$, описанного выше. Свойства элементов $\xi$ и $y$ явно описаны в лемме ниже. Полезный цикл для $\xi, y$ — это цикл нечетного простого порядка с носителем в $H_d$, который содержит орбиту $\xi$ и две точки из орбиты $y$. Все рассматриваемые далее действия считаются правыми.

**Лемма 4.** *Пусть $|\Omega| = n = 42a + 14b + d$, где $a \geqslant 2$ и $b = 0, 1, 2$ или $a = 1$ и $b = 0$, а $d$, как и выше, принадлежит $D$. Тогда*

1. *$v_{32}\xi = v_{44}$, $v_{33}\xi = v_{45}$, и $\xi$ действует на $G_1 \setminus \{v_{32}, v_{33}\}$ как перестановка*

$$(v_1, v_4)(v_5, v_7)(v_6, v_{10})(v_8, v_{12})(v_9, v_{24})(v_{11}, v_{29})(v_{13}, v_{16})$$

$$(v_{17}, v_{19})(v_{18}, v_{25})(v_{20}, v_{27})(v_{21}, v_{23})(v_{22}, v_{39})(v_{26}, v_{30})$$

$$(v_{28}, v_{41})(v_{31}, v_{34})(v_{35}, v_{37})(v_{36}, v_{40})(v_{38}, v_{42}),$$

   *в частности, $\xi$ оставляет на месте $v_2, v_3, v_{14}, v_{15}$.*
2. *Пусть $v_i \in G_r$ для некоторого $r < a$ и $v_i \neq v_2$, $v_3$, $v_{14+42(a-2)}$, $v_{15+42(a-2)}$, $v_{32+42(a-2)}$, $v_{33+42(a-1)}$. Если $v_i\xi = v_j$, то $v_{i+42}\xi = v_{j+42}$.*
3. *На $\bigcup_{r=1}^{a} G_r$ $y$ действует как*

$$\prod_{0 \leqslant j \leqslant 14a-1} (v_{3j+1}, v_{3j+2}, v_{3j+3}).$$

4. *Некоторая степень коммутатора $[\xi, y]$ — полезный цикл для $\xi, y$.*
5. $\mathrm{Alt}(\Omega) = \langle \xi, y \rangle$ *и* $\xi^2 = y^3 = (\xi y)^7 = 1$.

**Доказательство.** Эта лемма не что иное, как лемма 3 в работе [10].

Пусть $V$ — свободный $\mathbb{Z}$-модуль с базисом $\Omega$, где $|\Omega| = n$. Отождествим перестановки на множестве $\Omega$ с матрицами $\mathrm{GL}(V)$ стандартным образом. Рассмотрим гомоморфизм $x_1 \in \mathrm{GL}(V)$ который оставляет на месте все элементы, кроме следующих:

$$v_2 x_1 = -v_2, \ \ v_3 x_1 = -v_3.$$

В работе [10] определяется очень похожий гомоморфизм и описываются его свойства.

**Лемма 5.** *Положим* $x = x_1\xi$. *Тогда*

1. $x^2 = y^3 = (xy)^7 = 1$.
2. *Некоторая степень коммутатора* $[x, y]$ *— полезный цикл для* $\xi, y$.
3. $\mathrm{Alt}(\Omega) \leqslant \langle x, y\rangle$.

**Доказательство.** В обозначениях [10] положим $m = 1$, $t_1 = 0$. Теперь эта лемма следует из леммы 4 [10] и из доказательства теоремы A [10].

**Теорема.** *В условиях леммы* 4 $[\mathrm{W(D}_n), \mathrm{W(D}_n)]$ *— гурвицева группа.*

**Доказательство.** $x, y \in [\mathrm{W(D}_n), \mathrm{W(D}_n)]$ и $\mathrm{Alt}(\Omega) \leqslant \langle x, y\rangle$, следовательно, $x_1 \in \langle x, y\rangle$ и, следовательно, $[\mathrm{W(D}_n), \mathrm{W(D}_n)] = \langle x, y\rangle$. По лемме 5 $x^2 = y^3 = (xy)^7 = 1$. Теорема доказана.

**Замечание.** Условия этой теоремы выполняются при

$$n \in \{14m + d \mid m \geqslant 6, d \in D\} \cup \{42 + d \mid d \in D\},$$

в частности, для всех $n$, бóльших 286.

Автор выражает искреннюю благодарность Н. А. Вавилову за помощь при подготовке статьи и разработке данной тематики.

## Литература


1. Н. Бурбаки, *Группы и алгебры Ли*, гл. IV–VI, М., Мир (1972).
2. M. Conder, *Generators for alternating and symmetric groups.* — J. London Math. Soc. (2) **22**, No. 1 (1980), 75–86.
3. M. Conder, *Hurwitz groups: a brief survey.* — Bull. Amer. Math. Soc. **23**, No. 2 (1990), 359–370.
4. M. Conder, *Two element generation of the finite reflection groups.* — Quart. J. Math. Oxford Ser. (2) **46**, No. 181 (1995), 95–106.
5. M. Conder, *Some results on quotients of triangle groups.* — Bull. Austral. Math. Soc. **30**, No. 1 (1984), 73-90.
6. M. Conder, *More on generators for alternating and symmetric groups.* — Quart. J. Math. Oxford Ser. (2) **32**, No. 126 (1981), 137–163.
7. L. Di Martino, M. C. Tamburini, A. E. Zalesskii, *On Hurwitz groups of low rank.* — Comm. Algebra **28**, No. 11 (2000), 5383–5404.
8. A. Lucchini, *$(2,3,k)$-generated groups of large rank.* — Arch. Math. (Basel) **73**, No. 4 (1999), 241–248.
9. A. Lucchini, M. C. Tamburini, *Classical groups of large rank as Hurwitz groups.* — J. Algebra **219** (1999), 531–546.
10. A. Lucchini, M. C. Tamburini, J. S. Wilson, *Hurwitz groups of large rank.* — J. London Math. Soc. (2) **61**, No. 1 (2000), 81–92.

Semenov N. S. On the Weyl groups as Hurwitz groups.

A new series of Hurwitz groups is obtained: it is proved that the commutator subgroup of the Weyl group of type $D_n$ is Hurwitz for any sufficiently large $n$.

С.-Петербургский
государственный университет

Поступило 20 июня 2002 г.